B. G. TEUBNERS LEHRBÜCHER
DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN V,1

GINO LORIA

SPEZIELLE ALGEBRAISCHE UND TRANSZENDENTE EBENE KURVEN

THEORIE UND GESCHICHTE

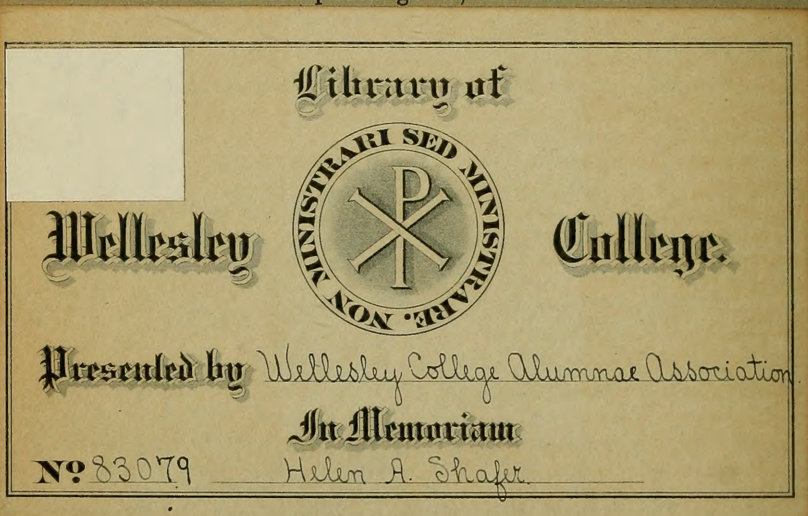
I

B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen.

gr. 8. geb.

Diese Sammlung bietet in einzelnen in sich abgeschlossenen Werken zusammenfassende Darstellungen der wichtigsten Abschnitte der mathematischen Wissenschaften und deren Anwendungen. Im einzelnen wollen diese Werke in ihrer ausführlichen, neben der rein wissenschaftlichen auch pädagogische Momente berücksichtigenden Darstellung die Möglichkeit zu selbständigem und umfangreichen Quellenstudien unabhängigem Eindringen in die verschiedenen Disziplinen geben; in ihrer Gesamtheit aber sollen

ein
gen
ar-



02.
len
S.
S.
nly
S.
er-
en.
aß-

L. E. Dickson, linear Groups with an Exposition of the Galois Field theory. X, 312 S. 1901. n. ℳ 12.—. (Englisch.) [Bd. VI.]

O. Fischer, theoretische Grundlagen für eine Mechanik der lebenden Körper mit speziellen Anwendungen auf den Menschen, sowie auf einige Bewegungsvorgänge an Maschinen. In möglichst elementarer und anschaulicher Weise dargestellt. Mit 67 Fig. u. 4 Taf. X, 372 S. 1906. n. ℳ 14.—. [Bd. XXII.]

A. Gleichen, Lehrbuch der geometrischen Optik. Mit 251 Fig. XIV, 511 S. 1902. n. ℳ 20.—. [Bd. VIII.]

A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen. Mit 10 Figuren. XXIV, 509 S. 1903. n. ℳ 24.—. [Bd. XII.]

H. Lamb, Lehrbuch der Hydrodynamik. Deutsch von Joh. Friedel. Mit 79 Fig. XVI, 787 S. 1907. n. ℳ 20.—. [Bd. XXVI.]

R. von Lilienthal, Vorlesungen über Differentialgeometrie. In 2 Bänden. I. Band: Kurventheorie. Mit 26 Fig. VI, 368 S. n. ℳ 12.—. [Bd. XXVIII, 1.]

TS 50:708.

B. G. TEUBNERS SAMMLUNG VON LEHRBÜCHERN
AUF DEM GEBIETE DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
(MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN)
BAND V,1

DR. GINO LORIA
ORD. PROFESSOR DER HÖHEREN GEOMETRIE AN DER UNIVERSITÄT GENUA

SPEZIELLE
ALGEBRAISCHE UND TRANSZENDENTE
EBENE KURVEN
THEORIE UND GESCHICHTE

AUTORISIERTE, NACH DEM ITALIENISCHEN MANUSKRIPT BEARBEITETE
DEUTSCHE AUSGABE
VON

PROF. FRITZ SCHÜTTE
OBERLEHRER AM STIFTISCHEN GYMNASIUM ZU DÜREN

ZWEITE AUFLAGE

ERSTER BAND
DIE ALGEBRAISCHEN KURVEN
MIT 142 FIGUREN AUF 14 LITHOGRAPHIERTEN TAFELN



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1910

DEM ANDENKEN

EUGEN BELTRAMIS

Vorwort zur ersten Auflage.

An der Aufstellung der bunten Schar der mannigfaltigen, speziellen algebraischen und transzendenten Kurven haben fast alle Mathematiker, angefangen von der griechischen Epoche bis auf unsere Tage, mitgearbeitet: die einen trieb der Wunsch nach Vermehrung der Zahl interessanter geometrischer Figuren, die anderen der Wunsch, analytische Formeln geometrisch interpretiert zu sehen; wieder andere beseelte die Hoffnung, gewisse, bis dahin unbezwungene geometrische Probleme zu lösen; noch andere führten Anwendungen aus der Mechanik und Physik dazu. Die nachfolgenden Untersuchungen über diese Gebilde sind nicht bloß ihrer äußeren und inneren Natur nach ganz verschiedener Art, sondern sie finden sich auch zerstreut in allerlei ganz verschiedenen Werken, von den gewaltigen Publikationen der großen Akademien an, bis zu den bescheidenen Abhandlungen, in den für die Studierenden bestimmten Zeitschriften, von den Büchern, die heute zu den klassischen der exakten Wissenschaften zählen, bis zu den kleinen Arbeiten, denen es vom Schicksal bestimmt ist, sich nur einer beschränkten Bekanntheit zu erfreuen, wie die Inauguraldissertationen, die Habilitationsschriften und Programmabhandlungen. Die sehr häufigen Fälle, daß ein und dieselbe Kurve oftmals entdeckt worden ist, daß derselbe Satz von verschiedenen Autoren gefunden wurde, daß dasselbe Problem mehrmals als ein neues behandelt worden ist, ließen es dringend nötig erscheinen, einer solch beklagenswerten Arbeitsverschwendung ein Ende zu machen, machten dringend das Bedürfnis fühlbar, das bisher vorhandene ungeheure Material zu ordnen, ließen den sehnsüchtigen Wunsch hervortreten nach einem Werke, in welchem alle bekannten Kurven nach ihrer Definition und ihren Haupteigenschaften dargelegt seien.

Es ist das Verdienst der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Madrid, zuerst öffentlich diesen Wunsch ausgesprochen und zu seiner Erfüllung dadurch beigetragen zu haben, daß sie als Thema für die am 31. Dezember 1894 fällige Preisaufgabe stellte die Ausarbeitung „eines geordneten Verzeichnisses aller Kurven jeglicher Art, die einen speziellen Namen erhalten haben, mit kurzen Angaben über ihre Gestalt, ihre Gleichungen, ihre Erfinder". Da die genannte Akademie die gewünschte Beantwortung nicht erhielt, so wiederholte sie

dieselbe Aufgabe für den am 31. Dezember 1897 fälligen Wettbewerb. Inzwischen hatte der berühmte französische Mathematiker Hâton de la Goupillière ein ähnliches Thema im *Intermédiaire des mathématiciens* (Band I, 1894, S. 37) zur Bearbeitung vorgeschlagen. Eben diesen öffentlichen und von Autoritäten ausgegangenen Aufforderungen, sich methodisch mit den speziellen, bis jetzt vorhandenen Kurven zu beschäftigen, verdankt das vorliegende Werk seine Entstehung. Es fand auch bei der Königl. Akademie zu Madrid die schmeichelhafteste und vollständigste Anerkennung, nachdem es Ende 1897 (in einer von der vorliegenden abweichenden Form) dem erlauchten Urteile jenes hohen Gelehrten-Kollegiums unterbreitet worden war*).

Die Ausführung eines Werkes wie des vorliegenden, dessen Fehlen in der Literatur von vielen Seiten beklagt worden ist, bietet nicht wenige und nicht geringe Schwierigkeiten. Zuerst mußten vor allem die Grenzen desselben sorgfältig festgelegt werden, dann mußte mit peinlicher Sorgfalt das Material zur Ausbeute gesammelt werden, schließlich mußte die Methode ausfindig gemacht werden, um das Material wohl zu ordnen und einzuteilen.

Bezüglich der Frage, welche Kurven zu betrachten seien, habe ich mich entschlossen, auszuschließen: 1. Diejenigen Kurven, die aus heterogenen Bogenstücken zusammengesetzt, und daher nicht durch eine einzige Gleichung darzustellen sind, weil sie auch eher der Architektur, der Physik oder angewandten Disziplinen, als der reinen Mathematik angehören. 2. Die Linien doppelter Krümmung, da sie bekanntlich Gebilde von ganz anderer Natur als die ebenen Kurven sind; ihre Behandlung bleibt daher einem Werke über die vergleichende Geometrie des Raumes vorbehalten, analog diesem Versuch einer vergleichenden Geometrie der Ebene. Hingegen habe ich eingeschlossen alle ebenen oder transzendenten Kurven, die schon einen speziellen Namen erhalten haben, ebenso manche andere, die, wenngleich sie namenlos sind, dennoch eine feste Anstellung in der Wissenschaft verdienen.

Was nun das verwendete Material angeht, so habe ich, kann ich wohl sagen, auf die gesamte mathematische Literatur zurückgegriffen, die mir erreichbar gewesen, weil ich durch die Erfahrung überzeugt wurde, daß nur in sehr wenigen, vielleicht in keinem Zweige der Mathematik wichtige Forschungen über spezielle Kurven gänzlich fehlen. Aber wenn ich auch nicht von vornherein irgendwelche Kategorie mathematischer Arbeiten ausgeschlossen habe, so soll damit nicht gesagt sein, daß mir kein Gegenstand von Bedeutung entgangen

---

*) S.: *Annuario de la Real Academia de Ciencias exactas, fisicas y naturales*, 1900 (Madrid) S. 141—153, 299—322, und *El progréso matematico*, 1900, S. 201 bis 225.

sei, und daher erbitte ich mir für die sowohl unvermeidlichen als auch unbeabsichtigten Mängel meines Werkes schon jetzt die Nachsicht der kompetenten Fachleute, und hege das Vertrauen, daß diese mir von jedwedem gewährt werde, der auch nur eine annähernde Vorstellung von dem unermeßlichen Reichtume der heutigen mathematischen Wissenschaft hat.

Es möge an dieser Stelle auch bemerkt werden, das ich mich bei jeder Kurve darauf beschränkt habe, ihrem Ursprunge, soweit dies möglich war, nachzuforschen, und ihre hauptsächlichsten Eigenschaften nachzuweisen und die besten Untersuchungsmethoden, welche auf sie anwendbar sind, auzugeben, ohne jedoch alle Sätze und alle mit ihr zusammenhängenden Arbeiten aufzuzählen. Zu einer derartigen Beschränkung des Stoffes wurde ich bewogen einerseits durch den enormen Umfang, den sonst meine Arbeit angenommen hätte, anderseits durch die Hoffnung, daß andere sich daran geben möchten, eine vollständige Bibliographie der ebenen Kurven aufzustellen. Die besten Proben in dieser Hinsicht hat Herr Prof. Wölffing gegeben*) und rechtfertigen diese die Ansicht, daß gerade er der geeignetste Mann für diese verdienstliche Arbeit sei.

Was endlich die Anordnung des Stoffes angeht, so glaubte ich ein zweifaches Prinzip beachten zu müssen. Bei der Teilung des Werkes in Abschnitte habe ich mich durch die Natur der untersuchten Kurven leiten lassen, und behandelte darnach zuerst die algebraischen Kurven von bestimmter Ordnung (Abschn. I—IV), dann die von beliebiger Ordnung (Abschn. V); alsdann ging ich zu den transzendenten Kurven über (Abschn. VI), um schließlich (Abschn. VII) gewisse, für alle geometrischen Kurven anwendbare Gesetze für die Ableitung einer Kurve aus einer anderen zu behandeln. Hingegen in der Anordnung der Kapitel der einzelnen Abschnitte wählte ich als hauptsächliches Prinzip die historische Reihenfolge; jedoch habe ich mich davon frei gemacht, wenn es galt, die aus der einzelnen Kurve im Laufe der Zeit durch einen der Verallgemeinerungsprozesse hervorgegangenen Kurven zu beschreiben, deren Fruchtbarkeit die heutige Geometrie hauptsächlich ihren Reichtum verdankt. Weitere Einzelheiten über die behandelte Materie und deren Anordnung ersieht der Leser aus dem ausführlichen Inhaltsverzeichnisse.

Die von mir angewendete Form der Darstellung trägt einen wesentlich algebraischen Charakter und wurde von mir vornehmlich deswegen gewählt, um den jüngeren Lesern einen unbestreitbaren Beweis zu liefern von der gewaltigen Hilfskraft, die die analytische Geometrie jedem bietet, der die Kunstgriffe ihres wunderbaren Me-

---

*) Ich erwähne nur den wunderschönen *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den cyklischen Kurven* (Bibl. math. 3. Reihe, II. Bd. 1901).

chanismus inne hat; ferner auch deswegen, weil die reine Geometrie heute wohl noch nicht eine Grundlage von gleicher Allumfassung und Ausdehnung bieten kann, um daraufhin die mathematischen Wahrheiten zu erforschen. Inwiefern der Verfasser Verbesserung nach Inhalt und Form erreicht hat (insbesondere in bezug auf die transzendenten Kurven), das Urteil darüber sei dem einsichtigen Leser überlassen; sollte er sich veranlaßt fühlen, Anordnung und Auswahl des Stoffes zu tadeln, so möge er auch bedenken, daß es ist eine „res ardua, vetustis novitatem dare, novis autoritatem, obsoletis nitorem, obscuris lucem, fastidiis gratiam, dubiis fidem, omnibus vero naturam et naturae suae omnia"*).

Daß ein Werk wie das vorliegende, trotz der großen Sorgfalt, die der Verfasser auf dasselbe verwandt hat, die erwünschte Vollkommenheit erreichen könne, ist undenkbar, und ich werde allen denen sehr dankbar sein, die mich auf etwaige Mängel und Lücken aufmerksam machen werden, und mich in den Stand setzen, die einen zu beseitigen, die anderen auszufüllen. Einige derartige Berichtigungen und Zusätze, die sich nachträglich ergaben, finden sich am Schlusse des Werkes aufgezählt (s. Berichtigungen und Zusätze).

Das Gefühl der Dankbarkeit veranlaßt mich an dieser Stelle einiger Herren rühmlich zu gedenken, die in verschiedener Weise zu dem guten Ausgange meines Unternehmens, das jetzt in fertiger Form vorliegt, beigetragen haben. Unstreitig an erster Stelle steht Herr H. Brocard, nicht nur wegen seiner wertvollen Kurvenverzeichnisse, die er im *Intermédiaire des mathématiciens* (Bd. IV, 1897, S. 103; V, 1898, S. 33 u. 37; VII, 1900, S. 271) veröffentlicht hat, und der beiden Bände der *Notes de bibliographie des courbes géométriques* (Bar-le-Duc 1897 u. 1899), sondern auch wegen der häufigen und reichhaltigen Aufklärungen, die er mir großartiger Weise allemal gegeben hat, wenn ich ihn darum bat. Alsdann folgt Herr Prof. Dr. E. Wölffing, der, indem er es übernommen hatte, an der schwierigen und undankbaren Aufgabe der Revision der Druckbogen sich zu beteiligen, mir in vielen Fällen wertvolle Zusätze zu den von mir gegebenen bibliographischen Notizen lieferte, die ich in allen den Fällen nützlich verwendet habe, wo sie nicht den ursprünglichen Plan meines Werkes veränderten. Ein Wort aufrichtigen Lobes verdient auch Herr Oberlehrer Fritz Schütte, nicht nur wegen seiner fleißigen Arbeit der Übersetzung, sondern auch für das von ihm fortwährend dem von mir gewählten Thema erwiesene Interesse; und mit dankbarem Herzen erkenne ich es an, daß seine nicht gewöhnliche Geschicklichkeit in der Erfassung und Zeichnung der Kurvenformen zur Verbesserung mancher Einzelheiten beigetragen hat. Schließlich kann ich auch dem

---

*) Plinius, Vorrede zu seiner *Historia naturalis.*

Hause des Verlegers meine Anerkennung nicht versagen, da es keine Opfer gescheut hat, das gegenwärtige Werk einer größeren Vollendung in der Form entgegen zu führen, als ich es hätte erwarten können. Aber was soll ich noch meinen Worten der Anerkennung hinzufügen für ein Haus, das schon durch seine gewaltigen Unternehmungen im Dienste der Wissenschaft sich selber eine bleibende Stelle in der Geschichte der Wissenschaften und den fortwährenden Dank der ganzen Gelehrtenwelt errungen hat?

Genua, im März 1902.

G. Loria.

Vorwort zur zweiten Auflage.

In der verhältnismäßig kurzen Spanne Zeit zwischen dem Erscheinen der ersten Auflage des vorliegenden Werkes und dem der zweiten hat die Theorie der speziellen ebenen Kurven manche bemerkenswerte Fortschritte im einzelnen erfahren. Neue Sätze haben sich den schon über einige besondere Kurven bekannten zugesellt; neue Namen sind aufgetaucht vermehrend das Namensverzeichnis der Kurven; weitergehende Untersuchungen über die Entdeckung und die Geschichte der Kurven sind angestellt worden; neue methodische Darlegungen über die Gesamtheit der Eigenschaften, deren sie sich erfreuen, wurden dargeboten. Jedoch, wie es scheint, sind keine Entdeckungen von solch einschneidender Bedeutung gemacht worden, daß sie eine vollständige Neuordnung des gesamten Stoffes nötig machen, den dieser wichtige Zweig der mathematischen Wissenschaft umfaßt. Somit stellt sich denn auch das vorliegende Werk zum zweiten Male dem mathematischen Leserkreise vor in fast eben demselben Gewande, in dem es bei seinem ersten Erscheinen so freudigen Empfang und so schmeichelhafte Anerkennung gefunden hat. Zwar erscheint es jetzt in zwei Bände getrennt, jedoch dies lediglich nur des bequemeren Nachschlagens und angenehmeren Gebrauches wegen*); zwar sind nur wenige Seiten ohne Verbesserungen und Zusätze geblieben, aber der ganze Plan des Werkes ist so treulich festgehalten worden, daß bisher die Bezifferung der Paragraphen, so weit als möglich, die alte geblieben ist. Eine Bereicherung hat auch die Schar der Figuren erfahren; sie ist sowohl infolge der neuen Zusätze zum Texte erheblich vermehrt, als auch, um die Darlegungen klarer und anziehender zu machen.

*) Das Namen- und Sachregister für das ganze Werk wird den II. Band schließen, der die transzendenten und die abgeleiteten Kurven behandelt.

Änderungen von größerer Bedeutung in diesem I. Bande (der die fünf ersten Abschnitte des ganzen Werkes enthält) beziehen sich auf die *Kurven fünfter Ordnung*, die in der ersten Auflage nur eine knappe Behandlung erfuhren; die diesen merkwürdigen geometrischen Gebilden in der neuen Auflage gewidmeten Seiten werden — und darin täuschen wir uns wohl nicht — zeigen, daß unsere Kenntnisse über diese Linien sich mittlerweile doch mehr vertieft und erweitert haben, als man gewöhnlich glaubt. Mögen diese Seiten manchem jüngeren Mathematiker ein Antrieb sein, den bezüglichen Stoff in mehr vollendeter und vollständigerer Weise zu bearbeiten und anzuordnen, als es dem Verfasser möglich war, dem Zeit und Raum spärlicher zugemessen waren!

In dem Vorworte zur ersten Auflage hatte ich den Wunsch geäußert, es möchten doch alle zur Verbesserung meines Werkes — *das erste seiner Art* — dessen Lückenhaftigkeit ich mir wohl bewußt war, ihr Scherflein beitragen: daß diesem Wunsche in so reichem Maße entsprochen wurde, habe ich mit Freuden ersehen. Nicht nur hat das letzte Jahrzehnt eine reiche und mannigfache Ernte in wertvollen Arbeiten über spezielle Kurven zu verzeichnen, sondern es sind mir auch aus den verschiedensten Gegenden der Welt, insbesondere aus den Ländern deutscher Zunge, zahlreiche briefliche Mitteilungen geworden. Sei es mir gestattet an dieser Stelle, den Einsendern für die Kundgabe ihrer Ansichten meinen erneuten Dank auszusprechen und den Wunsch zu äußern, daß sie fortfahren mögen, mit Erfolg ein Gebiet der Geometrie zu pflegen, das zu den schönsten und interessantesten gehört, und von dem man sagen kann, daß es unerschöpflich sei.

Genua, im Dezember 1909.

Gino Loria.

Auch mir, dem die Bearbeitung dieser deutschen Ausgabe oblag, sind von verschiedenen Seiten eine Reihe von Abhandlungen und brieflichen Mitteilungen von Verbesserungen und Erweiterungen zugegangen, die fast alle benutzt oder erwähnt werden konnten; den Einsendern sei auch an dieser Stelle nochmals herzlichst gedankt.

Düren, im Dezember 1909.

Fr. Schütte.

Inhalt des ersten Bandes.

IV. Abschnitt.

Spezielle algebraische Kurven von einer bestimmten Ordnung höher als der vierten.

I. Abschnitt.

Ebene und körperliche Örter.

Erstes Kapitel.

Die Gerade.

1. Während, wie wir sehen werden, es möglich ist, anzugeben, wer zuerst den größten Teil derjenigen Linien, die heute zum Erbteile der Geometrie gehören, erdachte, definierte und untersuchte, muß das historische Problem, anzugeben, wer sich zuerst mit der einfachsten von ihnen, der Geraden, beschäftigt hat, als unlöslich bezeichnet werden. Gibt es doch so zahlreiche und auffallende Naturerscheinungen, bei denen diese Linie auftritt (wir erinnern nur an den freien Fall und die Fortpflanzung des Lichtes in einem homogenen Medium), daß, um auch nur ungefähr ihr erstes Auftreten anzugeben, man nicht nur auf einen Zeitlauf von Tausenden von Jahren zurückgreifen, sondern auch auf das Gebiet der Zoologie übergehen müßte, da alle Umstände zu der Ansicht führen, daß auch den intelligenteren Tieren die hervorstechendsten Eigenschaften der geraden Linie nicht entgangen sein können. Weil somit der Uranfang der Geraden wohl ewig verborgen bleiben wird, so müssen wir uns darauf beschränken, das Auftreten dieser Linie in den ältesten noch erhaltenen mathematischen Werken anzugeben.

2. Jeder hat eine mehr oder weniger bestimmte Vorstellung von der geraden Linie, aber eine mathematische Definition dieses Gebildes, die alles anführt, was streng nötig ist, und nichts, was überflüssig, ist ein so schwieriges Problem, daß trotz der Anstrengungen vieler tüchtiger Kräfte eine annehmbare Lösung desselben nach allgemeiner Übereinstimmung noch aussteht. In der Tat dürfte dieses Problem schon dem Pythagoras sich aufgedrängt haben, als er auf die Notwendigkeit, klare Definitionen für die Fundamente eines jeden wissenschaftlichen Systems, das auf diesen Namen Anspruch machen könnte, aufzustellen, aufmerksam machte. Jedoch die Notwendigkeit einer Lösung desselben wird offenkundig geworden sein, als durch Aristoteles die deduktive Logik jene bestimmte Gestalt erhalten hatte, in der sie eine lange Reihe von Jahrhunderten sich erhalten sollte.

Die Definitionen, die mutmaßlich die ersten Bearbeiter der Geometrie angaben — Hippokrates aus Chios, Leon, Teudius von

Magnesia — sind nicht auf uns gekommen, am allerwenigsten mit ihrer Fabrikmarke. Was nun diejenige angeht, die Euklides vorschlägt oder annimmt, so kann diese keineswegs als genügend oder brauchbar bezeichnet werden.[1]) Dieselbe lautet bekanntlich folgendermaßen: „Die gerade Linie ist diejenige, die in gleicher Weise in bezug auf alle ihre Punkte liegt"[2]); nun, wie könnte wohl jemals einer, der noch keine Kenntnis von der geraden Linie hat, sich aus diesen Worten einen Begriff davon machen, und welcher Mathematiker könnte darauf ein festes Gebäude errichten?

Diese Unvollkommenheit hat der berühmte Alexandriner zweifellos bemerkt, indem er die Notwendigkeit erkannte, jene Definition zu ergänzen, dadurch, daß er unter den „allgemeinen Kenntnissen", die im Anfange des ersten Buches der *Elemente* enthalten sind, den Satz aufstellte: „Zwei Geraden können keinen Raum einschließen"; derselbe besagt mit anderen Worten: „Zwischen zwei Punkten gibt es nur eine einzige Gerade." Bekannt und einleuchtend ist die ungemeine Wichtigkeit dieses Zusatzes, der, in geeigneter Weise mit dem dualen Satze kombiniert, gestattet zu den höchsten Gipfeln der projektiven Geometrie zu gelangen.

Nichtsdestoweniger kann die Arbeit des Euklides in diesem Punkte nicht als vollkommen erachtet werden, und es würde von hohem Interesse sein, zu wissen, ob und in welchem Sinne Apollonius von Pergae diese modifiziert hat in der Überarbeitung, der er die von seinem Vorgänger verfaßten *Elemente* im Museum zu Alexandria unterwarf; leider fehlen jedoch hierüber die Angaben. — Einem anderen bedeutenden Geometer des goldenen Zeitalters der griechischen Mathematik glaubt man (dem schlechten Beispiele des Proklus folgend, der zuerst fälschlich den Satz des Archimedes als eine Definition ausgab) eine neue Definition der Geraden zuschreiben zu müssen, nämlich dem Archimedes; aber der Satz: „Die Gerade bezeichnet den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten", der von ihm im ersten seiner berühmten Bücher *Über die Kugel und den Zylinder* ausgesprochen wird, gehört unter die Axiome oder, wenn man will, die Postulate. — Wie könnte man übrigens zugeben, daß einem solch berühmten Geometer es entgangen sein sollte, daß, solange die Entfernung noch nicht unabhängig vom Begriffe der Geraden definiert ist, diese angebliche Definition sich in einem Circulus vitiosus bewegt?

Von anderen Versuchen, die von den Alten gemacht sind, die Gerade zu definieren, sind keine Nachrichten auf uns gekommen. Die Versuche, die zu demselben Zwecke vom Mittelalter an gemacht sind,

---

1) „Haec definitio", bemerkt mit Recht Leibniz, „nullius momenti est, neque uspiam ab Euclide in demonstrando adhibetur, neque satis intellegitur". *Leibnizens mathematische Schriften* herausg. v. Gerhardt, Bd. V (Halle, 1858) S. 185.

2) *Elemente*, Buch I, Definition 4.

zu beschreiben, wäre dasselbe, als wollte man alle die Wandlungen, welche die elementare Geometrie mitgemacht hat, darstellen; dies Thema „würdig der Dichtung und Geschichte“ überschreitet jedoch die dieser Schrift gesteckten Grenzen. Wir beschränken uns somit darauf zu bemerken, wie heute an Stelle des alten Verfahrens, die Gerade mit wenigen Worten zu definieren — was notwendigerweise dem Zwecke nicht genügen kann — man das andere gesetzt hat, jedesmal die Grundeigenschaften anzuführen, die man dem geometrischen Gebilde zuerteilt, das man „gerade Linie“ nennt. Wenn man in dieser Weise vorgeht, kommt man allerdings auf eine sehr große Schwierigkeit, nämlich anzugeben, welches die geringste Zahl von Eigenschaften der Geraden sei, die man notwendig in die Definition einschließen muß, um daraus mit Folgeschlüssen alle übrigen abzuleiten. Es ist dies eine Schwierigkeit, die man noch nicht als endgültig überwunden bezeichnen kann, und diese zu überwinden bemüht man sich tatsächlich, indem man mit Vorliebe die Methoden der mathematischen Logik als die geeignetsten anwendet.

3. Die Gerade bildet nicht nur einen wichtigen Bestandteil der Geometrie der Lage, sondern auch ebensosehr der des Maßes, da man jeglichen Bogen einer Kurve mit einer geradlinigen Strecke zu vergleichen pflegt, und daher ist die Strecke der Kern unseres ganzen Maßsystems für Flächen und Volumina.

Zwei Punkte durch eine Gerade zu verbinden und eine Strecke nach beiden Seiten zu verlängern sind Operationen, die (nach den Vorschlägen des Euklid) dem Geometer zugestanden werden; beide werden praktisch vermittels eines Instrumentes — des Lineals — ausgeführt, und der Inbegriff der Aufgaben, die mittels desselben gelöst werden können, bildet einen besonderen Zweig der Geometrie, der im Anfange des vorigen Jahrhunderts viel kultiviert wurde, besonders in Frankreich, wo er mit dem besonderen Namen *Géométrie de la règle* bezeichnet wurde. Es soll bemerkt werden, daß, wenn in der Ebene ein Kreis gezeichnet vorliegt, man mit alleiniger Hilfe des Lineals alle Aufgaben zweiten Grades lösen kann. Es ist dies eine Bemerkung von Poncelet[1]), welche Steiner meisterhaft entwickelt hat.[2]) Liegt dagegen eine Kurve dritter Ordnung gezeichnet vor, so kann man in ähnlicher Weise alle Probleme dritten und vierten Grades lösen.[3]) Wahrscheinlich trifft Analoges zu für Probleme höherer Grade.

Von der Geraden nimmt außer dem Lineal noch ein anderes sehr

1) *Traité des propriétés projectives des figures* (Paris, 1822) Nr. 351—357.

2) *Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises.* (Berlin, 1833.)

3) F. London, *Die geometrischen Konstruktionen dritter und vierter Ordnung ausgeführt mittels der geraden Linie und einer festen Kurve dritter Ordnung* (Zeitschrift für Math. XLI, 1896).

gebräuchliches Instrument seinen Ursprung: das Winkelscheit. Alle praktisch mit alleiniger Anwendung des Lineals und Winkelscheits ausführbaren Konstruktionen werden neuerdings einem neuen Zweige der Geometrie zugewiesen, welchem G. de Longchamps eine besondere Arbeit widmete: *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* (Paris, 1890), die wir im folgenden gelegentlich mehrmals zitieren werden.[1])

Im Anfange des vorigen Jahrhunderts wuchs die Wichtigkeit der Geraden gewaltig, als man nach Entdeckung des Prinzip der Dualität bemerkte, daß sie imstande sei, als erzeugendes Element aller ebenen Figuren zu fungieren. Was soll man noch sagen von der Wichtigkeit, die sie erhielt, als um das Jahr 1865 Plücker sie als das Element des dreidimensionalen Raumes betrachtete und darauf eine *Neue Geometrie des Raumes* gründete?

Alle Geraden des Raumes — die unendlich ferne Gerade der Ebene mit einbegriffen — sind unter sich identisch, lassen daher, an und für sich betrachtet, keine Einteilung in Kategorien zu. Dennoch trifft man in bestimmten Theorien auf besondere, bemerkenswerte Geraden, denen man einen speziellen Namen gegeben hat. So in der Theorie der Kegelschnitte die Pascalsche, Steinersche, Plückersche Gerade usw., in der modernen Geometrie des Dreiecks die Eulersche, die Simsonsche oder Wallacesche Gerade usw.; bei Unterscheidungen dieser Art wollen wir uns aber nicht aufhalten, weder jetzt noch bei künftiger ähnlicher Gelegenheit.

Zweites Kapitel.

Der Kreis.

4. Nicht weniger schwierig, als den Ursprung des Begriffes der Geraden anzugeben, ist die Beurteilung, wem die Entdeckung des Kreises zukommt, weil mit dem Begriffe der Entfernung sich alsbald derjenige der Gesamtheit der Punkte, die von einem festen Punkte gleichen Abstand haben, aufdrängt. Anderseits verlangt — um eine Tatsache anzuführen, die frei von irgend einer hypothetischen Beigabe ist — die Konstruktion der ältesten vorhandenen Bauwerke durchaus den Gebrauch des Zirkels; ferner bringen diese auf ihren Wänden Figuren gezeichnet, welche die Anwendung dieses Instrumentes und die einfachsten geometrischen Kenntnisse, auf welche sie sich gründet, voraussetzen. — Gehen wir von dieser ziemlich unbestimmten allgemeinen Bemerkung zu bestimmten Nachrichten über, so können wir

1) Ein drittes ähnliches Instrument ist das Lineal mit zwei Parallel-Schienen auf dessen nützliche Anwendung in jüngster Zeit hingewiesen wurde.

anführen, daß in einem berühmten *Mathematischen Handbuch*, das in Ägypten nicht weniger als 17 oder vielleicht 20 Jahrhunderte v. Chr. verfaßt wurde[1]), man schon eine Auflösung des Problems der Quadratur des Kreises liest, die zu einem genügend angenäherten Werte des Verhältnisses π des Umfanges zum Durchmesser führt, nämlich $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}1604 \ldots$ Mit demselben Probleme beschäftigten sich die Griechen, nachdem sie aus ihrer Barbarei kaum sich erhoben hatten; das beweisen die Lösungsversuche, die man dem Hippokrates von Chios, dem Antiphon und Bryson verdankt.

5. Daß man den Kreis im Altertume auch unabhängig von der Frage nach seinem Inhalte betrachtet hat, geht daraus hervor, daß man einem der sieben Weisen Griechenlands — dem Thales — die Entdeckung der Eigenschaft zuschreibt, daß jeder Kreis und seine Peripherie durch jeden beliebigen Durchmesser in zwei gleiche Teile geteilt wird, und dem Pythagoras die Beobachtung, daß der Kreis die vollkommenste Figur der Ebene ist, wie die Kugel unter den räumlichen Gebilden.[2]) Dazu kommt noch, daß in einem von Hippokrates aus Chios herrührenden Abriß der Geometrie, die man für das älteste übrig gebliebene Denkmal griechischer Geometrie ansieht, sich nicht wenige teils ausgesprochene, teils bewiesene Sätze finden, die sich auf den Kreis und seine Teile beziehen. Diese Sätze — einige derselben beziehen sich auf die sogenannten „Möndchen des Hippokrates" — wurden jedenfalls den ersten Bearbeitungen der Geometrie beigefügt und zugleich mit anderen in den *Elementen* des Euklides veröffentlicht; das dritte Buch derselben behandelt ausschließlich den Kreis, das vierte hingegen umfaßt die regelmäßigen ein- und umbeschriebenen Vielecke und ein Teil des zwölften das Verhältnis der Flächen zweier Kreise. Andere Eigenschaften des Kreises und der Geraden wurden von Apollonius von Pergae zusammengefaßt und zwar in einem leider verloren gegangenen Werke *Über die ebenen Örter*; in demselben wird diese Linie (ebenso die Gerade) betrachtet als Ort derjenigen Punkte, die gewissen gemeinsamen Bedingungen genügen; andere ähnliche Sätze findet man bei Durchsicht der bewunderungswürdigen *Mathematischen Sammlung*, die viel später von Pappus von Alexandria geschrieben wurde.

Die angedeutete Zusammenfassung des Kreises mit der Geraden

1) A. Eisenlohr, *Ein mathematisches Handbuch der alten Ägypter (Papyrus Rhind des British Museum)*. Leipzig; 1. Aufl. 1877, 2. Aufl. 1891.

2) Pythagoras bewunderte am Kreise (und an der Kugel) ohne Zweifel die vollendete Regelmäßigkeit der Gestalt; Montucla (*Histoire des mathématiques* Bd. I, 2. Aufl., Paris 1799, S. 113) will dagegen in den Worten, mit denen Diogenes Laertius über die von dem Samischen Philosophen gemachte Beobachtung berichtet, einen ersten Hinweis auf die Theorie der Isoperimeter erkennen.

unter dem Begriffe der „ebenen Örter“[1]) ist nicht der einzige Berührungspunkt, den die Alten zwischen diesen beiden Linien aufstellten. Es ist wohl bekannt, daß Euklides außer den beiden in Nr. 3 bezeichneten ausführbaren Operationen dem Geometer auch einräumte, um einen gegebenen Mittelpunkt mit gegebenem Radius einen Kreis zu beschreiben (*Elemente*, Buch I, Postulat 3). Folglich betrachtet man den Gebrauch des Zirkels ebenso wie den des Lineals als zulässig; auch hielt man die Lösung einer geometrischen Aufgabe nur dann für annehmbar, wenn sie mit Hilfe nur dieser beiden Instrumente ausgeführt werden konnte. Da es ferner in der praktischen Ausführung leicht ist, einen Kreis ganz exakt zu zeichnen, es hingegen sehr schwer ist, eine Gerade genau zu zeichnen, so hat es Geometer gegeben, die es für der Mühe wert gehalten haben, ein System geometrischer Konstruktionen aufzustellen, die nur die alleinige Anwendung des Zirkels erfordern; so entstand „die Geometrie des Zirkels“, die in Lorenzo Mascheroni[2]) einen hervorragenden Bearbeiter gefunden hat.

6. Die Leichtigkeit des Begriffes und der Zeichnung des Kreises ließ die trügerische Hoffnung erstehen, die Länge desselben, sowie die von ihm umschlossene Fläche messen zu können. Auf den sehr alten Ursprung dieser Frage, die sowohl von theoretischem wie von praktischem Interesse ist, haben wir schon vorhin (Nr. 4) hingewiesen. Wir fügen nunmehr hinzu, daß wir die ersten wichtigen Beiträge zur Lösung derselben dem Archimedes verdanken, der nachwies, daß zwischen ihnen eine so enge Beziehung bestehe, daß, wenn eine dieser Größen bekannt ist, es die andere auch ist, und die kindliche Beweisführung des Antiphon und Bryson in eine Methode umwandelte, mit beliebig großer Annäherung den Wert des Verhältnisses irgend eines Kreisumfanges zu seinem Durchmesser zu berechnen. Andere wichtige Beobachtungen über denselben Gegenstand wurden von dem berühmten niederländischen Mathematiker Huygens, und ferner von dem hervorragenden deutschen Geometer Lambert gemacht. Diesen gelang es, die Irrationalität von π nachzuweisen, und dies wiederum veranlaßte Legendre noch tiefer gehende Untersuchungen anzustellen[3]); diese führten ihn zu dem Schlusse, daß auch π^2 irrational ist. Überdies äußerte der letztere Gelehrte die Vermutung: „Il est même propable que le nombre π n'est pas même compris dans les irrationelles algébriques, c'est-a-dire qu'il ne peut pas être la racine d'une équation algébrique d'un nombre fini de

---

1) „Körperliche Örter“ sind hingegen die Kegelschnitte und „Lineare Örter“ alle anderen Linien.

2) *La geometria del compasso.* (Pavia, 1797.)

3) Diese zugleich mit den vorhergehenden der obengenannten Geometer finden sich in dem interessanten Werke von F. Rudio, *Archimedes*, *Huygens, Lambert, Legendre, Vier Abhandlungen über die Kreismessung* (Leipzig, 1892).

termes dont les coëfficients sont rationels". Daß diese Vermutung mit der Wahrheit sich deckt, wurde 1882 von F. Lindemann gezeigt[1]), dem das hohe und unbestreitbare Verdienst zukommt, endlich eine Frage gelöst zu haben, die Ströme von Tinte hat fließen lassen, die zu langen und lebhaften Polemiken Veranlassung geboten und zum Umsturz von Ansichten geführt hat, die man ganz gefestigt glaubte. Der Lindemannsche Satz gestattet ferner auch ohne vorherige Prüfung jegliche Quadratur oder Rektifikation des Kreises, die durch eine algebraische Kurve ausgeführt wird, speziell solche mit Lineal und Zirkel ausgeführte, sogleich als falsch zu beurteilen.

7. Die leichte Definition des Kreises, die in so scharfem Kontraste mit der schwierigen Definition der Geraden steht (vgl. Nr. 2), ließ die Hoffnung entstehen, die Gerade erzeugen zu lassen, indem man vom Kreise ausging. Es ist dies eine geniale Idee, deren Keime sich schon im Anhange eines Briefes finden, den Leibniz am 8. Sept. 1679 an Huygens richtete[2]), die aber viel später von Johann Bolyai entwickelt wurde, der daraus das Fundament jenes geometrischen Systems bildete, welches seinen Namen ruhmbekränzt der fernsten Nachwelt überliefern wird.

Vergeblich wäre der Versuch alle Untersuchungen der reinen und angewandten Mathematik aufzuzählen, in denen der Kreis eine Rolle spielt[3]), oder ein möglichst vollkommenes Verzeichnis der an ihm beobachteten Eigenschaften aufzustellen. Nur eine deskriptive und eine Maßeigenschaft wollen wir hervorheben: erstere besteht darin, daß alle Kreise der Ebene durch die beiden unendlich entfernten imaginären Kreispunkte (oder die zyklischen Punkte) der Ebene gehen; letztere darin, daß die Kreislinie von allen Linien, welche eine gleichgroße Fläche umschließen, die kleinste ist. Wir schließen dieses Kapitel mit der Bemerkung, daß man neuerdings (G. Koenigs, E. Cosserat) die Möglichkeit entdeckt hat, den Kreis als Element des Raumes zu benutzen, und so hat man eine „Geometrie des Kreis-Raumes" aufgestellt, die gewissermaßen ein Analogon ist zu der von Plücker auf die Betrachtung der Geraden gegründeten.

---

1) *Über die Zahl* π (Math. Ann., XX). Vgl. F. Klein, *Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementarmathematik* (Leipzig, 1895).

2) *Leibniz*, herausg. v. Gerhardt, Bd. II (Berlin, 1850) S. 20—25.

3) Poppe, *Ausführliche Geschichte der Anwendung aller krummen Linien in mechanischen Künsten und in der Architektur, seit den ältesten Zeiten bis zu Anfang des 19. Jahrhunderts* (Nürnberg, 1802) S. 1—98 und 130—194.

Drittes Kapitel.

Die Kegelschnitte.

8. Die Entdeckung der Kegelschnitte wird von Proklus dem Menächmus zugeschrieben, einem Schüler des Eudoxus von Knidos und vielleicht Mathematiklehrer Alexanders von Makedonien. Daher rührt die in einem antiken Werke vorkommende Bezeichnung „Triade des Menächmus“, in dem Sinne „ebene Schnitte eines geraden Kreiskegels“. Von der Parabel und Hyperbel kannte Menächmus die Fundamentaleigenschaft, die man in kartesischen Koordinaten durch die Gleichungen ausdrückt

$$y^2 = 2px \quad \text{und} \quad xy = k^2,$$

und wußte diese in geschickter Weise auf zwei verschiedenen und zugleich einfachen und eleganten Wegen zur Lösung des Problems von der Würfelverdoppelung (Delisches Problem) zu benutzen. Es wäre jedoch eine durch nichts gerechtfertigte Kühnheit, zu behaupten, daß Menächmus auch die charakteristischen Eigenschaften der Asymptoten gekannt hätte. Behauptet wird ferner, daß er schon die drei Hauptformen, die ein Kegelschnitt darbieten kann, erhalten habe, indem er einen geraden Kegel mit einer Ebene senkrecht zu einer Erzeugenden schnitt; demnach hat die Kurve keinen, einen oder zwei Punkte im Unendlichen, je nachdem die Öffnung des Kegels kleiner, gleich oder größer als ein rechter Winkel ist. In welcher Weise er jedoch die Zeichnung der Kegelschnitte ausgeführt hat, die doch unumgänglich notwendig war, um die von ihm erdachte Lösung des Delischen Problems wirklich auszuführen[1]), ist eine ungelöste Frage, und auch heute unlösbar, da von den Werken des Menächmus keine Spur erhalten ist.

Dasselbe Los traf die Schriften Aristaeus des Älteren, eines nur ungenügend bekannten Geometers, der fünf Bücher *Über körperliche Örter* und vielleicht ebensoviele *Über die Schnitte des Kegels* schrieb, und dem man die Namen zuschreibt „Schnitte des spitzwinkligen“, „Schnitte des rechtwinkligen“ und „Schnitte des stumpfwinkligen Kegels“, um diejenigen Kurven zu bezeichnen, die wir heute nach Apollonius bezüglich Ellipse, Parabel und Hyperbel nennen. Wenn das Gerücht wahr ist, so würde aus diesen Schriften des Aristäus Euklid bei der Abfassung einer eigenen Bearbeitung der

1) Diese mit Rücksicht auf die zahllosen Anwendungen der Kurve 2. Ordn. praktisch höchst interessante Frage (vgl. Poppe a. O. S. 99—110 und 194—209) hat im Laufe der Zeit viele Lösungen gefunden, die A. von Braunmühl in der lesenswerten Arbeit aufzählt: *Historische Studie über die organische Erzeugung ebener Kurven von den ältesten Zeiten bis zum Ende des 18. Jahrhunderts* (v. Dyck, Katalog mathem. u. math.-physikalischer Modelle; München, 1892).

hier behandelten Kurven in reichlichem Maße geschöpft haben. Sie sind verloren gegangen und waren es auch schon vom 6. Jahrhundert unserer Zeitrechnung an, und es ist sogar zweifelhaft, ob sie zu Zeiten des Pappus noch vorhanden waren; jedenfalls aber bringen uns verschiedene Umstände zu dem Glauben, daß der bedeutende Alexandriner jeden Kegelschnitt für sich betrachtet hat, indem er ihn vermittels jener Eigenschaft charakterisierte, die wir durch die bekannte kartesische Gleichung ausdrücken

$$y^2 = 2px + qx^2;$$

daß er übrigens die Asymptoten derselben kannte und die Anwendung auf das Delische Problem, und daß er zum wenigsten Forschungen über die Ähnlichkeit der Kegelschnitte und ihrer Segmente anzustellen begonnen hat. — Man hat auch geglaubt, dem Archimedes eine methodische Bearbeitung der Kegelschnitte zuschreiben zu müssen und verstieg sich sogar zu der Behauptung, daß Apollonius ihn in so unverschämter Weise ausgeplündert habe, daß er den Beinamen des Plagiators verdiene. Aber wenn auch die tiefen und weitgehenden Kenntnisse des Syrakusaners über die fraglichen Kurven bestätigen, daß er imstande gewesen wäre, eine solche abzufassen, so berechtigt doch nichts zu der Behauptung, daß er sie tatsächlich geschrieben habe.

Dennoch verdankt die Theorie der Kegelschnitte dem Archimedes wenigstens zwei bemerkenswerte Fortschritte: der eine, die von ihm auf zweierlei Art ausgeführte Quadratur eines Parabelsegmentes — das erste Beispiel der exakten Berechnung eines Flächenstückes, das nicht bloß von Geraden oder Kreisbögen begrenzt ist — der andere, die von ihm bemerkte Beziehung zwischen einer Ellipse und dem über ihrer großen Achse als Durchmesser beschriebenen Kreise und die Anwendung derselben auf die Quadratur jener Kurve. Daher kann man sagen, daß es dem Archimedes gelungen ist, all' die Fälle der Quadratur eines Kegelschnittes, die sich algebraisch behandeln lassen, auszuführen, indem die Quadratur der Hyperbel ja Logarithmen verlangt.

9. Alle diese Bearbeiter der Kegelschnitt-Theorie — Archimedes höchstens ausgenommen — gehören der Vorgeschichte dieser Kurven an; die wirkliche Geschichte beginnt mit Apollonius von Pergae, dem wir eine „instauratio ab imis fundamentis" dieser ganzen Disziplin und eine treffliche Darlegung derselben verdanken, die im Laufe der Jahrhunderte zu den Klassikern der exakten Wissenschaft gerechnet wurde, und die noch heute nach zweitausend Jahren Bewunderung einflößt und eingehendes Studium verdient. Nach Einigen würden die Neuerungen, die man dem Geometer von Pergae zuschreibt, darin bestanden haben, daß er die Existenz aller drei Arten von

ebenen Schnitten an jedem geraden Kegel bemerkt habe, aber weil es unzulässig scheint, daß diese Beobachtung in der Tat den älteren Geometern gänzlich entgangen sein sollte, so ist es wahrscheinlicher, daß die von ihm vorgeschlagene Änderung vielmehr aus methodischen Gründen aufgestellt sei, und in der Wahl des Ausgangspunktes von jener allgemeinen Definition eines Kegelschnittes bestanden habe, die zu allen möglichen Gestalten führt. Dies zugegeben, wird es klar, warum er gezwungen wurde, die frühere Nomenklatur des Aristäus aufzugeben (vgl. Nr. 8) und eine neue aufzustellen, die noch heute in Gebrauch ist.

Mit dem Tode des Apollonius beginnt der Verfall der griechischen Mathematik; kein Wunder also, wenn nach ihm die Theorie der Kegelschnitte im Stillstande blieb. Als einzigen Fortschritt kann man eine Stelle der *Mathematischen Sammlung* des Pappus von Alexandrien ansehen, welche die Kegelschnitte als Örter derjenigen Punkte betrachtet, deren Abstände von einem festen Punkte und einer festen Geraden in einem konstanten Verhältnisse stehen. Was nun eine bekannte Arbeit des Serenus (von Antissa oder Antinoupolis) betrifft, in der bewiesen wird, daß die von einer Ebene mit einem Zylinder erzeugten Schnitte elliptische seien, so erwähnen wir diese nur als unzweifelhaftes Anzeichen des tiefen geistigen Niveaus jenes Zeitalters, in welchem sie geschrieben wurde.

10. Auch in der darauf folgenden Zeit, dem Mittelalter, verblieb die Theorie, deren Entwicklung wir verfolgen, fast auf demselben Standpunkte, in welchem Apollonius sie verlassen hatte. Später aber waren es zwei Entdeckungen von hervorragender Bedeutung, die ihr neues Leben einflößen und sie wieder zur Geltung bringen sollten; nämlich die Entdeckung Keplers, daß die von den Gestirnen unseres Planetensystems beschriebenen Bahnlinien nichts anderes sind als Ellipsen, welche die Sonne als Brennpunkt haben; dann die Entdeckung der analytischen Geometrie, die zu dem Schlusse führte, daß in dem kartesischen System alle Kegelschnitte durch Gleichungen zweiten Grades zwischen den Koordinaten ihrer Punkte darstellbar sind. Von da ab wurden nun die Kegelschnitte mehr als „Linien zweiten Grades" betrachtet, denn als „körperliche Örter", ebenso wie die Geraden vorzugsweise als „Linien erster Ordnung" betrachtet wurden.[1])

---

1) C. Dupin (*Dévéloppements de géométrie*, Paris 1813, S. 297) hat die Namen ***le deutérique*** und ***la deutérique*** vorgeschlagen um eine Linie 2[ter] Ordnung und die von ihr begrenzte Fläche zu bezeichnen. Da die Kegelschnitte Kurven 2[ter] Ordnung sind, so nannte G. Bellavitis sie *Dittome,* da sie 2[ter] Klasse sind, *Diattomene*; analog bezeichnete er mit *n-tome* die Kurven von der n^{ten} Ordnung und mit *n-tomene* solche n^{ter} Klasse. Diese Bezeichnungen wurden jedoch nicht angenommen und fielen bald in Vergessenheit. Von Cayley hingegen wurden die Kurven dritter Ordnung *Tertians*, die 4[ter] *Quartians* usw. benannt.

Bekanntlich führte die Erfindung der Koordinaten viele Zeitgenossen und unmittelbaren Nachfolger Descartes und Fermats von Untersuchungen auf dem Gebiete der reinen Geometrie weg, so groß war die hervorragende Anwendbarkeit und wunderbare Macht des neuen Hilfsmittels. Nichtsdestoweniger fehlte es auch in dieser Epoche der Geometrie, im Sinne der Alten betrieben, nicht an tüchtigen Bearbeitern, durch deren Bemühungen sich an die Theorie der Kegelschnitte bemerkenswerte Fortschritte knüpften. Man erinnere sich nur, daß Desargues die fruchtbaren Begriffe der Projektion und Involution einführte und dadurch wichtige neue Sätze aufstellte, daß B. Pascal die berühmte Beziehung entdeckte, die zwischen 6 beliebigen Punkten eines Kegelschnittes besteht und diese zur Grundlage einer neuen methodischen Bearbeitung der Kurven zweiter Ordnung machte[1]); ferner, daß La Hire weitgehende Anwendungen von den Begriffen Pol und Polare machte und insbesondere bei der Betrachtung der Polare eines Brennpunktes zum Begriff der Direktrix gelangte. Ungerecht würde es auch sein, die von Newton entdeckte „organische Erzeugung der Kegelschnitte" zu übergehen, eine mustergültige Frucht derartiger Studien, und die eleganten Konstruktionen, welche dieser große Mathematiker angegeben hat für Kegelschnitte, die fünf Bedingungen unterworfen sind.

Erwähnt werden müssen auch die Namen Mydorge und Boscovich, ebenso die Arbeiten des Grafen Fagnano und Eulers über die Rektifikation der Ellipse, die gehörig fortgesetzt und in bekannter Weise erweitert einen neuen Zweig der Analysis hervorgerufen haben, nämlich die „Theorie der elliptischen Funktionen". Für uns ist besonders wichtig die Bemerkung, daß in den Schriften des großen italienischen Mathematikers[2]) sich schon die in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten durch die Gleichung $x^2 + 2y^2 = a^2$ darstellbare Kurve erwähnt findet; man bezeichnet diese mit den Namen Ellipse des Fagnano oder gleichseitige Ellipse.[3])

---

1) Bekanntlich ist die hierauf bezügliche Arbeit Pascals verloren gegangen, nur der von Leibniz abgeschriebene Abschnitt ist erhalten und wurde neuerdings veröffentlicht von Gerhardt (*Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern,* I. Bd., Berlin 1899, S. 133—140). Daselbst wird zur Bezeichnung eines geschlossenen Kegelschnittes (Ellipse u. Kreis) das Wort *Autobole* benutzt.

2) Vgl. besonders den Aufsatz *Metodo per misurare gli archi di quella ellisse conica, il cui asse maggiore è medio proporzionale tra l'asse minore e il doppio del medesimo asse minore* (Produzioni matematiche, Bd. II; Pesaro 1750).

3) Vgl. F. J. Studnicka, *Über die charakteristischen Eigenschaften der sogenannten gleichseitigen Ellipse* (Prager Ber. 1901). Einer anderen speziellen (nicht reellen) Kurve 2ter Ordnung begegnet man in dem Aufsatze von E. V. Huntigton und J. K. Whittemore, *Some curious properties of conics touching the line infinity at one of the cirular points* (Bull. Amer. Math. Soc., VIII, 1901).

11. Neue Methoden und neue Lehrsätze für die Theorie, deren Entwicklungsstadien wir hier verfolgen, verdanken wir den Geometern aus dem Anfange des 19. Jahrhunderts. Als erster möge Brianchon genannt werden, der seinen Namen mit dem Pascals verknüpfte durch den zum Pascalschen dualen Satze und im Verein mit Poncelet jenen besonderen Kegelschnitt untersuchte, der in bezug auf die Hyperbel gewissermaßen zu dem auf die Ellipse bezogenen Kreise analog ist, nämlich der „gleichseitigen oder rechtwinkligen Hyperbel"[1]). Übrigens betrachtete Poncelet mit Hilfe der von ihm erfundenen Methoden die Kegelschnitte als zum Kreise homologische Kurven und legte die ganze Fruchtbarkeit des so gewonnenen Begriffes klar.

Kurz darauf brachten J. Steiner in Deutschland und M. Chasles in Frankreich den alten Begriff des Doppelverhältnisses wieder zur Anwendung und zeigten so die Möglichkeit, die Kurven zweiter Ordnung aufzufassen als Erzeugnisse von Grundgebilden erster Stufe in projektivischer Beziehung. K. v. Staudt ferner zeigte nicht nur, wie man jene Definition von jeglicher metrischen Zutat befreien könne, sondern auch, wie man in gleicher Weise die reellen und imaginären Kegelschnitte definieren könne, indem man beide Arten betrachtet als Ordnungs-Kurven ebener Polaritäten.

In der Folgezeit wandten die Analytiker auf die „Triade des Menächmus" alle die Koordinatenmethoden an, die nach und nach erfunden wurden, insbesondere die charakteristischen Fortschritte der „natürlichen" Geometrie (Anwendung der natürlichen Koordinaten, d. h. Bogenlänge, Winkel der Tangente mit der Abszissenachse, Krümmungsradien[2])). Überdies wurde eine Beziehung bemerkt zwischen der Geometrie der Geraden im Raume und der Totalität der Kegelschnitte einer Ebene, die einer gewissen Bedingung genügen[3]). Schließlich wurden die Grundlagen einer Geometrie des Raumes gelegt, die den Kegelschnitt als eigentliches Grundelement benutzt.

Das sind vielleicht alle neuen Ausblicke, welche die moderne Geometrie der Theorie der Kegelschnitte eröffnet hat. Aber wie könnten

---

1) Es ist die Kurve, die O. Terquem seinen Landsleuten kurz *Hypercle* zu benennen vorschlug (Nouv. Ann. Mathém., X, 1851, S. 127).

2) G. Pirondini, *Sur la conique osculatrice des lignes planes* (Jornal von Teixeira, XI, 1892, S. 9—41); E. Cesàro, *Vorlesungen über natürliche Geometrie, deutsch von* G. Kowalewski (Leipzig, 1901) S. 20 ff.; G. Scheffers, *Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume* (Leipzig, 1901) S. 53—54. Der Leser, der genauere Angaben über den Ursprung, die Entwicklungsstadien und den sonstigen Stand dieser Theorie wünscht, findet diese in einem Aufsatze von E. Wölffing: *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den natürlichen Koordinaten* (Bibliotheca Mathematica, III. Folge, I. (Leipzig, 1900), S. 142—159.

3) S. einen Brief von L. Cremona an E. Beltrami in Bd. X des Giornale von Battaglini (1872), S. 47—48.

wir uns einbilden, auch nur eine Idee aller der besonderen Eigenschaften anzugeben — unter denen sich sogar die „sozial properties“ finden[1]) — die an diesen berühmten Kurven sich ergeben haben. Eine einfache Sammlung der ausgesprochenen Sätze, die sich darauf beziehen, würde einen gewichtigen Band füllen[2]). Wir müssen es demnach vermeiden, eine Arbeit zu übernehmen, die, wenn auch hochinteressant, dennoch die vorliegende Schrift von der ihr zugewiesenen Route abbringen würde und das, nachdem sie kaum die Anker gelichtet hat. Überdies sind die analytischen sowohl, als auch die synthetischen Lehrbücher über die Theorie, der dieses Kapitel gewidmet ist, so zahlreich und so wertvoll, daß es ziemlich leicht ist, sich einen Begriff zu machen von der Höhe, auf welche zwanzig Jahrhunderte fast ununterbrochener Arbeit eine der umfangreichsten und schönsten Disziplinen, welche die Geometrie aufweist, gebracht haben.

---

1) S. die merkwürdige Schrift: *The romance of mathematics,* besprochen in *Nature,* May 8, 1888.

2) Vgl. den inhaltreichen Artikel von F. Dingeldey, *Kegelschnitte und Kegelschnitt-Systeme* in der Encykl. der math. Wiss. Bezügl. der praktischen Anwendungen siehe Poppe a. O. S. 99—110 und 194—209.

II. Abschnitt.

Kurven dritter Ordnung.

Erstes Kapitel.

Klassifikation.

12. Während man daran war, die Theorie der Kegelschnitte zu entwickeln, sammelte sich auch, sozusagen unbewußt, das Material für die Lehre von den Kurven höherer Ordnung an. Unter diesem nehmen die alten Untersuchungen über einige Kurven dritter und vierter Ordnung, die wir in diesem und im folgenden Abschnitte behandeln werden, einen hervorragenden Platz ein. Jedoch die allgemeine Theorie der Kurven einer bestimmten Ordnung, insbesondere die der Kurven dritter Ordnung, konnte nicht entstehen, und entstand auch nicht eher, als nachdem man zu den Begriffen „Ordnung einer Kurve" und „allgemeine Kurve ihrer Ordnung" gelangt war, das ist nach der Erfindung der kartesischen Methode, nach welcher diese Begriffe naturgemäß sich ergeben. Es entspricht dieser Umstand der Tatsache, daß seit dem Geburtsjahre der analytischen Geometrie (1637)[1], weniger als 30 Jahre verflossen waren, als Newton[2]), indem er eine Klassifikation der ebenen Kurven dritter Ordnung ausführte, den Grund für ein methodisches Studium dieser Kurven legte. Dieses Studium wurde von da an mächtig fortgesetzt und hat inzwischen so viele und bedeutende Resultate gezeitigt, daß die genannten Kurven zu denjenigen geometrischen Gebilden gezählt werden, deren Kenntnis beinahe eine vollständige ist.[3]) Als Grundsteine ihrer Theorie kann man ansehen: 1. Die verschiedenen Methoden, sie geometrisch zu konstruieren, unter denen die von H. Graßmann einen hervorragenden Platz verdienen.[4]) 2. Die Sätze, die sich auf die Konfiguration ihrer

---

1) Im J. 1637 wurde nämlich die *Géométrie* von Descartes veröffentlicht.

2) Vgl. die wertvolle Abhandlung von W. W. Rouse Ball, *On Newton classification of cubic curves* (Proc. London Math. Soc., XXII, 1891), auf welche wir mehrmals im Verlaufe dieses Abschnitts zurückkommen werden.

3) Man sehe auch übrigens die Lehrbücher von Plücker, Salmon, Cremona und Clebsch-Lindemann über ebene Kurven im allgemeinen und die beiden Spezialarbeiten: Durège, *Die ebenen Kurven dritter Ordnung* (Leipzig, 1871) und Schroeter, *Die Theorie der ebenen Kurven dritter Ordnung* (Leipzig, 1888).

4) Vgl. J. Kühnert, *Die Graßmannsche Erzeugungsweise von ebenen Kurven dritter Ordnung* (Diss. Tübingen, 1886); H. Fritz, *Über die erste Graßmann-*

Wendepunkte beziehen.[1]) 3. Den Salmonschen Satz[2]), der aussagt, **daß das Doppelverhältnis der vier Tangenten, die man von einem beliebigen Punkte der Kurve (die keinen singulären Punkt besitzt) an dieselbe ziehen kann, konstant ist**; der Wert dieses Doppelverhältnisses ist eine Größe, die durch projektive Transformationen der Kurve nicht verändert wird, und ist auch die einzige absolute Invariante, welche die Kurve besitzt.[3])

13. Von den Sätzen aus der zweiten der oben angeführten Gruppen richten wir unser Augenmerk zunächst auf den, der besagt, **daß eine reelle Kurve**[4]) **dritter Ordnung wenigstens einen reellen Wendepunkt besitzt.** Infolgedessen können wir diesen reellen Wendepunkt zur Ecke A_3 des Fundamentaldreiecks eines homogenen Koordinatensystems (x_1, x_2, x_3) nehmen, auf welches wir die reelle Kurve dritter Ordnung Γ beziehen, und die entsprechende Tangente als eine der durch A_3 gehenden Seiten, a_2 des genannten Dreiecks. Die Gleichung der Kurve erhält dann folgende Gestalt:

$$x_1^3 = x_2[a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2] \quad (\text{wo } a_{ik} = a_{ki})$$

oder:

$$a_{33}x_1^3 = x_1[(a_{11}a_{33} - a_{13}^2)x_1^2 + (a_{22}a_{33} - a_{23}^2)x_2^2 + (a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3)^2 + 2(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23})x_1x_2].$$

Machen wir dann eine Koordinatenverschiebung, die durch die Formel

$$x'_3 = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3$$

bestimmt wird, so kann man schreiben

$$x_2 x_3'^2 = a_{33}x_1^3 + (a_{13}^2 - a_{11}a_{33})x_1^2x_2 + (a_{23}^2 - a_{22}a_{33})x_2^3 + 2(a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33})x_1x_2^2.$$

Wenn wir nun der Einfachheit halber die Bezeichnungen ändern, so sehen wir schließlich, daß, wenn wir das System, worauf sie be-

---

sche Erzeugungsweise von ebenen Kurven dritter Ordnung und deren Analogon im Raume (Progr. Darmstadt, 1889); K. Schmidt, *Untersuchungen über Kurven dritter Ordnung im Anschlusse an eine Graßmannsche Erzeugungsweise* (Diss. Gießen, 1908).

1) Vgl. H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*. II. Bd. (II. Aufl., Braunschweig 1899), S. 390ff.

2) *Théorèmes sur les courbes du troisième degré* (Crelles Journ. XLII, 1851).

3) Es möge auch bemerkt werden, daß die Grundlagen einer systematischen Behandlung der Metrik der Kurven dritter Ordnung in der Abhandlung von J. Thomae, *Über orthogonale Invarianten der Kurven dritter Ordnung* (Leipziger Ber., 51, 1899, S. 317—353) sich finden.

4) Wir bezeichnen im allgemeinen eine Kurve als reell, wenn sie durch eine Gleichung mit reellen Koeffizienten dargestellt wird, obwohl sie dann auch nur eine endliche Zahl (Null einbegriffen) reeller Punkte enthalten kann.

zogen wird, passend wählen, die Gleichung jeder reellen Kurve dritter Ordnung sich auf folgende Form bringen läßt:

$$x_2 x_3^2 = a_0 x_1^3 + 3a_1 x_1^2 x_2 + 3a_2 x_1 x_2^2 + a_3 x_2^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wird nun die Seite $x_2 = 0$ des Fundamentaldreiecks ins Unendliche projiziert, so daß man $x_1 = x$, $x_2 = 1$, $x_3 = y$ setzen kann, so geht Gleichung (1) über in

$$y^2 = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 + 3a_2 x + a_3, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

welche Gleichung in kartesischen Koordinaten eine Kurve darstellt, die man divergente Parabel genannt hat. Projiziert man hingegen die Seite $x_3 = 0$ ins Unendliche und setzt daher $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = 1$, so erhält man die folgende kartesische Gleichung

$$y = a_0 x^3 + 3a_1 x^2 y + 3a_2 x y^2 + a_3 y^3 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Wir werden im folgenden auf die Gleichungen (2) und (3) zurückkommen, wollen indessen bemerken, daß Gleichung (1) noch weiterer Umformungen fähig ist. Wählen wir nun in der Tat die Ecke A_2 in geeigneter Weise, so läßt sich (1) zurückführen auf folgende Gleichung

$$x_2 x_3^2 - x_1 (x_2 - x_1)(k^2 x_2 - x_1) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die vom Punkte A_3 an die Kurve gezogenen Tangenten haben die Gleichungen:

$$x_2 = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 - x_1 = 0, \quad k^2 x_2 - x_1 = 0,$$

und daher ist ihr Doppelverhältnis k^2; dieses ist also die absolute Invariante der Kurve. Bezeichnen wir nun mit ϱ einen Proportionalitätsfaktor und mit λ einen Parameter, so wird der Gleichung (4) genügt, indem man setzt

$$\varrho x_1 = \lambda, \quad \varrho x_2 = \lambda^3, \quad \text{durch } \varrho x_3 = \sqrt{(1-\lambda^2)(1-k^2\lambda^2)}.$$

Setzt man aber $\lambda = sn\,u$, unter der Annahme, daß k der Modulus dieser elliptischen Funktion sei, so hat man weiter

$$\varrho x_1 = sn u, \quad \varrho x_2 = sn^3 u, \quad \varrho x_3 = cn u \cdot dn u \quad . \quad . \quad (5)$$

Diese Gleichungen liefern eine parametrische Darstellung einer Kurve dritter Ordnung vermittels der (Jacobischen) elliptischen Funktionen[1]), die entsprechende Bedingung der Kollinearität[2]) dreier Punkte lautet:

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0.$$

Auf eine analoge Darstellung durch die Weierstraßschen elliptischen Funktionen trifft man, wenn man die Gleichung (2) benutzt.

1) A. Harnack, *Über die Verwertung der elliptischen Funktionen für die Geometrie der Kurven dritten Grades* (Math. Annalen, IX, 1876, S. 1—51).

2) „Kollinearität" bedeutet hier und in ähnlichen Fällen das Liegen auf derselben Geraden.

Durch eine einfache Verlegung des Koordinatenanfangs verwandelt diese sich in folgende andere:

$$y^2 = a_0 x^3 + 3 a_2 x + a_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Betrachten wir nun mit Weierstraß eine Funktion $\wp$, die mit ihrer Abgeleiteten $\wp'$ durch die Beziehung verbunden ist:

$$\wp'^2 z = 4 \wp^3 z + \frac{3 a_2}{\sqrt[3]{\frac{a_0}{4}}} \wp z + a_3,$$

und setzt man

$$x = \sqrt[3]{\frac{4}{a_0}} \cdot \wp z, \quad y = \wp' z, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

so wird der Gleichung (6) identisch genügt, und somit können die Gleichungen (7) zur parametrischen Darstellung der Kurve (6) dienen. Unterwirft man die letztere einer beliebigen projektivischen Transformation, so ergibt sich, daß jede ebene Kurve dritter Ordnung mittels Gleichungen folgender Form dargestellt werden kann

$$\varrho x_i = a_i \wp z + b_i \wp' z + c_i \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (i = 1, 2, 3) \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Die Bedingung der Kollinearität dreier Punkte ist auch in diesem Falle

$$z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0$$ [1].

14. Die Gleichungen (2) und (3) im vorhergehenden liefern auch die Antwort auf folgende sehr wichtige Fragen: Trifft es auch für die Kurven dritter Ordnung zu, wie für die zweiter Ordnung, daß alle aus einer einzigen durch Projektion abgeleitet werden können?, und im verneinenden Falle, welches sind die Fundamentaltypen, aus welchen man durch Projektion die Formen aller übrigen erhalten kann? Zur Beantwortung nehmen wir wieder die Gleichung (2) und schreiben sie, wie folgt:

$$y^2 = a_0 (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

wobei wir a_0 immer positiv nehmen und im übrigen die Bezeichnungen so wählen, daß, wenn a_1, a_2, a_3 reell sind, $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$. Dann ist klar, daß Gleichung (2′) ihrer Natur gemäß und infolge der Größe der a_1, a_2, a_3 nur folgende fünf Fälle darbieten kann:

I. a_1, a_2, a_3 sind reell und verschieden. Dann gibt es auf der x-Achse die Punkte A_1, A_2, A_3, die als Abszissen die Werte a_1, a_2, a_3 haben; man sieht, daß, um reelle Punkte der Kurve zu bekommen, die Voraussetzung nötig ist: $a_1 \leqq x \leqq a_2$, oder auch $x \geqq a_3$; es ist leicht daraus abzuleiten, daß die Kurve aus einem Ovale besteht, das durch die Punkte A_1 und A_2 geht, und einem unbegrenzten Zweige,

---

1) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, Bd. II, (Paris, 1883) Kap. XI.

der durch A_3 geht; sie wurde von Newton Parabola campaniformis cum ovali genannt[1]), von Cayley Complex.[2]).

II. a_1 ist reell, a_2 und a_3 konjugiert imaginär. Schreiben wir Gleichung (2′) für diesen Fall folgendermaßen

$$y^2 = a_0 (x - a_1) [(x - p)^2 + q^2],$$

so sehen wir, daß wir reelle Punkte der Kurve nur dann erhalten, wenn $x \geqq a_1$; daraus kann man die Folgerung ziehen, daß die Kurve nur aus einem einzigen unbegrenzten Zweige besteht; es ist die Parabola pura Newtons[3]), die Simplex Cayleys. — Diese Kurve ist ebenso wie die vorige ohne singuläre Punkte. I und II sind auch die typischen Fundamentalformen aller ebenen Kurven dritter Ordnung mit nicht verschwindender Diskriminante. Ist eine Kurve durch ihre Gleichung in kartesischen oder homogenen Koordinaten gegeben, so genügt es, um zu erkennen, ob sie von der Form I oder II ist, ihre Diskriminante zu berechnen; ergibt sich diese als positiv, so ist die Kurve eine Complex, ist sie negativ, so ist sie eine Simplex.[4])

Für die Kurven I und II ist auch in vielen Fällen die Anwendung folgender kanonischer Form der Gleichung sehr nützlich:

$$x_1{}^3 + x_2{}^3 + x_3{}^3 + 6kx_1x_2x_3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

die man erhält, wenn man als Fundamentaldreieck dasjenige der Wendepunktsdreiecke nimmt, welches reell ist; sie wurde die Grundlage einer neuen und bequemen Parameterdarstellung, welche H. Sievert ausführlich untersuchte.[5])

III. $a_1 = a_2$ und a_3 reell. Die Gleichung (2′) wird in diesem Falle

$$y^2 = a_0 (x - a_1)^2 (x - a_3)$$

und zeigt, daß der Punkt $(a_2, 0)$ ein isolierter Punkt der Kurve ist;

---

1) *Enumeratio linearum tertii ordinis* (Londini, 1706), neugedruckt im I. Bd. von *J. Neutonii opuscula mathematica philosophica et philologica* (Lausannae et Genevae, MDCCXLIV).

2) S. die Schriften *On the inflexions of the cubical divergent parabolas* (Quart. Journ. Math. VI, 1864); *On the classification of cubic curves* (Cambridge Trans. XI. Part I, 1866) und *On the cubical divergent parabolas* (Quart. Journ. Math. IX, 1868), neugedruckt in Bd. V u. VI von *The collected papers of A. Cayley* (Cambridge, 1892—93).

3) Murdoch (*Neutonii genesis curvarum per umbras.* Londini, 1746) unterschied drei Arten der reinen Parabel, die er *ampullata*, *campaniformis* und *neutralis* nannte.

4) Diese wichtige Bemerkung, welche die Gestalt einer Kurve dritter Ordnung mit dem Zeichen ihrer Diskriminante verknüpft, rührt von L. Cremona her (s. die *Considerazioni sulle curve piane del terz' ordine*, Giorn. di Mat. II, 1864).

5) *Die Parameterdarstellung der Kurven dritter Ordnung durch Thetafunktionen* (Progr. Bayreuth, 1905/6).

sie enthält ferner unzählig viele reelle Punkte, die den Werten $x \geqq a_3$ entsprechen. Von Newton wurde diese Parabola punctata von Cayley Acnodal genannt.

IV. **a_1 reell und $a_2 = a_3$.** Aus der Gleichung

$$y^2 = a_0 (x - a_1)(x - a_2)^2$$

geht hervor, daß $(a_2, 0)$ ein Doppelpunkt der Kurve ist, von der man alle reellen Punkte erhält durch $x \geqq a$. Es ist die Parabola nodata Newtons, die Crunodal Cayleys.

V. Wenn schließlich **die drei Werte a_1, a_2, a_3 unter sich gleich und reell sind,** so kann man Gleichung (2′) schreiben

$$y^2 = a_0 (x - a)^3;$$

die entsprechende Kurve hat eine Spitze, und ist daher von Newton Parabola cuspidata, von Cayley Cuspidal genannt worden.

Aus der oben in kurzen Zügen gegebenen Diskussion ergibt sich der berühmte, von seinem Entdecker, Newton „genesis curvarum per umbras" betitelte Satz, der die zu Anfang dieser Nr. gestellten Fragen beantwortet, und folgendermaßen lautet: **Jede ebene Kurve dritter Ordnung kann in eine der fünf divergenten Parabeln projiziert werden.**[1])

Ein Gegenstück zu diesem Satze bildet ein anderer nicht wenig bemerkenswerter, den wir Chasles verdanken.[2]) Um diesen aufzustellen, benutzen wir die Gleichung (3) und bemerken, daß sie eine Kurve darstellt, die den Koordinatenanfang als Mittelpunkt hat, da sie sich nicht ändert, wenn man die Vorzeichen beider Koordinaten umkehrt. Schreiben wir sie nun in der Form

$$y = a_0 (x - \alpha_1 y)(x - \alpha_2 y)(x - \alpha_3 y) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

so sieht man, daß sie eine durchaus analoge Diskussion zuläßt, wie diejenige, die wir bei (2′) gemacht haben, daher werden die entsprechenden Kurven sich ebenfalls in fünf verschiedene Kategorien einteilen lassen. Somit ergibt sich hieraus der folgende Satz von Chasles: **Jede ebene Kurve dritter Ordnung kann in eine der fünf mit Zentrum versehenen Kurven dritter Ordnung projiziert werden.**[3])

---

1) Dieser Satz bildet die Grundlage der eingehenden Untersuchungen von J. Kölmel: *Über die Ableitung der verschiedenen Formen der Kurven dritter Ordnung durch Projektion und Klassifikation derselben* (Progr. Ettenheim 1892, Mosbach 1895, Baden-Baden 1904). Über dasselbe Thema s. auch die schöne Abhandlung von H. Wiener, *Die Einteilung der ebenen Kurven und Kegel dritter Ordnung in 13 Gattungen* (Halle a. S. 1901) und Emch, *Newtons five types of plane cubics obtained by Steinerian transformation* (Colorado Studies, I, 1904).

2) S. Note XX des *Aperçu historique* (Bruxelles, 1837).

3) Diese speziellen Kurven wurden von J. Gomes Teixeira *Chaslessche*

15. Bei der Einteilung aller ebenen Kurven dritter Ordnung in fünf Kategorien blieb Newton nicht stehen; indem er auch die Art und Weise betrachtete, wie sie sich im Unendlichen verhalten, wies er die Existenz von 72 Arten nach, zu denen noch 6 andere hinzugefügt wurden. Für deren Benennung wandte er eine Nomenklatur an, deren Wesen aus folgenden seinen Worten hervorgeht: „Enumerando curvas horum casuum hyperbolam vocamus Inscriptam, quae tota jacet in assymptotôn angulo ad instar hyperbolae conicae; Circumscriptam, quae asymptotos secat et partes abscissas in sinu suo amplectitur; Ambigenam, quae uno crure infinito inscribitur et altero circumscribitur; Convergentem, cujus crura concavitate sua se invicem respiciunt et in plagam eandem diriguntur; Divergentem cujus crura convexitate sua se invicem respiciunt et in plagas contrarias diriguntur; Cruris contrariis praeditam, cujus crura in partes contrarias convexa sunt, et in plagas contrarias infinita; Conchoidalem quae vertice concava et cruris divergentibus ad asymptoton applicatur; Anguineam, quae flexibus contrariis asymptoton secat, et utrimque in crura contraria producitur; Cruciformem, quae conjugatam decussat; Nodatam, quae se ipsa decussat in orbem redeundo; Cuspidatam, cujus partes duae in angulo contactus concurrunt et ibi terminantur; Punctatam quae conjugatam habet infinite parvam, id est punctum; et Puram, quae per impossibilitatem duarum radicum, ovali, nodo, cuspide et puncto conjugato privatur. Eodem sensu parabolam quoque convergentem, divergentem, cruris contrariis praeditam, cruciformem, nodatam, cuspidatam, punctatam et puram nominabimus." — Außerdem nannte Newton den Hyperbolismus einer Kurve diejenige Kurve, die man aus der Gleichung in kartesischen Koordinaten erhält durch die Transformation $x' = x$, $y' = m\frac{y}{x}$[1]. Die Bezeichnung der übrigen von ihm angewendeten Namen ergibt sich aus der folgenden Tabelle, die seine Klassifikation zusammenfaßt. Zu dieser Klassifikation gelangte der große Geometer indem er durch geeignete Transformation der Koordinaten die kartesische Gleichung aller Kurven dritter Ordnung auf vier kanonische Formen zurückführte, die auch in der folgenden Tabelle angeführt sind; in der letzten Spalte ist die Zahl der Spezies jeder Gattung angegeben, wobei die Zahl derjenigen Spezies, die von späteren Kommentatoren hinzugefügt wurden, besonders angeführt ist.

Kubiken genannt; m. s. *Tratado de las curvas especiales notables* (Madrid, 1905) S. 92, oder *Obras sobre mathematicas*, IV (Coimbra, 1908) S. 143.

1) Vgl. den Aufsatz von F. Gomes Teixeira, *Sobre os hyperbolismos das conicas* (Porto Annaes II, 1907). Es sei noch bemerkt, daß die Bezeichnung *zentraler Hyperbolismus* von Cayley eingeführt wurde, um den Hyperbolismus eines Kegelschnittes mit Zentrum zu bezeichnen.

I. $xy^2 + ey = ax^3 + bx^2 + cx + d$	$a > 0$ Hyperbolae redundantes oder Hyperbolicae		adiametrales		9	Species
			monodiametrales		12 + 2	„
			tridiametrales		2 + 2	„
			asymptotibus concurrentibus		9	„
	$a < 0$ Hyperbolae deficientes oder Ellipsicae		adiametrales		6	„
			monodiametrales		7	„
	$a = 0$	$b \gtrless 0$ Hyperbolae parabolicae	adiametrales		7	„
			monodiametrales		4 + 2	„
		$b = 0$ Hyperbolismi conicae	hyperbolismi centrales	$c > 0$, hyp. hyperbolae	4	„
				$c < 0$, „ ellipsae	3	„
				$c = 0$, „ parabolae	2	„
II. $xy = ax^3 + bx^2 + cx + d$.	Tridens[1])				1	„
III. $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$.	Parabola divergens (vgl. oben)				5	„
IV. $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.	Parabola cubica von Wallis[2])				1	„

16. Die Newtonsche Klassifikation erlitt im Laufe der Zeit Umwandlungen und erfuhr Verbesserungen, jedoch die angewendete Nomenklatur wurde beibehalten, weil man, auch als man ihre Mängel bemerkt hatte, es für unnötig erachtete die Namen zu verändern, da die Gelegenheit, sich ihrer zu bedienen so selten ist. Es sind jedoch jetzt ca. vierzig Jahre her, als ein Landsmann Newtons, F. W. Newman, es für ratsam hielt, einen vollständigen Wandel zu schaffen, indem er Namen einführte, die er der Botanik, der Architektur oder dem gewöhnlichen Leben entlehnte.[3]) Seine Vorschläge wurden jedoch mit Gleichgültigkeit aufgenommen und fielen alsbald der Vergessenheit anheim. Wenn wir sie hier aus dem Grabe, in dem sie ruhen, wieder hervorrufen, so tun wir dies nicht, um ihnen wieder neues Leben einzuflößen, sondern gezwungen von der Herr-

---

1) Vgl. F. Gomes Teixeira, *Tratado* S. 63, *Obras* IV, S. 103.

2) F. Sibiriani, *Alcune proprietà metriche della cubica del Wallis* (Period. matem., XXI, 1906).

3) S. den Aufsatz: *On curves of the third degree, here called „tertians“*. (Brit. Ass. Rep., Exeter 1869).

schaft des hier zu behandelnden Stoffes. Wir begnügen uns daher auch, bloß die Namen und die zugehörige Gleichung anzuführen.

Nr.	Gleichung	Bedingung	Name
1.	$ay^3 = x^2$.		The Whip-Snake. Peitschenschnur.
2.	$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$.		The Calyx. Kelch.
3.	$ay^2 = x^3 + cx + d$	$c = d = 0$.	The Lily. Lilie.
4.		$c > 0, d > 0$.	The Tulip. Tulpe.
5.		$c = 0, d > 0$.	The Hyacinth. Hyazinthe.
6.		$c = 0, d < 0$.	The Convolvulus. Winde.
7.	$ay^2 = x^3 - 3b^2x + 2c^3$	$c > 0, c > b$,	The Pink. Nelke.
8.		$c = b$.	Fuchsia, or Fucia or knotted Calyx. Fuchsia od. Knotenkelch.
9.		$c = -b$.	Anti-Fucia or studded Calyx. Umgekehrte Fuchsie od. Nagelkelch.
10.		$c < b$.	Bulbus. Zwiebel.
11.	$xy^2 = a^3$.		The Palmstems. Palmenstamm.
12.	$xy^2 = 3b^2(a - x)$.		The Archer's Bow. Schützenbogen.
13.	$x(y^2 + b^2) = aby$.		The twisted Bow. Geschweifter Bogen.
14.	$x(y^2 - b^2) = aby$.		The Pilaster. Pilaster.
15.	$x(y^2 - b^2) = ab^2$.		The Archway or Tunnel. Schwibbogen od. Tunnel.
16.	$xy^2 = mx^2 + nx + p, m > 0$.		The Vas. Vase.
17.	$xy^2 = m[(x + b)^2 + c^2]$	$b > 0$, $c \neq 0$.	The Urn. Urne.
18.		$b > 0$, $c = 0$.	The studdet Goblet. Nagelbecher.
19.		$b < 0$, $c \neq 0$.	The Goblet. Becher.
20.		$b < 0$, $c = 0$.	The knotted Goblet. Knotenbecher.
21.	$\mu^2 xy^2 = (a - x)^3$.		The Pyramid. Pyramide.
22.	$\mu^2 xy^2 = (a - x)(b - x)^2$	$a > b$.	The Festoon or Cirrus. Guirlande od. Ranke.
23.		$a < b$.	The overstudded Hillock. Hügel mit Nagel oben.

24.	$\mu^2 x y^2 = (a-x)(b+x)^2$		The understudded Hillock. Hügel mit Nagel unten.
25.		$a > 8b$.	The Capito (great Head). Dickkopf.
26.		$a = 8b$.	The Cassis (Helmet). Helm.
27.	$\mu^2 x y^2 = -x^3 + 3bx^2 + 3cx + d$	$d > b^3$.	The Tumulus or Mons. Grabhügel od. Berg.
28.		$d = b^3$.	The Tombstone or Cippus. Grabstein od. Säulenstumpf.
29.		$d < b^3$.	The Sphinx. Sphinx.
30.	$\mu^2 x y^2 = (m-x)(n-x)(p-x)$.		Mountain and Moon. Berg und Mond.
31.	$\mu^2 x y^2 = (m-x)(n+x)(p+x)$	$d > b^3$.	Mountain and Tarn. Berg und See.
32.		$d = b^3$.	Bell and Clapper. Glocke und Klöppel.
33.		$d < b^3$.	Clock and Pendulum. Uhr und Pendel.
34.	$\varrho^2 = a^2 \operatorname{tg} \omega \pm b^2$.		The Cornutus. Gehörnte Kurve.
35.	$\varrho^2 \cos 2\omega = a^2 \operatorname{tg} \omega \pm b^2$.		The Butterfly. Schmetterling.
36.	$\mu^2 x y^2 = x(x-a)^2 + b$	$a \neq 0$.	The Trijuga or Triga. Dreigespann.
37.		$a = 0$.	The starry Triga. Gestirntes Dreigespann.
38.	$\mu^2 x y^2 = (x-n)^3$.		The Crane. Kran.
39.	$\mu^2 x y^2 = (x-m)^2(x-n)$.		Crane and Sack. Kran mit Sack.
40.	$\mu^2 x y^2 = (x-m)(x-n)(x-p)$.		Swing and Chair. Schaukel und Stuhl.
41.	$\mu^2 x y^2 = (x-m)(x+n)(x+p)$.		The Trophy. Trophäe.
42.	$\mu^2 x y^2 = (x-m)(x+n)^2$.		The knotted Flower-pot. Blumentopf mit Knoten.

Unter den soeben aufgezählten Kurven befinden sich einige, die einer unbestimmten algebraischen Quadratur unterworfen werden können; einige von diesen sind jene, welche die Nummern 22—26, 39 und 42 haben und im allgemeinen alle diejenigen, die sich durch eine Gleichung von folgendem Typus darstellen lassen:

$$y = \frac{ax}{3m}\sqrt{\frac{x+3m}{x-m}};$$

solche Kurven sind von M. Marie — der sie zuerst betrachtet hat — Trèfles genannt.[1])

17. Überlassen wir es dem Leser, über die Vorteile und Güte der Newmanschen Nomenklatur sich ein Urteil zu bilden, und bemerken, daß alle Kurven dritter Ordnung, mit denen wir uns hier zunächst beschäftigen werden, mit Doppelpunkten versehen sind, oder durch die zyklischen Punkte (vgl. Nr. 7) hindurchgehen, oder auch sich dieser beiden Besonderheiten erfreuen; wir halten es daher für angemessen, in den beiden folgenden Kapiteln die hervorragenderen Eigenschaften der rationalen und der zirkularen Kurven dritter Ordnung auseinanderzusetzen.[2])

Zuvor wollen wir jedoch noch drei besondere Kurven dritter Ordnung erwähnen, welche weder der einen, noch der andern der soeben erwähnten Kategorien angehören:

Die erste gehört zur Klasse der physikalisch-mathematischen Kurven, indem sie folgendes mechanisches Problem löst: „Gegeben auf einer horizontalen Geraden zwei Punkte A und B; eine Kurve Γ zu finden, derart, daß, wenn P ein beliebiger Punkt derselben ist, die Zeit des Herabgleitens und Aufsteigens eines schweren Punktes auf den beiden Geraden AP und PB konstant ist.“ Nimmt man als Achsen die Gerade AB und die, welche die Strecke $AB = 2a$ senkrecht halbiert, so findet man bald als Gleichung der Kurve folgende

$$\sqrt{\frac{x^2+(a-y)^2}{gx}} + \sqrt{\frac{x^2+(a+y)^2}{gx}} = Konst.$$

N. Fuss, der diese Gleichung aufgestellt hat[3]), bemerkte, daß die dargestellte Kurve in ihrer Form viele Analogien mit der Konchoide der Alten (Nr. 66ff.) darbietet.

Die zweite ist der Ort der Punkte, deren Abstände von drei gegebenen Geraden ein konstantes Produkt bilden. Ihre kartesische Gleichung lautet daher

$$(x \cos\alpha_1 + y \sin\alpha_1 - p_1) \cdot (x \cos\alpha_2 + y \sin\alpha_2 - p_2) \cdot (x \cos\alpha_3 + y \sin\alpha_3 - p_3) = a^3.$$

Die Kurve hat drei reelle Wendepunkte im Unendlichen, und wurde von Korneck, der sich mit ihr beschäftigt hat, kubische Hyperbel

---

1) *Réalisation et usage des formes imaginaires en géométrie* (Nouv. Ann. Math., 3e Ser., XI, 1892).

2) Man hat auch die orthischen Kurven dritter Ordnung untersucht, d. h. diejenigen, welche zum Paar der zyklischen Punkte apolar sind; die Polarkegelschnitte der Punkte der Ebene in bezug auf eine solche Kurve sind alle gleichseitige Hyperbeln. Vgl. C. E. Brooks, *A note on the orthic cubic curves* (J. Hopkins Univ. Circulars, 1904).

3) *De descensu gravium super arcu lemniscatae* (Mem. de St. Pétersbourg, IX, 1824).

genannt[1]); sie ergibt sich auch als Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte von gegebenem Inhalt, die drei gegebene Geraden berühren; nebenher wollen wir bemerken, daß der analoge Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte, die durch drei gegebene Punkte gehen, von der sechsten Ordnung ist.

Die dritte hat in kartesischen Koordinaten die Gleichung

$$xy(x+y)=a^3;$$ [2])

sie liegt symmetrisch in bezug auf die Gerade $x-y=0$ und hat drei reelle Wendepunkte im Unendlichen; die entsprechenden Tangenten haben die Gleichung $x=0$, $y=0$, $x+y=0$. Ihre Hessesche Kurve zerfällt in die unendlich ferne Gerade und die beiden komplexkonjugierten Geraden dargestellt durch die Gleichung

$$x^2+xy+y^2=0.$$ [3])

Zweites Kapitel.

Allgemeines über die rationalen Kurven dritter Ordnung.

18. Von den in Nr. **14** bezeichneten divergenten Parabeln sind drei je mit einem singulären Punkte versehen; schneiden wird diese mit einem Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt der betreffende singuläre Punkt ist, so entsteht eine eindeutige Beziehung zwischen den Punkten der Kurve und den Werten eines Parameters λ, wodurch bestätigt wird daß die Kurve rational ist. Projizieren wir eine solche Kurve in beliebiger Weise, so gelangt man zu folgenden Formeln:

$$\varrho x_i = a_{i0}\lambda^3 + a_{i1}\lambda^2 + a_{i2}\lambda + a_{i3} \qquad (i=1,2,3) \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo ϱ ein Proportionalitätsfaktor und λ der Parameter ist. Diese liefern die gemeinsame parametrische Darstellung für alle die ∞^8 rationalen Kurven dritter Ordnung, die es in einer Ebene gibt.[4]) Führen wir

---

1) *Eine mathematische Abhandlung über den geometrischen Ort der Mittelpunkte von Kegelschnitten, von denen drei Tangenten oder drei Punkte nebst der Fläche gegeben sind* (Progr. Oels, 1868).

2) J. Alvera, *Die Kurve dritten Grades* $xy(x+y)=a^3$ (Diss. Rostock, 1873).

3) Zu anderen Kurven, die, wie die hier zuletzt betrachtete, drei in einen Punkt zusammenlaufende Asymptoten haben, gelangt man, wenn man diejenigen Kurven dritter Ordnung aufsucht, in bezug auf welche es ∞^1 Punkte gibt, deren erste Polare ein Kreis ist (m. s. den Aufsatz von Stuyvaert, *Point remarquable dans le plan d'une cubique*; Nouv. Ann. Math., 3e Serie, XVIII, 1899); nur eine Asymptote einer solchen Kurve ist reell, und wenn α, β die Winkel sind, welche sie mit den zwei anderen bildet, so besteht die Gleichung

$$\cot(\alpha-\beta) = \cot\alpha - \cot\beta.$$

4) S. hierüber Igel, *Über ebene Kurven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt* (Math. Ann. VI, 1873).

nun die Bedingung an dafür, daß die drei Punkte (α), (β), (γ) in gerader Linie liegen[1]), so ist notwendig und hinreichend, daß das Produkt der beiden Matrizen

$$\begin{Vmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \alpha^3 & \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^3 & \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^3 & \gamma^2 & \gamma & 1 \end{Vmatrix}$$

gleich Null ist; daher wird man haben:

$$\begin{vmatrix} 1 & -(\alpha+\beta+\gamma) & \beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta & -\alpha\beta\gamma \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad (2)$$

oder auch, wenn man mit k_0, k_1, k_2, k_3 die Determinanten bezeichnet, die man aus der Matrix

$$\begin{Vmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}$$

erhält, indem man der Reihe nach die erste, zweite, dritte, vierte Vertikale ausstreicht

$$k_0 + k_1(\alpha+\beta+\gamma) + k_2(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta) + k_3\alpha\beta\gamma = 0. \quad . \quad . \quad (2')$$

Setzen wir die α, β, γ einander gleich, so verwandelt sich Gleichung (2) oder (2′) in eine Gleichung, deren Wurzeln ω die drei Wendepunkte der Kurve bestimmen. Die sich ergebenden Gleichungen sind:

$$\begin{vmatrix} 1 & -3\omega & 3\omega^2 & -\omega^3 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

oder

$$k_0 + 3k_1\omega + 3k_2\omega^2 + k_3\omega^3 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

Mit Hilfe von (2) oder (2′) ist es sehr leicht, aus diesen Gleichungen abzuleiten, daß die drei Wendepunkte der Kurve in gerader Linie liegen; davon ist einer oder alle drei reell, je nachdem die Diskriminante von (3′)

$$D = (k_0k_3 - k_1k_2)^2 - 4(k_1k_3 - k_2^2)\cdot(k_0k_2 - k_1^2) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

positiv oder negativ ist. — Einem Doppelpunkte der Kurve entsprechen

1) Wir bezeichnen hier und im folgenden mit (λ) den dem Werte λ des Parameters entsprechenden Punkt.

zwei Werte δ_1, δ_2 des Parameters; diese müssen so beschaffen sein, daß, wenn man irgend einen Punkt (λ) auf der Kurve annimmt, in bezug auf λ der Kollinearitäts-Bedingung für die drei Punkte $(\delta_1)(\delta_2)(\lambda)$ identisch genügt wird. Gleichung (2′) ergibt dann:

$$k_0 + k_1(\delta_1 + \delta_2) + k_2\delta_1\delta_2 = 0, \quad k_1 + k_2(\delta_1 + \delta_2) + k_3\delta_1\delta_2 = 0.$$

Daraus folgt, daß δ_1 und δ_2 die Wurzeln der Gleichung sind:

$$\begin{vmatrix} 1 & -\delta & \delta^2 \\ k_0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

Die Diskriminante dieser Gleichung ist ebenfalls D, und daher ist der Doppelpunkt der Kurve ein Knotenpunkt oder ein isolierter, je nachdem D positiv oder negativ ist. Dieser Umstand zugleich mit einem oben hervorgehobenen führt zu dem Schlusse: **Eine rationale Kurve dritter Ordnung besitzt einen oder drei reelle Wendepunkte, je nachdem sie einen Knoten- oder isolierten Punkt hat.** Im Falle $D = 0$, wenn die Kurve eine Spitze hat, hat sie einen einzigen, natürlich immer reellen, Wendepunkt.

Aus Gleichung (1) folgt, daß die Verbindungslinie der beiden Punkte (λ) und (μ) die Gleichung hat:

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ x_2 & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ x_3 & a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 3 & -(\lambda+\mu) & \lambda\mu & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -(\lambda+\mu) & 3\lambda\mu \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad (6)$$

Setzen wir insbesondere $\mu = \lambda$, so ergibt sich, daß die Gleichung der Tangente im Punkte (λ) sich folgendermaßen darstellt:

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ x_2 & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ x_3 & a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ 0 & 3 & -2\lambda & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2\lambda & 3\lambda^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \quad (7)$$

Daraus geht hervor, daß die betrachtete Kurve im allgemeinen vierter Klasse ist.

19. Die gewöhnliche Gleichung der von uns betrachteten Kurve würden wir erhalten, wenn wir aus Gleichung (1) λ eliminierten. Wir wollen diese Rechnung nicht ausführen[1]) und lieber die einfachsten

---

1) Man findet dieselbe bei Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie* I (Leipzig 1876) S. 887.

kanonischen Formen, auf welche eine rationale Kurve dritter Ordnung zurückführbar ist, je nachdem sie einen Knoten-, Rückkehr- oder isolierten Punkt hat, aufstellen.

a) Im ersten Falle, wenn wir als Ecke A_3 des Fundamentaldreiecks den singulären Punkt der Kurve wählen, so ist sie durch folgende Gleichung darzustellen:

$$m x_1 x_2 x_3 = c_0 x_1{}^3 + c_1 x_1{}^2 x_2 + c_2 x_1 x_2{}^2 + c_3 x_2{}^3 \text{ [1]} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Setzen wir $x_2 = \lambda x_1$, so ergibt sich

$$\varrho x_1 = m\lambda, \quad \varrho x_2 = m\lambda^2, \quad \varrho x_3 = c_0 + c_1\lambda + c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3,$$

und daher die Bedingung der Kollinearität der drei Punkte (α) (β) (γ)

$$\alpha\beta\gamma = k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

indem wir der Kürze halber $k = -\frac{c_3}{c_0}$ setzen.

Ist überdies die Kurve symmetrisch in bezug auf eine Achse und nimmt man diese als Abszissenachse, so erhält die kartesische Gleichung der Kurve das Aussehen

$$x(x^2 + ky^2) = ax^2 + by^2,$$

wobei $k < 0$ angenommen werden muß, da wenn $k > 0$ die Kurve einen isolierten Punkt hätte[2]. Befindet sich der Doppelpunkt im Unendlichen, so kann die Kurvengleichung geschrieben werden in der Form

$$x^2 y + aby - a^2 x = 0$$

wo $ab < 0$ genommen werden muß; wäre $ab > 0$, so hätte die Kurve einen isolierten Punkt im Unendlichen und stellte dann eine Newtonsche Serpentine (*anguinea*) dar[3].

b) Wenn hingegen die Kurve eine Spitze hat, ist ihre Gleichung in homogenen Koordinaten auf folgende Form zu bringen[4])

$$x_1 x_3{}^2 = x_2{}^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

also hat sie die parametrische Darstellung

$$\varrho x_1 = \lambda^3, \quad \varrho x_2 = \lambda, \quad \varrho x_3 = 1,$$

und statt der Gleichung (9) erhält man folgende Kollinearitätsbedingung

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

---

1) Em. Weyr, *Zur Geometrie der Kurven dritter Ordnung* (Zeitschr. Math. Phys. XV, 1870).

2) E. N. Barisien (im *Intermédiaire,* VII, 1900, S. 79—80) hat vorgeschlagen, die durch obige Gleichung dargestellten Kurven cubiques elliptiques, paraboliques oder hyperboliques zu nennen, je nachdem $k \gtreqless 0$.

3) Vgl. F. Gomes Teixeira, *Tratado* S. 59, *Obras* IV, S. 97.

4) G. Salmon, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven*, deutsch v. W. Fiedler (Leipzig, 1873) S. 221.

c) Wenn schließlich die Kurve einen isolierten Punkt hat, so wird man ihre Gleichung schreiben können[1]):

$$(x_1^2 + x_2^2)x_3 = x_2^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

und jene hat dann folgende parametrische Darstellung

$$\varrho x_1 = 1 + \lambda^2, \quad \varrho x_2 = \lambda(1 + \lambda^2), \quad \varrho x_3 = \lambda^3.$$

Die Kollinearitätsbedingung ist

$$\alpha + \beta + \gamma - \alpha\beta\gamma = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Setzen wir allgemein $\lambda = \operatorname{tg} l$, so wird diese zu $\operatorname{tg}(a + b + c) = 0$, oder

$$a + b + c \equiv 0 \ (\text{mod. } \pi)^{2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Diese Formeln wenden wir auf die Untersuchung der Steinerschen Polygone an[3]), die einer rationalen ebenen Kurve dritter Ordnung einbeschrieben werden können. Zu diesem Zwecke nehmen wir als „Fundamentalpunkte des Polygons“ die beiden Punkte (τ_1) und (τ_2) der Kurve; wir nehmen auf derselben einen dritten beliebigen Punkt (ξ_1), verbinden diesen mit (τ_1) und bestimmen den dritten Schnittpunkt der Verbindungslinie mit der Kurve (ξ_2); wir verbinden (ξ_2) mit (τ_2) und nennen den Punkt, in welchem diese Gerade die Kurve nochmals trifft (ξ_3) ... So erhalten wir nach $2n$ Operationen auf der Kurve $2n + 3$ Punkte, (τ_1), (τ_2), (ξ_1), (ξ_2), (ξ_3) ...... (ξ_{2n}), (ξ_{2n+1}), zwischen deren Parametern eine der folgenden Gruppen von $2n$ Bedingungen bestehen, je nachdem die Kurve einen Knoten-, Rückkehr- oder isolierten Punkt hat:

$$\left.\begin{array}{ll} \tau_1 \xi_1 \xi_2 = k, & \tau_2 \xi_2 \xi_3 = k \\ \tau_1 \xi_3 \xi_4 = k, & \tau_2 \xi_4 \xi_5 = k \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \tau_1 \xi_{2n-1} \xi_{2n} = k, & \tau_2 \xi_{2n} \xi_{2n+1} = k \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \tau_1 + \xi_1 + \xi_2 = 0, & \tau_2 + \xi_2 + \xi_3 = 0 \\ \tau_1 + \xi_3 + \xi_4 = 0, & \tau_2 + \xi_4 + \xi_5 = 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \tau_1 + \xi_{2n-1} + \xi_{2n} = 0, & \tau_2 + \xi_{2n} + \xi_{2n+1} = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad (16)$$

1) Daselbst S. 226.

2) Eine andere Ableitung dieser Bedingung findet man bei K. Zahradnik, *Contribution à la théorie des cubiques cuspidales* (Nouv. Ann. Math., 3e Ser., XVIII, 1899).

3) Diese Anwendung findet sich für die Kurve mit Knotenpunkt entwickelt in einem Aufsatze von Em. Weyr, *Über Kurven dritter Ordnung mit einem Mittelpunkt* (Math. Ann. III, 1871); für die übrigen in demjenigen vom Verf., *I poligoni di Steiner nelle cubiche razionali* (Prager Ber., 1896).

$$\left.\begin{array}{ll} t_1+x_1+x_2 \equiv 0, & t_2+x_2+x_3 \equiv 0 \\ t_1+x_3+x_4 \equiv 0, & t_2+x_4+x_5 \equiv 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ t_1+x_{2n-1}+x_{2n} \equiv 0, & t_2+x_{2n}+x_{2n+1} \equiv 0 \end{array}\right\} \pmod{\pi} \quad (17)$$

Sollen nun die angeführten Operationen zu einem geschlossenen polygonalen Linienzuge führen, also zu einem Steinerschen Polygon, so muß $\xi_{2n+1}=\xi_1$ sein. Machen wir diese Veränderung in den Beziehungen (15), (16), (17) und multiplizieren dann die n Gleichungen (15) miteinander oder addieren die n Beziehungen (16) oder (17) und zwar diejenigen, die in derselben Vertikalreihe stehen, so ergeben sich aus den resultierenden Gleichungen, wenn man sie in geschickter Weise vergleicht, folgende Beziehungen für die beiden Fundamental-Punkte

$$\tau_2^n=\tau_2^n \;.\;.\; (18) \qquad \tau_1=\tau_2 \;.\;.\; (19) \qquad nt_1\equiv nt_2 \pmod{\pi} \;.\;.\; (20)$$

Jede derselben wird zur Bestimmung eines der Punkte (τ_1) (τ_2) dienen können, wenn man den anderen kennt. Wenn nun n ungerade, so ist die einzige reelle Lösung von (18) $\tau_1=\tau_2$, wenn aber n eine gerade Zahl ist, so kann man auch setzen $\tau_1=-\tau_2$; dies zeigt: **In einer Kurve dritter Ordnung mit Doppelpunkt gibt es nur solche Steinersche Polygone, deren Seitenzahl ein Vielfaches von 4 ist; ist nun eine Zahl dieser Art gegeben und auf der Kurve beliebig ein Punkt angenommen, so gibt es nur einen einzigen ihm zugeordneten Punkt der Kurve, der mit ihm ein Paar Fundamentalpunkte bilden kann.** Die Gleichung (19) dagegen wird nur befriedigt durch $\tau_2=\tau_1$ und also: **Auf einer Kurve mit Spitze gibt es keine Steinerschen Polygone im eigentlichen Sinne.** Aus (20) endlich ergibt sich

$$t_2=t_1+k\frac{\pi}{n}, \qquad (k=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,n-1)$$

und demnach: **Auf einer Kurve dritter Ordnung mit isoliertem Punkte gibt es Steinersche Vielecke jeder geraden Ordnung $2n$; nimmt man einen Punkt der Kurve beliebig an, so gibt es noch $n-1$ weitere, von denen jeder mit diesem ein Paar Fundamentalpunkte eines Steinerschen $2n$-Ecks bildet.**

20. Die parametrischen Darstellungen, die mit solcher Leichtigkeit zu diesen Resultaten führten, dienen auch im allgemeinen dazu, in vorzüglicher Weise alle Fragen, die die Geometrie der rationalen Kurve dritter Ordnung betreffen, zu behandeln. Z. B. eignen sie sich zur Untersuchung der Eigenschaften eines Systems von Punkten von denen jeder der Tangentialpunkt des folgenden ist[1]). Mit dieser

---

1) Durège, *Über fortgesetztes Tangentenziehen an Kurven dritter Ordnung mit einem Doppel- oder Rückkehrpunkte* (Math. Ann. I, 1869). Eine ähnliche

speziellen Frage wollen wir uns hier nicht aufhalten, wollen jedoch bemerken, daß man durch Anwendung der Graßmannschen Begriffe und Methoden zu einer einfachen Konstruktion jeder Kurve dritter Ordnung mit Knotenpunkt gelangt[1]), ebenso zu ihrer Hesseschen Kurve[2]).

Zum Schlusse wollen wir noch auf das Problem der Rektifikation der rationalen Kurve dritter Ordnung hinweisen. Die Aufgabe hängt im allgemeinen von hyperelliptischen Integralen vom Geschlechte 3 ab, vereinfacht sich jedoch in speziellen Fällen. So werden wir sehen, daß die gerade Kissoide (Kap. 4) und die semikubische Parabel (Abschn. V, Kap. 2) elementar rektifizierbar sind; so hat G. Salmon vor fast sechzig Jahren[3]), und neuerdings G. de Longchamps[4]) bemerkt, daß die elliptischen Integrale genügen, um alle rationalen zirkularen Kurven dritter Ordnung zu rektifizieren; so fand endlich G. Darboux[5]), daß die Krümmungslinien der Enneperschen Minimalflächen algebraisch rektifizierbare Kurven dritter Ordnung sind. Endlich stellte sich und löste Raffy[6]) das Problem der Bestimmung aller rationalen Kurven dritter Ordnung, deren Rektifikation durch Funktionen von niederem als dem dritten Geschlechtes sich ausführen läßt, und durch eine erschöpfende Untersuchung, deren Wiedergabe wir uns hier versagen müssen, gelangte er zu folgendem Satze:

Von den rationalen Kurven dritter Ordnung sind rektifizierbar:

I. Algebraisch: Die von Raffy *caustiques-polaires* genannten, d. h. die Kurven, welche man entweder als negative Fußpunktkurve einer Parabel in bezug auf den Brennpunkt oder als Brennlinie derselben Kurve erklären kann unter der Voraussetzung, daß die Lichtstrahlen normal zur Achse sind (vgl. Nr. 49).

II. Durch zirkuläre Integrale (d. h. durch Integrale der Form $\int f(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})\, dx$, wo f eine rationale Funktion bedeutet 1) diejenigen, welche in rechtwinkligen kartesischen Koordinaten, folgender parametrischen Darstellung fähig sind: $x = a\frac{\lambda^3 - 3\lambda}{\lambda - c}$, $y = a\frac{3\lambda^2 - 1}{\lambda - c}$; 2) die (geraden oder schiefen) semikubischen Parabeln; 3) die geraden und schiefen Kissoiden.

Frage wurde durch C. Bioche im Aufsatze *Sur les cubiques à point de rebroussement* (Nouv. Ann. Math., 3e Ser., XII, 1893) behandelt.

1) F. Dingeldey, *Über Kurven dritter Ordnung mit Doppelpunkt* (Math. Ann. XXVII, 1886).

2) Id., *Zur Konstruktion der Hesseschen Kurve der rationalen Kurven dritter Ordnung* (Math. Ann. XXVIII, 1887).

3) *Higher plane Curves* (Dublin 1852, S. 267).

4) *Sur la rectification de quelques courbes remarquables* (Mathésis VII, 1887).

5) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Bd. I (Paris, 1887) S. 318.

6) S. die Abhandlung *Sur la rectification des cubiques planes unicursales* (Ann. Ec. norm., 3e Ser., VI, 1889).

III. Durch Funktionen vom Geschlecht 1, diejenigen, die eine der folgenden Singularitäten aufweisen: 1) zwei Wendepunkte im Endlichen mit einer isotropischen[1]) Tangente; 2) eine Spitze im Endlichen und Berührung mit der unendlich fernen Geraden; 3) eine Spitze oder einen Wendepunkt im Unendlichen; 4) Durchgang durch die zyklischen Punkte.

IV. Durch Funktionen vom Geschlecht 2: diejenigen, welche entweder 1) eine Spitze im Endlichen haben, oder 2) eine einfache Berührung mit der unendlich fernen Geraden, oder endlich 3) einen Doppelpunkt im Unendlichen.

Mit Berücksichtigung der Einzelheiten dieses Satzes ist der Leser in den Stand gesetzt, die analytische Natur der Funktionen, von denen die Rektifikation aller in diesem Abschnitte betrachteten Kurven abhängt, ohne unsere Hilfe zu bestimmen.

Drittes Kapitel.

Allgemeines über die zirkularen Kurven dritter Ordnung.[2])

21. Eine zirkulare Kurve[3]) dritter Ordnung oder Kataspirica[4]) ist durch sieben oder sechs Punkte bestimmt, je nachdem sie vom Geschlechte 1 oder 0 ist. Ihre Gleichung, bezogen auf ein rechtwinkliges kartesisches Achsensystem, kann immer auf die Form gebracht werden

$$(\alpha x + \beta y)(x^2 + y^2) + ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0. \quad (1)$$

Außer den zyklischen Punkten besitzt die Kurve im Unendlichen noch einen immer reellen Punkt, nämlich den unendlich fernen Punkt der Geraden $\alpha x + \beta y = 0$; wenn man daher die x-Achse parallel zu

1) Man nennt bekanntlich isotropisch eine Gerade, wenn sie durch einen zyklischen Punkt der Ebene geht.

2) Vgl. C. A. Bjerkneß, *Sur une certaine classe de courbes de troisième ordre rapportées à lignes droites, qui dépendent de paramètres donnés* (Journ. f. Math. LV, 1858); J. Casey, *On bicircular quartics*, art. 90—115 (Irish Trans. XXIV, 1869); L. A. Strnad, *Über Cirkularkurven dritten Grades.* (Progr. Realsch. Königgrätz, 1883) (böhmisch); F. Fricke, *Über ebene Kurven dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte gehen* (Diss. Jena, 1898).

3) Die zirkularen Kurven werden mißbräuchlich bisweilen zyklische Kurven genannt, wodurch Verwechslungen mit Kreisrollkurven (vgl. Abschn. VII, Kap. 9) herbeigeführt werden.

4) Eine von E. Laguerre eingeführte Bezeichnung in dem Aufsatze *Sur la courbe enveloppée par les axes des coniques qui passent par quatre points donnés etc.* (Nouv. Ann. Math., 2e Serie, XVIII, 1879; *Œuvres de Laguerre*, II, Paris 1905, S. 554) um daran zu erinnern, daß eine zirkulare Kurve dritter Ordnung als eine spirische Linie (vgl. Abschn. III, Kap. 4) mit unendlich fernem singulären Brennpunkte betrachtet werden kann.

dieser Geraden nimmt, so vereinfacht sich Gleichung (1) und wird zu

$$y(x^2+y^2)+ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad . \quad (2)$$

In jedem der zyklischen Punkte gibt es eine bestimmte Tangente an die betrachtete Kurve; die beiden so erhaltenen Geraden sind konjugiert imaginär und treffen sich in einem reellen Punkte F, dem außerordentlichen Brennpunkte oder Zentrum der Kurve, dessen Koordinaten

$$x=-h, \quad y=\frac{a-b}{3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

sind. Nehmen wir diesen Punkt als Koordinatenanfang, indem wir die Richtung der Achsen beibehalten, so bekommt Gleichung (2) die Gestalt:

$$(y+a)(x^2+y^2)+2gx+2fy+c=0 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Von jedem zyklischen Punkte lassen sich vier Gerade ziehen, die anderswo die zirkulare Kurve dritter Ordnung vom Geschlechte 1 berühren; es entstehen so zwei Büschel von je vier Strahlen, die nach dem Salmonschen Satze projektiv sind (s. Nr. 12). Beachtet man, daß die Projektivität sich auf vier verschiedene Weisen aufstellen läßt, und daß ferner jede der Tangenten, die von dem einen Kreispunkte gezogen sind, die von dem anderen gezogenen trifft in Punkten, welche die Brennpunkte der Kurve sind, so sieht man: **Die 16 Brennpunkte einer zirkularen Kurve dritter Ordnung** (von denen jedoch nur 4 reell sind) **liegen zu je vieren auf vier** (durch die zyklischen Punkte gehenden Kegelschnitten, d. i.) **Kreisen**, ein bemerkenswerter Satz, der gewöhnlich „der Hartsche Satz" genannt wird[1]). Für eine rationale zirkulare Kurve gibt es nur 4 gewöhnliche Brennpunkte, wenn sie einen Knoten- oder isolierten Punkt besitzt, 1 nur, wenn sie eine Spitze hat.

Jegliche Parallele zur x-Achse trifft die Kurve (4) in zwei in endlicher Entfernung belegenen Punkten, deren Abszissen man durch Auflösung der entsprechenden Gleichung nach x erhält; nimmt man jedoch $y=-a$, so wird eine Wurzel der Gleichung (4) unendlich groß, und daher stellt die Gleichung

$$y+a=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

eine Asymptote der Kurve (4) dar. Diese Asymptote schneidet übrigens die Kurve in einem Punkte A, dessen Koordinaten sind

$$x=\frac{2af-c}{2g}, \quad y=-a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

und der der Hauptpunkt der Kurve heißt. Mittellinie[2]) nennt man

1) Salmon-Fiedler, *Höhere Kurven* (Leipzig, 1873) S. 177; s. auch M. Disteli, *Die Metrik der zirkularen Kurven dritter Ordnung im Zusammenhang mit geometrischen Lehrsätzen Jacob Steiners* (Zürich. Ges. XXXVIII, 1893).

2) Oder „orthische Gerade" nach R. Dölle, *Orthogonale Invariante der*

die durch den Punkt M, den Mittelpunkt der Strecke FA, parallel zur Asymptote gezogene Gerade; ihre Gleichung ist daher

$$y + \frac{a}{2} = 0. \qquad (7)$$

Man beachte auch, daß Gleichung (4) als das Resultat der Elimination von r^2 aus folgenden beiden Gleichungen angesehen werden kann

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad (y + a)(r^2 + 2f) + 2g\left(x - \frac{2af - c}{2g}\right) = 0;$$

diese Bemerkung in geeigneter Weise interpretiert, liefert folgenden Satz von Czuber[1]): **Jede zirkulare Kurve dritter Ordnung läßt sich erzeugen durch ein Strahlbüschel und ein projektives Büschel konzentrischer Kreise; der Scheitel des Strahlbüschels ist der Hauptpunkt, und das gemeinsame Zentrum aller erzeugenden Kreise der außerordentliche Brennpunkt der Kurve.** Daraus folgt als Corollar folgender Satz von Eckardt[2]): **Jede durch einen Hauptpunkt einer zirkularen Kurve dritter Ordnung gezogene Gerade trifft außerdem die Kurve in zwei Punkten, die gleichen Abstand vom außerordentlichen Brennpunkte haben.**

22. a) Bemerkenswert ist der Fall, daß die Kurve dritter Ordnung durch ihren außerordentlichen Brennpunkt geht, oder auch, was dasselbe ist, daß die beiden Kreispunkte auf ihr „konjugiert" sind; dieser wurde von Schröter[3]) und Durège[4]) untersucht infolge der Bemerkung von Salmon[5]), daß eine solche Kurve der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte einer Schar ist; daher der Name Fokalkurve, den sie in der Geometrie führt; in der Kinematik dagegen, wo sie eine wichtige Rolle spielt, heißt sie Kreispunktkurve[6]). Im vorliegenden Falle müßte man in der vorigen Gleichung $c = 0$ setzen. Die Gleichungen (4) und (5) werden dann

$$(y + a)(x^2 + y^2) + 2gx + 2fy = 0 \quad (4'); \quad x = \frac{af}{g},\ y = -a. \qquad (5')$$

Zirkularkurven 3. Ordnung (Diss. Jena, 1905), eine lesenswerte Arbeit, wo die Metrik der genannten Kurven gründlich untersucht wird.

1) *Die Kurven dritter und vierter Ordnung, welche durch die unendlich fernen Kreispunkte gehen* (Zeitschr. f. Math. XXXII, 1887.)

2) Vgl. Durège, *Über eine leichte Konstruktion der Kurve dritter Ordnung, welche durch die imaginären Kreispunkte geht* (Zeitschr. Math. u. Phys. XIV, 1869; s. auch X, 1865).

3) *Über eine besondere Kurve dritter Ordnung und eine einfache Erzeugungsart der allgemeinen Kurve dritter Ordnung.* (Math. Ann. V, 1872).

4) *Über die Kurve dritter Ordnung, welche den geometrischen Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschar bildet.* (Das.)

5) *Analytische Geometrie der Kegelschnitte,* deutsch v. Fiedler. 2. Aufl. (Leipzig, 1878) S. 355 u. 397.

6) Vgl. R. Müller, *Konstruktion der Fokalkurve aus sechs gegebenen Punkten* (Zeitschr. f. Math. XL, 1895).

Demnach ergibt sich (4') durch Elimination von λ aus den Gleichungen

$$x = \lambda y, \quad \left(x + \frac{a\lambda}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1+\lambda^2}{4} a^2 - 2g\lambda - 2f,$$

woraus folgt: **Jede zirkulare Kurve dritter Ordnung, welche ihren außerordentlichen Brennpunkt selbst enthält, läßt sich erzeugen durch ein Strahlenbüschel, welches eben jenen Brennpunkt zum Scheitel hat und ein projektives Kreisbüschel, indem der Mittelpunkt eines jeden Kreises des Büschels auf dem entsprechenden Strahl und auf der Mediane der Kurve liegt.**

b) Eine andere bemerkenswerte Gruppe von zirkularen Kurven dritter Ordnung ist diejenige, die gebildet wird von solchen, die symmetrisch in bezug auf eine Achse sind: nehmen wir diese als x-Achse und als Anfang den reellen Punkt, in welchem sie die Kurve schneidet, so kann man als allgemeine Gleichung derselben folgende nehmen:

$$x(x^2 + y^2) + ax^2 + by^2 + cx = 0. \quad \ldots \quad (8)$$

Gehen wir nun zu Polarkoordinaten über, so erhalten wir die andere:

$$\varrho^2 + \varrho \frac{a \cos^2 \omega + b \sin^2 \omega}{\cos \omega} + c = 0.$$

Setzen wir zunächst voraus, daß $c \neq 0$; nennen wir nun die Wurzeln dieser Gleichung ϱ_1 und ϱ_2, so haben wir $\varrho_1 \cdot \varrho_2 = c$, und daher **wird die Kurve (8) in sich selbst transformiert durch eine Inversion, die zum Zentrum den Koordinatenanfang und zur Potenz c hat**[1]). Zwei andere analoge Inversionen gibt es, wenn die Kurve von der Symmetrieachse in zwei weiteren reellen Punkten geschnitten wird.

Zu dieser Gruppe gehört z. B. die Kurve mit der Gleichung

$$x^3 - 6px^2 + xy^2 + p^2x - 4p^3 = 0,$$

deren Konstruktion durch zwei Hyperbeln Varignon angegeben hat[2]) und welche er zur Untersuchung der Wendepunkte Rolle vorlegte im Verlaufe der bekannten Disputation, die zwischen diesen berühmten Mathematikern über den Wert der Infinitesimal-Methode statt fand. Varignon nannte sie Conchoïde, weil sie eine Ähnlichkeit in der Gestalt mit einem Zweige der Konchoide des Nikomedes (s. Abschn. III, Kap. 5) aufweist.

c) Eine dritte Gruppe wird gebildet von den zirkularen und rationalen Kurven; nimmt man zwei rechtwinklige Achsen, die den Doppelpunkt als Koordinatenanfang haben, so hat man für die Kurve

---

1) Daraus ergibt sich u. a., daß die Tangenten an die Kurve in den beiden Punkten, die auf einer Geraden durch den Koordinatenanfang liegen, mit dieser Geraden gleiche Winkel bilden.

2) S. den an Leibniz gerichteten Brief v. 23. Mai 1702, veröffentlicht in *Leibniz mathem. Schriften*, herausg. von Gerhardt, IV (Halle, 1859) S. 101.

folgende Gleichung:

$$(x^2 + y^2)(\alpha x + \beta y) + ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 . \quad . \quad . \quad (9)$$

Diese führt zu folgender parametrischen Darstellung

$$x = -\frac{a + 2h\lambda + b\lambda^2}{(1+\lambda^2)(\alpha + \beta\lambda)}, \quad y = -\lambda\frac{a + 2h\lambda + b\lambda^2}{(1+\lambda^2)(\alpha + \beta\lambda)}.$$

Aus ihr folgt, daß ein beliebiger Kreis, der durch den Koordinatenanfang geht, also durch eine Gleichung von folgendem Typus dargestellt wird:

$$x^2 + y^2 - 2\xi x - 2\eta y = 0,$$

die Kurve noch in zwei Punkten trifft, die durch die Gleichung bestimmt werden:

$$(a + 2\alpha\xi) + 2\lambda(h + \beta\xi + \alpha\eta) + (b + 2\beta\eta)\lambda^2 = 0;$$

damit nun diese beiden Punkte zusammenfallen, muß sein

$$(\beta\xi - \alpha\eta)^2 + 2(h\beta - b\alpha)\xi + 2(h\alpha - a\beta)\eta + (h^2 - ab) = 0.$$

Diese Gleichung in ξ und η stellt eine Parabel dar; nennt man nun den Ort der Mittelpunkte derjenigen Kreise, die durch den Doppelpunkt einer rationalen zirkularen Kurve dritter Ordnung gehen und sie anderswo berühren, Nebenevolute, so folgt: **Die Nebenevolute einer rationalen zirkularen Kurve dritter Ordnung ist eine Parabel**[1]).

Viertes Kapitel.

Die Kissoide des Diokles.

23. Die Probleme der Quadratur des Kreises, der Verdoppelung des Würfels und der Teilung des Winkels in gleiche Teile bildeten viele Jahrhunderte lang das Ziel der Anstrengungen aller hervorragenden Geometer; viele derselben versuchten, da sie einsahen, daß die „ebenen und körperlichen Örter" nicht imstande seien sie zu lösen, die Schwierigkeiten, die sich der Erlangung einer Lösung entgegenstellten, dadurch zu überwinden, daß sie andere Kurven von komplizierterer Erzeugung anwandten; so entstanden zahlreiche Arten von Kurven, die man bezüglich Quadratrix, Duplikatrix, Sektrix nannte. Unter denen der zweiten Art finden wir, außer den Kegelschnitten, auch die bemerkenswerte Kurve, von der dieses Kapitel handelt. Erdacht wurde sie von Diokles, einem nur wenig bekannten Geometer, der sicherlich später als Archimedes gelebt hat, wahrscheinlich zwischen 250 und 100 v. Chr.[2]) In welcher Weise er sich derselben

---

1) Dieser Satz für den Spezialfall der Kissoide findet sich in M. Simon, *Analytische Geometrie* (Leipzig, Göschen 1900) S. 283.

2) G. Loria, *Le scienze esatte nell' antica Grecia.* Lib. II, n. 73.

zur Verdoppelung eines Würfels bedient hat, erfahren wir aus dem Kommentar des Eutokius von Askalon zum zweiten der Bücher des Archimedes *Über die Kugel und den Cylinder*[1]).

Um die Entstehung der Diokleischen Linie klar zu machen, betrachten wir einen Kreis Γ mit dem Mittelpunkte O und zwei zu einander senkrechten Durchmessern AB und CD (Taf. I, Fig. 1); wir nehmen auf der Peripherie des Kreises zwei untereinander gleiche Bogen AE und AG, ziehen durch G die Parallele zu AB, diese schneidet CE in einem Punkte M der Diokleischen Kurve. Daß der Ort der Punkte M, welcher von Eutokius mit keinem besondern Namen bezeichnet wurde, derselbe ist, den Proklus und Pappus Kissoide nennen (*κισσοειδὴς γραμμή* von *ἡ κίσσος*, der Epheu), ist außerordentlich wahrscheinlich, wenn auch nicht mathematisch sicher, da keine ältere Schrift existiert, in welcher sich der Name Kissoide mit dem Namen des Diokles verknüpft findet. Nichtsdestoweniger wird der Ort der Punkte M allgemein die Kissoide des Diokles genannt.

Bemerken wir noch, daß, wenn CE die in D an den Kreis gelegte Tangente d in F schneidet, sich die beiden Strecken CE und MF als gleich und gleich gerichtet ergeben, so läßt sich die Kissoide einfacher auf folgende Weise konstruieren. Man trage auf jedem von C ausgehenden Strahle CF ein Stück FM gleich und entgegengesetzt gerichtet mit CE ab. Wenn man dagegen FM' gleich und in gleichem Sinne mit CE abträgt, so würde man eine neue Kurve erhalten, welche die Begleitkurve der Kissoide heißt[2]).

Die Kissoide des Diokles ist augenscheinlich symmetrisch in bezug auf den Durchmesser CD des Erzeugungskreises und enthält die Endpunkte A und B des dazu senkrechten Durchmessers. Obwohl sie sich ins Unendliche erstreckt, so betrachteten die Alten nur die beiden Bogenstücke innerhalb des Kreises Γ, die von C bis zu den Punkten A und B gehen. Diese Bogen begrenzen zugleich mit dem Halbkreise ADB ein Gebiet, dessen Gestalt an die Blätter des Epheu erinnert; damit ergibt sich die Erklärung des Namens Kissoide.[3]) Die Existenz der unendlichen Zweige scheint erst um die Mitte des 17. Jahrhunderts bemerkt zu sein; tatsächlich bemerkte Roberval in einem an Fermat gerichteten Briefe vom 4. August 1640, als er von Kissoiden spricht[4]),

---

1) *Archimedes*, herausg. von Heiberg III (Leipzig, 1880) S. 81ff.

2) G. Bellacchi (*Introduzione storica alla teoria delle funzioni ellittiche.* Firenze, 1894, S. 136) nennt sie la conjugata della cissoide.

3) Vielleicht auch, weil die Basis des Epheublattes von einer solchen Kurve begrenzt wird. (Anm. des Übersetzers).

4) Um den folgenden Passus zu verstehen, ist nötig zu wissen, daß Roberval, zusammen mit der Kissoide die in bezug auf die Spitze symmetrische Kurve betrachtete.

daß „ces deux lignes courbes sont infinies de leur nature et ont des asymptotes parallèles entre elles, ce qu'on m'a assuré avoir été déjà démonstré par un auteur dont on ne m'a pas pu dire le nom"[1]).

Unabhängig von diesem wurden die unendlichen Zweige der Kissoide von R. de Sluse bezeichnet; daher schlug Huygens vor[2]), die ganze Kurve die Slusesche Kissoide zu benennen; aber obwohl dieser Name die Billigung des Hauptinteressenten gefunden hatte[3]), so wurde er doch nicht adoptiert, und man fuhr fort, den Ort aller vorhin definierten Punkte M Kissoide des Diokles zu nennen; in diesem Sinne genommen, hat dann die Kurve die Gerade d als Wendeasymptote.

24. Nehmen wir nun C als Pol und CD als Achse eines Polarkoordinatensystems ϱ, ω und bezeichnen den Radius des gegebenen Kreises mit r, so erhalten wir:

$$\varrho = CM = EF = CF - CE = \frac{2r}{\cos\omega} - 2r\cos\omega,$$

und daher ist die Polargleichung der Kissoide:

$$\varrho = \frac{2r \cdot \sin^2\omega}{\cos\omega} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Gehen wir zu kartesischen Koordinaten über, so erhalten wir

$$x(x^2+y^2) = 2ry^2, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

woraus hervorgeht, daß die Kissoide eine zirkulare Kurve dritter Ordnung mit C als Spitze und CD als entsprechender Spitzentangente ist. Schreiben wir Gleichung (2) folgendermaßen

$$y^2 = \frac{x^3}{2r-x},$$

so tritt deutlich hervor, daß die Gerade d eine Wendeasymptote ist.

Betrachten wir hingegen die Begleitkurve der Kissoide, so werden wir haben

$$\varrho = CM' = CF + FM' = CF + CE = \frac{2r}{\cos\omega} + 2r\cdot\cos\omega.$$

Die Polar- und die kartesische Gleichung sind daher

$$\varrho = \frac{2r(1+\cos^2\omega)}{\cos\omega}, \quad y^2 = \frac{x^3-4rx^2}{2r-x};$$

diese Kurve ist also auch eine zirkulare Kurve dritter Ordnung, die symmetrisch in bezug auf die Gerade CD ist und C als isolierten Punkt hat.

Die angegebene Erzeugungsweise gestattet uns nicht, die Kurve

1) *Œuvres de Fermat* II, S. 201.

2) S. den Brief an R. de Sluse v. 5. April 1658 in *Œuvres de Huygens* II, S. 164.

3) S. die Antwort Sluses v. 17. Apr. 1658, ebendaselbst S. 168.

in einem kontinuierlichen Zuge zu zeichnen; einer solchen aber bedurfte Newton, um zu erreichen, daß die Kissoide ebenso wie die Gerade und der Kreis (s. Nr. 5) zu denjenigen Kurven gerechnet würde, die man zur Lösung irgend eines Problems anwenden könne. Er entdeckte nun eine solche höchst bemerkenswerte, die man aus folgendem Satze erkennt[1]): „Ein rechter Winkel FGH (Taf. I, Fig. 2), dessen einer Schenkel GF eine bestimmte Länge hat, bewege sich mit dem Punkte F auf einer festen Geraden r, während der andere Schenkel GH fortwährend durch einen festen Punkt E, dessen Abstand von r gleich GF ist, geht: dann beschreibt der Mittelpunkt M von FG eine Cissoide.“[2]) Beweis: Es sei O der Fußpunkt des von E auf r gefällten Lotes und D die Mitte von EO. Dann sind die Dreiecke EFG und EFO, die eine gemeinsame Hypotenuse und die gleichen Katheten EO und FG haben, kongruent, daher ist $\sphericalangle FEO = EFG$. Wenn sich nun EO und FG in L schneiden, so ist Dreieck LEF gleichschenklig, und da $ED\ (= \frac{1}{2}EO) = FM\ (= \frac{1}{2}FG)$, so ist DM parallel zu EF. Ist K der Schnitt von DM mit der zu EO durch F gezogenen Parallelen, und beschreibt man um O mit OD als Radius den Kreis Γ und zieht an diesen durch den D diametral gegenüber liegenden Punkt D' die Tangente t, so ist klar, daß der Punkt K sich auf t befinden wird. Zeichnen wir auch den Schnittpunkt N der Geraden DMK mit der Peripherie des Kreises Γ und den Radius ON, so sind die beiden Dreiecke DON und MFK gleichschenklig und kongruent, also ist $DN = MK$ und daher $DM = NK$; dies beweist, daß der Ort der Punkte M eine Kissoide ist, die man erhält aus dem Kreise Γ und der Tangente t, w. z. b. w.

Wichtiger als die Newtonsche organische Erzeugung der Kissoide sind vom theoretischen Standpunkte einige Ableitungsarten aus der Parabel, auf die wir jetzt hinweisen wollen.

a) Wir betrachten die Parabel $y^2 = 2px$; die allgemeine Gleichung ihrer Tangente lautet: $px - \eta y + \frac{\eta^2}{2} = 0$. Das Lot, welches vom Koordinatenanfang auf die so dargestellte Gerade herabgelassen wird, hat als Gleichung $\eta x + py = 0$; der Ort der Fußpunkte aller derartigen Lote hat als Gleichung das Resultat der Elimination von η aus den beiden letzten Gleichungen, d. i.

$$x(x^2 + y^2) + \tfrac{1}{2}py^2 = 0.$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit (2), so folgt: **Die Fußpunkt-Kurve des Scheitels einer Parabel ist eine Kissoide des Diokles.**

---

1) *Arithmétique universelle*, übers. v. Beaudeux (Paris, 1802) S. 83.

2) Ein analytischer Beweis dieses Satzes findet sich in Magnus, *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie* (Berlin, 1833) S. 279.

b) Beachten wir ferner, daß der zum Koordinatenanfang in bezug auf die Gerade $px - \eta y + \frac{\eta^2}{2} = 0$ symmetrische Punkt die Koordinaten hat

$$x = -\frac{p\eta^2}{p^2 + \eta^2}, \qquad y = \frac{\eta^3}{p^2 + \eta^2},$$

und eliminieren wir daraus η, so findet man:

$$x(x^2 + y^2) + py^2 = 0.$$

Folglich: **Der Ort der zum Scheitel einer Parabel in bezug auf die Tangenten symmetrischen Punkte ist eine Kissoide des Diokles.**[1])

c) Da ferner der zum Scheitel der gegebenen Parabel in bezug auf die Tangente symmetrische Punkt der Scheitel einer zur gegebenen kongruenten Parabel ist, welche auf dieser rollt, so kann man auch sagen: **Wenn eine Parabel auf einer kongruenten rollt, sie immer von außen berührend, so beschreibt der Scheitel eine Kissoide.**[2])

d) Wenn man auf die Parabel $y^2 = 2px$ die Transformation durch reziproke Radienvektoren vom Zentrum O und der Potenz k^2 anwendet, so kommt man zur Kissoide mit der Gleichung $x(x^2 + y^2) = \frac{k^2}{2p} y^2$. Dieselbe Transformation ausgeführt für zwei Kegelschnitte mit Zentrum, die durch die Gleichung $\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x}{a} \pm \frac{y^2}{b^2} = 0$ dargestellt werden, liefert die beiden Kurven dritter Ordnung:

$$k^2(b^2x^2 \pm a^2y^2) = ab^2(x^2 + y^2)x,$$

die beide zirkular, rational und symmetrisch in bezug auf Ox sind; die von der Ellipse hergeleitete hat im Koordinatenanfang einen isolierten Punkt, die von der Hyperbel abgeleitete einen Knotenpunkt daselbst. Adoptieren wir die Nomenklatur von J. Neuberg[3]), so heißt die erstere Hyperkissoide oder acnodale Kissoide, die andere Hypokissoide oder crunodale Kissoide; der Name cuspidale Kissoide wäre demnach synonym mit der Kissoide des Diokles.

25. Da die Kissoide eine rationale Kurve ist, so wird man die kartesischen Koordinaten ihrer Punkte durch rationale Funktionen eines Parameters darstellen können. In der Tat, kombiniert man (2) mit der Gleichung $x = \lambda y$, so erhält man

$$x = \frac{2r}{1 + \lambda^2}, \qquad y = \frac{2r}{\lambda(1 + \lambda^2)}. \text{[4])} \quad \ldots \quad (3)$$

Daraus folgt als Bedingung der Kollinearität für die 3 Punkte $(\alpha), (\beta), (\gamma)$

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

---

1) Mirman, *Sur la cissoïde de Dioclès* (Nouv. Ann. Math., 3e Série, IV, 1885).

2) Hendricks, *Demonstration of a proposition* (Analyst, IV, 1877).

3) *Sur quelques systèmes de lignes articulées* (Liège, 1886) S. 33.

4) K. Zahradnik, *Theorie der Cissoide auf Grundlage eines rationalen Parameters* (Prager Ber. 1873).

und als Bedingung der Konzyklität (des auf einem Kreise Liegens) für die vier Punkte (α), (β), (γ), (δ)

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Die Sehne (α) (β) hat die Gleichung

$$(1 + \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)\,x - \alpha\beta\,(\alpha + \beta)\,y - 2r = 0; \quad . \quad . \quad (6)$$

im speziellen Falle, für die Tangente im Punkte (α) ist die Gleichung

$$(1 + 3\alpha^2)\,x - 2\alpha^3 y - 2r = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Folglich ist die Gleichung der entsprechenden Normalen

$$2\alpha^4 x + (1 + 3\alpha^2)\,\alpha y - 2r\,(1 + 2\alpha^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Aus (7) kann man eine Konstruktion der Tangente an die Kissoide ableiten: sie liefert nämlich als Ausdruck für die Subtangente

$$\frac{4\alpha^2 r}{(1 + \alpha^2)(1 + 3\alpha^2)} = \frac{x\,(2r - x)}{3r - x},$$

und daher kann man die Subtangente selbst durch Konstruktion einer vierten Proportionale erhalten.[1]) Sucht man hingegen die Umhüllungskurve der durch (8) dargestellten Geraden, so findet man folgende Gleichung (in welcher $a = 2r$)

$$y^4 + \frac{32}{3}a^2 y^2 + \frac{512}{27}a^3 x = 0,$$

welche die Evolute der Kissoide darstellt.[2]) Schließlich, sucht man den Pol der Geraden (7) in bezug auf den Kreis $x^2 + y^2 = R^2$, so findet man den Punkt mit den Koordinaten

$$x = \frac{R^2}{2r}(1 + 3\alpha^2), \quad y = -\frac{R^2}{r}\alpha^3,$$

dessen Ort zur Gleichung hat:

$$\left(x - \frac{R^2}{2r}\right)^3 = \frac{27R^2}{8r}y^2.$$

Der Ort selbst ist somit eine semikubische Parabel (s. Abschn. V, Kap. 2); man sieht also: **Die polarreziproke Figur einer Kissoide in bezug auf einen Kreis mit dem Zentrum in der Spitze ist eine semikubische Parabel**[3]).

---

1) Diese Methode wurde im Grunde von Fermat angegeben als Anwendung seiner Methode der Maxima und Minima (*Œuvres de Fermat* I S. 159 und III S. 141); ein anderes Verfahren rührt von Roberval her, s. *Observations sur la composition des mouvements et sur les touchantes des lignes courbes* (Mém. de l'Ac. des Sciences VI; Paris, 1730); ein drittes werden wir in Nr. 29 kennen lernen.

2) *Educ. Times*, Question 2415 (gelöst von Watson und Dale, IX, 1868); vgl. Salmon-Fiedler, *Ebene Kurven* S. 92.

3) Eine von Juel gemachte Bemerkung in Tidsskrift Math., 3. Ser., III, 1873.

Als letzte Anwendung der Gleichung (3) suchen wir die Hüllkurve aller Sehnen, welche die Kissoide mit ihren Krümmungskreisen gemeinsam hat. Beachten wir, daß Gleichung (5) uns zeigt, daß der Schmiegungskreis an die Kissoide im Punkte (α) sie ferner im Punkte (-3α) schneidet, so hat die Verbindungslinie der beiden Punkte die Gleichung

$$(1 + 7\alpha^2)x - 6\alpha^3 y - 2r = 0,$$

differenziert man nach α, so erhält man $\alpha = \frac{7x}{9y}$, und daher durch Elimination von α die Gleichung:

$$y^2 = \frac{7^3}{3^5} \frac{x^2}{2r - x},$$

die folgenden Satz beweist: **Die Hüllkurve der Sehnen, die eine Kissoide mit ihren Krümmungskreisen gemeinsam hat, ist eine der gegebenen affine Kissoide.**[1])

26. Zu einer anderen, nicht weniger nützlichen parametrischen Darstellung gelangt man, wenn man die Polargleichung (1) der Kurve mit denjenigen kombiniert, welche die kartesischen mit den Polarkoordinaten verknüpfen. Man erhält so folgende neuen Gleichungen

$$x = 2r \cdot \sin^2\omega, \qquad y = 2r \frac{\cos^3\omega}{\sin\omega} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Hiervon wollen wir einige Anwendungen machen. Bezeichnen wir mit S den Inhalt des gemischtlinigen unendlichen Dreiecks, welches von dem Durchmesser CD (Taf. I, Fig. 1), der halben Asymptote und der entsprechenden Hälfte der Kissoide begrenzt ist, so ist klar, daß

$$S = \int_{x=0}^{x=2r} y \cdot dx = 8r^2 \int_{\omega=0}^{\omega=2\pi} \sin^4\omega \cdot d\omega = 8r^2 \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} 3\pi r^2.$$

Da nun S die Hälfte der zwischen der Kissoide und ihrer Asymptote liegenden Fläche ist, so kann man folgern: **Der Flächeninhalt des von der Kissoide und ihrer Asymptote begrenzten Teiles der Ebene ist dreimal so groß als der erzeugende Kreis.**[2])

---

1) K. Zahradnik, *Beiträge zur Theorie der Cissoide* (Arch. Math. Phys., LVI, 1876). S. ferner von demselben Verfasser *Eigenschaften gewisser Punkttripel auf der Cissoide*, Arch. Math. Phys., 2e Reihe, VI. S. 392).

2) Dieser schöne Satz wurde von Fermat (Dezember 1661?) dem Carcavi mitgeteilt (s. *Œuvres de Fermat* II, S. 454), dieser übersandte ihn am 1. Januar 1662 an Huygens (*Œuvres de Huygens* IV, S. 2–6) zugleich mit einem Blatte, welches den von Fermat selbst gelieferten Beweis enthielt (*Œuvres de Fermat* I. S. 285 und III 238). Unten auf diesem Blatte setzte Huygens folgende Anmerkung hinzu: „J'ai demonstré cette proposion 4 (ans) auparavant". Erwiesen ist diese Behauptung durch einen Briefentwurf, geschrieben von dem großen holländischen Geometer im April 1658 (*Œuvres de Huygens* II, S. 170—73), dessen

Betrachten wir noch das gemischtlinige Dreieck, welches die Radien OA und OC der Grundkreises Γ, sowie den Kissoidenbogen AMC als Seiten hat, so ist dessen Inhalt gleich

$$8r^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4\omega \cdot d\omega;$$

durch teilweise Integration erhalten wir der Reihe nach

$$\int \sin^4\omega \cdot d\omega = -\frac{\sin^3\omega \cdot \cos\omega}{4} + \frac{3}{4}\int \sin^2\omega \cdot d\omega$$

$$= -\frac{\sin^3\omega \cdot \cos\omega}{4} - \frac{3\sin\omega \cdot \cos\omega}{8} + \frac{3\omega}{8} = \frac{3\omega}{8} - \frac{3\sin 2\omega}{16} - \frac{\sin^2\omega \cdot \sin 2\omega}{8};$$

folglich ist die Fläche des Dreiecks $COAMC = \frac{3\pi r^2}{4} - 2r^2$.

Um dieses Resultat zu interpretieren, ziehen wir die Tangente in A und C an den erzeugenden Kreis und bezeichnen deren Schnitt mit N; infolge der vorigen Relation haben wir dann für die Fläche des Dreiecks $CMANC$

$$r^2 - \left(\frac{3\pi r^2}{4} - 2r^2\right) = 3\left(r^2 - \frac{\pi r^2}{4}\right);$$

$r^2 - \frac{\pi r^2}{4}$ gibt aber den Flächeninhalt des gemischtlinigen Dreiecks $CZANC$ (wo Z ein beliebiger Punkt des Kreisbogens AC) und demnach

$$\text{Fläche } CMANC = 3 \cdot \text{Fläche } CZANC.$$

eine elegante Beziehung, die von Huygens entdeckt wurde.[1])

Betrachten wir, was noch allgemeiner, das von dem Kissoidenbogen CM und den Koordinaten seines Endpunktes CH und HM gebildete Dreieck, so zeigt die vorhin angestellte Berechnung, daß sein Flächeninhalt gegeben wird durch

$$3(r^2\omega - \tfrac{1}{2}r^2\sin 2\omega) - r^2\sin^2\omega \cdot \sin 2\omega.$$

Zieht man nun noch die Gerade CG, so erkennt man, daß die in der Klammer stehende Größe nichts anderes ist als der Flächeninhalt des Kreissegmentes $CZGC$, während die Größe $r^2\sin^2\omega \cdot \sin 2\omega$ den Inhalt des Dreiecks CHM angibt; wir schließen daher

$$\text{Fläche } CHMC = 3 \cdot \text{Segment } CZGC - \text{Dreieck } CHM,$$

---

wesentlicher Inhalt im folgenden Jahre von Wallis in *Tractatus duo de cicloide et cissoide* etc. (Oxoniae, 1659) veröffentlicht wurde. Die Priorität von Huygens über Fermat scheint hiernach unbestreitbar.

1) Brief an Wallis v. 6. Sept. 1658 (*Œuvres de Huygens* II, S. 212).

eine Beziehung von bemerkenswerter Allgemeinheit, die von Johann Bernoulli entdeckt ist.[1])

Indem wir bekannte Formeln anwenden und der Kürze wegen statt $2r$ a schreiben, erhalten wir folgenden Ausdruck für das Volumen V, das erzeugt wird durch Rotation der Fläche zwischen Kissoide und ihrer Asymptote um die Tangente CN

$$\tfrac{1}{2}V = \pi\cdot\int\limits_{y=0}^{y=\infty}(a^2 - x^2)\,dy = \pi a^3\int\limits_{\omega=0}^{\omega=\frac{\pi}{2}}(3\sin^2\omega + \sin^4\omega - 2\sin^6\omega)d\omega$$

$$= \pi a^3\left[3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\,.\,4}\cdot\frac{\pi}{2} - 2\,\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\,\frac{\pi}{2}\right] = \pi a^3\cdot\frac{5\pi}{8},$$

oder auch, wenn wir wieder für a, $2r$ schreiben

$$V = 2\cdot 5\pi^2 r^3.$$

Wenn wir anderseits das durch Rotation des gegebenen Kreises um dieselbe Tangente CN entstandene Volumen mit $\overline{V}$ bezeichnen, so haben wir

$$\overline{V} = \pi r^2\cdot 2\pi r = 2\pi^2\cdot r^3;$$

und also

$$V = 5\,\overline{V},$$

eine von Huygens mitgeteilte Gleichheit[2]), die sich leicht in Worte kleiden läßt. Sei nun x_g die Abszisse des Schwerpunktes der betreffenden Kissoide, so hat man nach der Pappus-Guldinschen Regel $2\pi x_g\cdot 2S = V$. Setzen wir die Werte für S und V ein, so ergibt sich

$$3x_g = 5r,\ \text{oder auch}\ \frac{x_g}{2r - x_g} = \frac{5}{1};$$

damit ist bewiesen: **Der Schwerpunkt der Kissoidenfläche teilt die Strecke der Symmetrietachse, zwischen Spitze und Asymptote in zwei Teile, von denen der zur Spitze hin gelegene fünfmal so groß ist als der andere.**

Bezeichnen wir in ähnlicher Weise mit U das Volumen, das durch Rotation der Kissoide um ihre Asymptote entsteht, und benutzen die vorigen Formeln, so finden wir:

$$U = 2S\cdot 2\pi\,(2r - x_g) = 3\pi r^2\cdot 2\pi\left(2r - \frac{5r}{3}\right) = 2\pi^2 r^3 = 2\pi r\cdot\pi r^2,$$

und demnach: **Das durch Rotation der Kissoide um ihre Asymptote erzeugte Volumen ist gleich dem des Ringes, der durch entsprechende**

---

1) *Remarques sur le livre intitulé Analyse des infiniment petits par M. Stone* in *Joh. Bernoullis opera* IV, S. 175—76. Eine andere Interpretation der allgemeinen Formeln derselben Kurve findet sich in der o. a. *Analytischen Geometrie* von M. Simon, S. 286.

2) S. den Brief an R. de Sluse vom 5. April 1668 und an Wallis vom 6. Sept. 1658 (*Œuvres de Huygens* II, S. 163 u. 212).

Rotation des gegebenen Kreises erzeugt wird. Es ist dies ein schöner Satz von R. de Sluse[1]), der neuerdings die Aufmerksamkeit einiger Geometer auf sich gezogen hat.[2])

27. Andere ähnliche Volumina wurden von Côtes berechnet[3]), der sich auch mit der Berechnung der Fläche beschäftigt hat, die durch Rotation der Kissoide um ihre Spitzentangente entsteht; seinem Beispiele folgte Johann Bernoulli[4]); wir wollen sie jedoch übergehen und dieses Kapitel beschließen, indem wir das letzte, die Kissoide betreffende metrische Fundamentalproblem behandeln, nämlich ihre Rektifikation.

Aus (2) ergibt sich für den Bogen s der Kissoide gerechnet von der Spitze an folgender Ausdruck:

$$s = r\int_0^x \frac{1}{2r-x}\sqrt{\frac{8r-3x}{2r-x}}\cdot dx;$$

um diese Integration auszuführen, setzen wir

$$2r = a, \qquad z^2 = \frac{4a-3x}{a-x} \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

und erhalten:

$$s = a\int_2^z \left(1+\frac{3}{z^2-3}\right)\cdot dz = a\int_2^z \left[1+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{z-\sqrt{3}}-\frac{1}{z+\sqrt{3}}\right)\right]dz$$

oder

$$s = a(z-2) + \frac{a\sqrt{3}}{2}\log\frac{(z-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(z+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}. \quad \ldots \quad (11)$$

Newton hat eine geometrische Konstruktion von s angegeben; wir wollen uns dabei nicht aufhalten, sondern die Gleichung (11) anwenden, um einen bemerkenswerten Satz, den wir Paul Fuß verdanken, zu beweisen.[5]) Kombinieren wir zu dem Zwecke Gleichung (2) mit (10), so findet man:

$$y = a\frac{(z^2-4)^{\frac{3}{2}}}{z^2-3},$$

daher liefert (11):

$$\frac{s-y}{a} = z-2-\frac{(z^2-4)^{\frac{3}{2}}}{z^2-3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\log\frac{(z-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}{(z+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}.$$

---

1) S. Note 2 auf S. 44.

2) S. die Aufsätze über das de Slusesche Theorem v. P. Gilbert, Massau und C. Le Paige in *Mathésis* VI, 1886.

3) *Harmonia mensurarum* (Cantabrigiae, 1722) S. 90—92.

4) S. die 18 erwähnten *Remarques* S. 178—179.

5) S. die letzte dieser Fragen behandelt in der Abhandlung: *Quantum differat longitudo arcus curvae ab asymptota utraque in infinitum usque protensa inquiritur* (Mém. Acad. St.-Pétersbourg, 5[e] Série, IX, 1824).

Entwickelt man nun in eine Reihe, so findet man

$$z-2-\frac{(z^2-4)^{\frac{3}{2}}}{z^2-3}=z-2-\left(z^3-6z+\frac{6}{z}+\cdots\right)\left(\frac{1}{z^2}+\frac{3}{z^4}+\cdots\right)$$

$$=-2+\text{Glieder mit negativen Potenzen von } z;$$

daher

$$\frac{s-y}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\log\frac{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{z}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{z}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}-2+\text{Glieder mit negativen Pot. von } z;$$

läßt man nun x bis ∞ wachsen, so wächst auch z bis ∞, und man hat

$$\lim_{y=\infty}(s-y)=a\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3})-2a;$$

folglich ist **die Differenz zwischen der Gesamtlänge der Kissoide und der Asymptote eine endliche Größe,**

$$2a\sqrt{3}\cdot\log(2+\sqrt{3})-4a.$$

Fünftes Kapitel.

Verallgemeinerungen der Kissoide.

28. Die Erzeugung der Kissoide bietet vielfache Verallgemeinerungen dar, von denen einige nicht ohne Interesse sind.

Vorerst kann man annehmen, daß die Punkte C und D nicht die Endpunkte eines Durchmessers, sondern ebensogut die einer Sehne seien (Taf. I, Fig. 3). Behalten wir alle Bezeichnungen des vorigen Kapitels bei, sowie daß DF Tangente des Kreises bleibt, und bezeichnen mit α den Winkel der Sehne CD mit dem Radius CO, nehmen C als Pol und CD als Polarachse, so finden wir

$$\varrho=CM=EF=CF-CE=\frac{2r\cos^2\omega}{\cos(\omega+\alpha)}-2r\cos(\omega-\alpha)$$

oder reduziert

$$\varrho=\frac{2r\sin^2\omega}{\cos(\omega+\alpha)}. \qquad (1)$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Kurve ist allgemeiner als die durch (1) in Nr. 24 dargestellte und geht auf diese zurück, wenn $\alpha=0$; sie heißt schiefe Kissoide zum Unterschiede von der Diokleischen, welche öfters auch die gerade Kissoide genannt wird. — Gehen wir zu kartesischen Koordinaten über, so verwandelt sich (1) in folgende

$$(x^2+y^2)(x\cos\alpha-y\sin\alpha)=2ry^2 \qquad (2)$$

aus der man leicht ableitet, daß die entsprechende Kurve C zur Spitze hat, mit CD als Spitzentangente; ferner geht auch sie durch die zyklischen Punkte der Ebene.

Die schiefe Kissoide hat geringere Wichtigkeit als die des Diokles; nichts desto weniger trifft man auf sie bei einigen Gelegenheiten; als Beispiel möge folgendes dienen: $v^2 = 2pu$ sei die Gleichung einer Parabel, bezogen auf ein schiefwinkliges Achsensystem mit dem Achsenwinkel α; setzt man

$$x = u + v \cdot \cos\alpha, \quad y = v \cdot \sin\alpha, \quad \text{demnach } u = x - y\cot\alpha, \quad v = \frac{y}{\sin\alpha},$$

so wird man erhalten

$$y^2 = 2p\sin\alpha(x\cos\alpha - y\sin\alpha)$$

als Gleichung der betrachteten Parabel in rechtwinkligen Koordinaten. Macht man die durch folgende Formeln bestimmte Transformation durch reziproke Radien

$$x = \frac{k^2 x'}{x'^2 + y'^2}, \quad y = \frac{k^2 y'}{x'^2 + y'^2},$$

so bekommt man die durch folgende Gleichung dargestellte Kurve

$$(x'^2 + y'^2)(x'\cos\alpha - y'\sin\alpha) = \frac{k^2}{2p \cdot \sin\alpha} y'^2,$$

welche mit (2) verglichen auf folgenden Satz schließen läßt: **Bei einer beliebigen Inversion, deren Zentrum auf einer Parabel liegt, verwandelt sich diese Kurve in eine schiefe Kissoide** (vgl. Nr. 24d).

29. Mit noch größerer Allgemeinheit kann man auf folgende Weise die Konstruktion der Diokleischen Kurve erweitern: „Gegeben sei ein Kegelschnitt Γ, auf ihm ein Punkt C und eine Gerade d in seiner Ebene; man ziehe durch C eine beliebige Gerade r, die Γ zum zweitenmal in E und die Gerade d in F schneidet; man trage auf r die Strecke CM gleich und im gleichen Sinne wie EF ab: der Ort der Punkte M ist eine Kissoidalkurve“[1]). Es ist leicht einzusehen, daß die so entstandenen Kurven dritter Ordnung sind und den festen Punkt zum Doppelpunkt haben; auch ist die Tatsache bemerkenswert, daß alle rationalen Kurven dritter Ordnung sich durch dieses Verfahren konstruieren lassen, mit Ausnahme derjenigen, welche die unendlich ferne Gerade zur Wendepunktslinie haben[2]). Hierin besitzt man also eine nützliche Methode, die Eigenschaften aller rationalen Kurven dritter Ordnung, mit Ausnahme der eben angegebenen, zu untersuchen.[3])

Führt man den Verallgemeinerungsprozeß noch weiter aus, so gelangt man zu folgender sehr ausgedehnten Gruppe von Kurven:

---

1) K. Zahradnik, *Cissoidalkurven* (Arch. Math. Phys. LVI, 1874).

2) G. de Longchamps, *Sur les cubiques unicursales* (Nouv corr. math. IV, 1878 oder Progresso I, 1891); K. Zahradnik, *Einheitliche Erzeugung der bekannten rationalen Kurven dritter Ordnung als Zissoidalen* (Prager Ber. 1906) und *Einige Bemerkungen zu den zirkularen Zissoidalen als Fußpunktskurven* (Ib. 1909).

3) G. Stiner, *Metrische Eigenschaften der Kurve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte* (Monatshefte Math. Phys. IV, 1893).

„Es seien in einer Ebene zwei Kurven Γ_1 und Γ_2 gegeben und ein fester Punkt O; durch diesen ziehe man einen beliebigen Strahl, der die Kurven bezüglich in den Punkten P_1 und P_2 trifft, auf dem Strahle bestimme man den Punkt P so, daß $OP = OP_1 - OP_2$ sei. Der Ort Γ der Punkte P ist eine allgemeine Kissoide“[1]). Wenn man die Polargleichungen der beiden Kurven Γ_1 und Γ_2, $\varrho_1 = f_1(\omega)$, $\varrho_2 = f_2(\omega)$ kennt, so findet man alsbald die von Γ_1 als $\varrho = f_1(\omega) - f_2(\omega)$. Nennen wir nun die polaren Subnormalen von Γ, Γ_1, Γ_2 bezüglich s_n, s_{n_1}, s_{n_2}, so hat man $s_n = \frac{d\varrho}{d\omega}$, $s_{n_1} = \frac{d\varrho_1}{d\omega}$, $s_{n_2} = \frac{d\varrho_2}{d\omega}$ und daher $s_n = s_{n_1} - s_{n_2}$. Daraus folgt, wenn man die Tangenten an die Kurven Γ_1 und Γ_2 konstruieren kann, man alsbald s_{n_1} und s_{n_2} hat, und also auch s_n, daß man dann auch imstande ist, die Tangente in allen Punkten der Kurve Γ zu konstruieren[2]). Durch Anwendung dieser Idee ist man nicht nur im stande, die Tangente an die Kissoide des Diokles auf eine von der durch Fermat (s. Nr. **25**) angeführten verschiedenen Weise zu ziehen, sondern man kann auch an die schiefe Kissoide und alle Kissoidalkurven die Tangente ziehen.

Es ist leicht zu beweisen, daß, wenn Γ_1 und Γ_2 algebraische Kurven von der Ordnung n_1 und n_2 sind, die resp. k_1 und k_2 Mal durch den Punkt O (den „Pol“) gehen und k unendlich ferne Durchschnittspunkte besitzen, Γ eine dritte algebraische Kurve ist, deren Ordnung i. a. durch

$$2n_1n_2 - (n_1k_2 + n_2k_1 + k)$$

ausgedrückt ist.[3])

Es soll noch bemerkt werden, daß in der dargelegten Konstruktion der allgemeinen Kissoiden die Kurven Γ_1 und Γ_2 auch zusammenfallen können; es entsteht dann folgende Konstruktion: Gegeben eine Kurve Δ und ein Punkt O ihrer Ebene, nennen wir P_1 und P_2 zwei der Schnittpunkte der Kurve mit einem durch O gezogenen Strahle r, und nimmt man auf der Transversalen einen Punkt P, so daß $OP = P_1P_2$, so ist der Ort der Punkte P eine Kissoide. Ist z. B. Δ ein Kreis mit dem Radius a und hat der Punkt O vom Mittelpunkte C die Entfernung b, so hat die Kissoide (für O als Pol und OC als Achse) die Polargleichung:

$$\varrho = 2\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 \omega}.$$

Die Kurve ist, wie wir später sehen werden, eine Lemniskate von

---

1) L. c. Schulz von Straßnicky, *Über die Zissoide der Kurven* (Baumgartners Zeitschr. für Phys. und Math., VIII, 1830); G. de Longchamps, Ass. fr. 1885; G. Peano, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Torino, 1887) S. 85—86. Einige Aufgaben über diese Kurven sind im Aufsatze *Sur une propriété de la strophoïde et sur les cubiques qui coïncident avec leurs cissoïdales* (Nouv. Ann. Math., 4e Ser., VI, 1906) von J. Gomes Teixeira aufgelöst.

2) Peano, a. a. O.

3) H. Wieleitner, *Spezielle ebene Kurven* (Leipzig, 1908) S. 3.

Booth (Abschn. III, Kap. 4), und wenn $b = a\sqrt{2}$ eine Bernoullische Lemniskate.

Unter den zuletzt allgemein definierten Kissoiden findet sich eine zirkulare, symmetrische Kurve dritter Ordnung, die auf den ersten Blick nicht in diese Kategorie zu gehören scheint[1]). Ihre Entstehungsweise ist folgende (vgl. Taf. I, Fig. 4): „Gegeben ist ein Kreis mit dem Mittelpunkte O und dem Radius r, sowie eine feste Tangente desselben a; man betrachte nun eine bewegliche Tangente b, deren Berührungspunkt B, und deren Schnitt mit a C sei; der Ort der Mittelpunkte M der Strecke BC ist dann die fragliche Kurve.“ Nehmen wir O als Koordinatenanfang und das von O auf a gefällte Lot OA zur x-Achse, so können wir als Koordinaten von B nehmen bezüglich $r \cdot \cos\omega$, $r \cdot \sin\omega$; die Gleichung der Tangente b ist daher

$$r\cos\omega + y\sin\omega - r = 0.$$

Die Koordinaten von C sind $x = r$, $y = r\frac{1-\cos\omega}{\sin\omega}$, daher werden die Koordinaten von M ausgedrückt durch

$$x = \frac{r}{2}(1+\cos\omega), \quad y = \frac{r}{2}\left(\sin\omega + \frac{1-\cos\omega}{\sin\omega}\right) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese parametrische Darstellung beweist inzwischen die Rationalität der fraglichen Kurve. Eliminieren wir ω, so ergibt sich

$$4x(x^2+y^2) = r^2(r+3x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die Kurve selbst ist also eine zirkulare, symmetrische Kurve dritter Ordnung, die den Punkt $R\left(-\frac{r}{2}, 0\right)$ als isolierten Punkt, O als Brennpunkt und die y-Achse als Wendeasymptote hat. Um zu zeigen, daß sie eine Kissoide ist, bezeichnen wir den A diametral gegenüberliegenden Punkt mit D und die entsprechende Tangente mit d. Ziehen wir DB und OC, so sind diese parallel, indem beide zugleich senkrecht auf AB stehen. Wir ziehen durch M die Parallele zu beiden, diese trifft die Radien OB und OD in ihren Mittelpunkten E bezw. R und schneidet d in F. Die rechtwinkligen Dreiecke DFR und BME sind kongruent, also $RF = ME$, und daher $RM = EF$. Folglich ist der Ort der Punkte M eine Kissoide, die entsteht, wenn man R als den festen Punkt und die Gerade d und den Kreis um O mit $\frac{r}{2}$ beschrieben als Fundamentalkurven nimmt. — Wir wollen endlich bemerken, ohne dies weiter zu beweisen, daß man die soeben gekennzeichnete Kurve auch erhält, wenn man einen Kreis einer geeigneten quadratischen Transformation unterzieht.[2])

1) V. Jeřabek, *Sur une cubique circulaire* (Mathésis, 2. Serie, VIII, 1898).
2) V. Retali, *Sur une cubique circulaire* (Daselbst).

30. Zu einer andern Kurve dritter Ordnung, die auch eine wirkliche Verallgemeinerung der Kissoide ist, gelangt man durch folgende Konstruktion (Taf. I, Fig. 5): „Gegeben ein rechter Winkel OBC, auf dessen Schenkeln die Punkte O und C festliegen, man ziehe durch C einen beliebigen Strahl, der BO in D trifft; in D errichte man die Senkrechte zu DC und projiziere auf diese den Punkt O in M. Der Ort der Punkte M ist eine Kurve, die wegen ihrer Schlingenform Ophiuride (ὁ ὄφις, Schlange, und ἡ οὐρά, Schwanz) genannt ist."[1]) Nehmen wir O als Pol, die zum Schenkel BO Senkrechte als Polarachse, setzen $OB = b$, $BC = c$, so haben wir

$$BD = c \cdot \operatorname{tg} \omega, \quad OD = b - c \cdot \operatorname{tg} \omega, \quad OM = OD \cdot \sin \omega.$$

Die Polargleichung der Ophiuride ist daher:

$$\varrho = b \sin \omega - c \frac{\sin^2 \omega}{\cos \omega}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und ihre kartesische Gleichung

$$x(x^2 + y^2) = y(bx - cy) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Die Ophiuride ist also eine zirkulare Kurve dritter Ordnung, die O zum Doppelpunkt hat; die bezüglichen Tangenten sind die Gerade OC und die Parallele durch O zu BC und die Krümmungsradien in O der zwei entsprechenden Kurvenzweige sind resp. gleich $\frac{b}{2}$ und $\frac{c\sqrt{b^2+c^2}}{c}$[2]). Lassen wir in (6) $b = 0$ werden, so erhalten wir wieder die Kissoide des Diokles; damit ist erwiesen, daß die Ophiuride eine Erweiterung derselben ist. Zu demselben Schlusse gelangen wir auch, wenn wir beachten, daß die durch Gleichung (6) dargestellte Kurve die Fußpunktkurve der Parabel $y^2 = 2cx$ in bezug auf den Punkt $\left(0, \frac{b}{2}\right)$ ist: demnach: **Die Fußpunktkurve einer Parabel, in bezug auf einen Punkt der Scheiteltangente, ist im allgemeinen eine Ophiuride**[3]**), im speziellen (Nr. 24) eine Kissoide, wenn der Punkt der Scheitel selbst ist.** Aus Gleichung (6) ergibt sich folgende parametrische Darstellung:

---

1) Uhlhorn, *Entdeckungen in der höheren Geometrie* (Oldenburg, 1809) S. 12. Vgl. auch Blasel, *Die Zissoide und eine ihr verwandte Kurve* (Progr., Neiße 1881).

2) Dieser Satz, sowie der im Folgenden auftretende über die Krümmung einer Kurve in einem vielfachen Punkte sind aus dem Aufsatze von G. Loria *Sur la courbure d'une ligne plane dans un point quelconque.* (Porto Annães II, 1907) entlehnt.

3) Von diesem Gesichtspunkte aus wurde die Ophiuride betrachtet von Matthiesen (*Grundzüge der antiken und modernen Algebra der literalen Gleichungen*, Leipzig 1878, S. 940—41) im Verlaufe einer Beleuchtung der Platonischen Methode (s. Loria, *Le scienze esatte* usw. Lib I, n. 62) zur Lösung des Delischen Problems.

$$x = \frac{a\lambda - c\lambda^2}{1+\lambda^2}, \quad y = \frac{a\lambda^2 - c\lambda^3}{1+\lambda^2}.$$

Die Parameter der drei Wendepunkte, von denen nur einer reell ist, sind die Wurzeln der Gleichung

$$ac\omega^3 + 3c^2\omega^2 - 3ac\omega + a^2 = 0,$$

die Wendepunkte selbst liegen auf der Geraden

$$3cx + ay + a^2 = 0$$

usw.

Sechstes Kapitel.

Die Cartesische Parabel.

31. Um ein allgemeines Beispiel einer Kurve anzuführen, auf welche die von ihm entdeckten Methoden angewandt werden können, betrachtete Descartes die auf folgende Weise erzeugten Linien[1]): „In einer Ebene sei eine Kurve Γ und ein mit ihr unveränderlich verbundener Punkt A gegeben, ferner ein fester Punkt F; man denke sich die Kurve translatorisch bewegt und bestimme für jede Lage den Schnittpunkt mit der jeweilig zugehörigen Geraden FA; der Ort der so erhaltenen Punkte ist eine Cartesische Kurve". Die Konstruktion kann als eine spezielle Transformation ebener Figuren angesehen werden. Um sie in Formeln zu kleiden, nehmen wir die vom Punkte A während der gedachten Bewegung beschriebene Gerade zur x-Achse, und das vom Punkte F auf sie gefällte Lot zur y-Achse. Wenn nun $y = f(x)$ die Gleichung der Kurve in ihrer Anfangslage ist, y_0 die Ordinate von F und l die Abszisse von A in der Anfangslage, so werden

$$y = f(x+a), \quad \frac{x}{a+l} + \frac{y}{y_0} = 1$$

die Gleichungen von Γ und der Geraden FA in einer beliebigen Lage der Bewegung sein. Durch Elimination von a erhält man

$$y = f\left(x - l + \frac{xy_0}{y_0 - y}\right)$$

als Gleichung der Cartesischen Kurve.

Ist Γ eine Gerade, so kann man erkennen, daß die erhaltene Kurve erzeugt wird durch die Schnitte entsprechender Elemente eines Strahlenbüschels und eines projektiven Büschels paralleler Strahlen, sie ist eine Hyperbel. Ist Γ ein Kreis, so ist die erzeugte Kurve eine Konchoide des Nikomedes (Abschn. III, Kap. 5). Wenn schließlich Γ eine Parabel ist, so entsteht eine Kurve, die von Descartes besonders betrachtet wurde[2]) und daher Parabola cartesiana ge-

---

1) *La géometrie de René Descartes* (Nouv. édition. Paris, 1886) S. 18.
2) Ebendas. S. 19.

nannt wird[1]). Andere nannten sie Trident des Cartesius[2]), andere, um hervorzuheben, daß die Kurve aus zwei getrennten Zügen bestehe, nannten die beiden Teile parabolische Conchoiden[3]) oder jeden Begleitkurve der Paraboloide des Cartesius[4]).

Sei nun $y^2 = 2px$ die Gleichung der erzeugenden Parabel, so entsteht die der Cartesischen Parabel durch Elimination von a aus den Gleichungen:

$$y^2 = 2p(x+a), \quad \frac{x}{a+l} + \frac{y}{y_0} = 1,$$

lautet also

$$\frac{y^2(y-y_0)}{2p} - (x-l)(y-y_0) + xy_0 = 0.$$

Die Cartesische Parabel ist also eine Kurve dritter Ordnung, die durch den festen Punkt F geht; sie hat den unendlich fernen Punkt der x-Achse als Doppelpunkt.[5]) Die entsprechenden Tangenten sind diese Achse und die unendlich ferne Gerade; die Kurve besitzt außerdem einen Wendepunkt, usw. Roberval hat gelehrt, die Tangente an sie zu konstruieren.[6]) Die Cartesische Parabel steht unter den speziellen Kurven dritter Ordnung in bezug auf ihr Alter nur der Kissoide des Diokles nach, sie ist aber viel weniger wichtig und weniger bekannt als diese.

Siebentes Kapitel.

Das Folium Cartesii.

32. Eine der unmittelbarsten und wichtigsten Dienstleistungen der Definition der Koordinaten und des Begriffes der Gleichung eines geometrischen Ortes ist die Möglichkeit, Kurven, deren Punkt-

---

1) Dieser Name findet sich schon in der *Enumeratio linearum tertii ordinis* von Newton.

2) G. Bellavitis *Sulla classificazione delle curve del terz' ordine* (Mem. Soc. Ital. Scienze XXV, Teil II, 1851, S. 24); G. Bellacchi, *Lezioni ed eserzizi di algebra complementare* Bd. I (Firenze, 1898), S. 43, wo noch allgemeinere Kurven betrachtet sind.

3) De l'Hôpital, *Sections coniques* (Paris, 1720) S. 329. M. G. Agnesi, *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù* (Milano, 1748) I, S. 209; Montucla, *Histoire des mathématiques,* Nouv. éd. II (Paris, 1799) S. 144.

4) De l'Hôpital, *Analyse des infiniment petits.* 2e Aufl. (Paris, 1705) S. 23. Agnesi op. cit. II, S. 506.

5) Daher gehört sie zur Klasse von Kurven, welche Gegenstand der folgenden Arbeiten wurden: A. Greiner, *Über orthogonale Invarianten der Kurven 3. Ordnung mit unendlich fernen Doppelpunkten und ihre geometrische Bedeutung* (Diss. Jena, 1902); J. Thomae, *Über orthogonale Invariante und Kovariante bei Kurven 3. Ordnung mit unendlich fernem Doppelpunkte* (Leipziger Berichte 55, 1903).

6) *Observations sur la composition des mouvements* (Mém. de l'Academie Royale des Sciences, VI, Paris 1730); dort findet sich der Name: Parabole de M. des Cartes.

konstruktion oder Entstehung durch kontinuierliche Bewegung man nicht kennt, dennoch in die Geometrie einzuführen. Eine solche unter den älteren Linien — alt, sofern es die analytische Geometrie ist — wird durch folgende Eigenschaft charakterisiert: „Für jeden Punkt der fraglichen Linie ist die Summe der Kuben seiner rechtwinkligen kartesischen Koordinaten gleich dem rechtwinkligen Parallelepipedon, das als Kanten eben diese Koordinaten und eine gegebene Länge hat. Die Kurve, um die es sich handelt, hat, wenn man diese Länge mit $3a$ bezeichnet, die Gleichung

$$x^3 + y^3 = 3axy \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Die Diskussion ergibt leicht, daß sie im Koordinatenanfang einen Knotenpunkt hat mit den Koordinatachsen als zugehörigen Tangenten; in dem von den positiven Richtungen der Geraden gebildeten Winkel hat die Kurve das Aussehen eines zum Winkelhalbierer dieser Geraden symmetrischen Blattes. Die Länge des Blattes ist $\frac{3a}{\sqrt{2}}$. In den beiden anliegenden Winkelräumen besitzt die Kurve zwei unendliche Zweige, die zueinander symmetrisch sind in bezug auf jenen Winkelhalbierer und sich asymptotisch der Geraden $x + y + a = 0$ nähern, jenseits welcher sich keine reellen Punkte der Kurve befinden. Der Krümmungsradius der entsprechenden Kurvenzweige in O ist gleich $\frac{3a}{8\sqrt{2}}$.[1])

Zu diesen Schlüssen konnten die ersten Bearbeiter der analytischen Geometrie nicht gelangen, weil sie noch nicht die fundamentalen Bestimmungen über die Vorzeichen der Koordinaten getroffen hatten und aus Scheu vor dem Unendlichen, nicht-endliche Werte der Koordinaten ausschlossen Infolgedessen entging ihnen die Existenz der beiden unendlichen Zweige der Kurve (1), dafür fügten sie zur Ergänzung des Blattes, welches nur einen Teil der Kurve bildet, diejenigen, die symmetrisch zu den Achsen und zum Koordinatenanfang liegen, hinzu. So entstand eine Gruppe von vier Blättern, die ein gewisses Analogon zum Blütenkelche des Jasmin bildet, oder auch eine Gruppe von vier Schleifen, deren Gesamtheit an den Knoten einer Halsbinde erinnert; so erklärt sich der Name Fleur de jasmin und Galante, mit welchem Roberval die betrachtete Kurve bezeichnete, und den andere in der Folge annahmen. Jedoch aus erklärlichen Gründen genießt weder der eine noch der andere von diesen beiden Namen heute den Vorzug: man nennt die Kurve Cartesisches Blatt (Folium Cartesii) zum Andenken an den Geometer, der sie zuerst erwähnt hat.

Wer hat wohl zuerst diese Benennung angewandt? Diese Frage wurde zweimal[2]) und in verschiedener Form von P. Tannery auf-

1) *Intermédiaire* III, 1896, S. 85 und IV, 1897, S. 125.
2) S. Note 2 auf S. 50.

geworfen, ohne jedoch eine endgültige Antwort zu erhalten[1]). Um diese, den Leser jedenfalls überraschende Tatsache zu erklären, bemerken wir zunächst, daß der älteste Hinweis auf die Kurve (1) sich in einem Briefe findet, den Descartes im Januar 1638 an P. Mersenne richtete, damit er ihn dem Fermat mitteile[2]); daselbst findet sich die Definition in Worten, wie wir sie zu Anfang dieses Kapitels mitgeteilt haben, als auf eine Kurve sich beziehend, auf welche die Tangentenkonstruktion des berühmten Senators von Toulouse nicht anwendbar sei. Die Kurve wird mit einem Namen nicht bezeichnet, und die Definition wird mit einer Figur begleitet, die beweist, daß die Gestalt der Kurve Descartes unbekannt war. Sieben Monate später (am 23. August 1638) machte dieser große Geometer die Konstruktion der zur Symmetrieachse parallelen Tangente bekannt, indem er „la plus grande largeur de la feuille“ ableitet[3]). „Soit $ACKFA$“, beginnt er[4]), „l'une des feuilles de cette courbe dont l'essieu est AH et le plus grand diamètre de la feuille est AK“; und diese Worte — bei denen sich zum erstenmal das Wort „feuille“ findet — beweisen, daß, obwohl Descartes hochmütig versicherte, daß die Gestalt der Kurve „se voit à l'œil sans aucun esprit ni science“[5]) die Gestalt selbst ihm in der Tat völlig unbekannt war; eine bemerkenswerte Tatsache, wenn man bedenkt, daß die *Géometrie* eine Jahr bevor diese Worte geschrieben wurden, veröffentlicht worden war. Der Name „Blatt des Cartesius“ findet sich nicht bei Roberval, der in einem Briefe an Fermat vom 1. Juni 1638[6]) den Ausdruck „sa (d. i. Descartes) figure qui est une espèce d'ovale“ anwendet; aber in einem Briefe von Huygens an Leibniz vom 17. September 1693 findet sich die Bezeichnung „la feuille de Mr. des Cartes ou de Roberval“[7]), jedoch an diese Nomenklatur hielt sich der berühmte Niederländer nicht, da er in einem älteren Briefe vom 12. Januar 1693, der auch an Leibniz gerichtet war, folgende Umschreibung anwendet: „La courbe dont l'équation est $x^3 + y^3 = nxy$ que M. Descartes reporte dans sa lettre 65e du 3e vol. et qu'il a considéré aussi bien, que M. Hudde“[8]), anderswo zieht er es vor, ihr überhaupt keinen Namen

1) Daselbst IV, 1897, S. 19 und 237; V, 1898, S. 128.

2) *Œuvres de Descartes,* éd. Tannery et Adam, I (Paris, 1897) S. 490.

3) *Œuvres de Descartes* éd. Tannery et Adam, II (Paris, 1897) S. 316.

4) Daselbst S. 313.

5) Das. S. 98. Derselbe Gedanke findet sich in einem Briefe an P. Mersenne vom 27. Juli 1638 in anderer Form wieder, wo es heißt: „Et M[r] de Roberval me semble aussy vain, avec son Galand qu'une femme qui attache un ruban à ses cheveux affin de paroistre plus belle; car il n'a en besoin d'aucune industrie, pour trouver la figure de cette ligne courbe, puisque j'en lui avais envoyé la définition. (Das. S. 274.)

6) *Œuvres de Fermat* II, S. 150—51.

7) *Leibniz* ed. Gerhardt II (Berlin 1850) S. 161. 8) Das. S. 153.

zu geben[1]). Dagegen wurde der für die Kurve von ihrer angeblichen Ähnlichkeit mit einer Bandschleife hergenommene Name von Descartes[2]), Fermat[3]), Leibniz[4]) und von Barrow[5]) angewendet. Ohne ihr einen Namen beizulegen, betrachteten sie: Schooten — der im V. Buche seiner *Exercitationum mathematicarum* (Leyden, 1657)[6]) eine Konstruktion derselben, die er Hudde verdankt, an einer Figur darlegt, in welcher die Kurve als aus einem einzigen Blatte gebildet dargestellt wird —, der Marquis de l'Hôpital, in seiner *Analyse des infiniment petits* (Paris, 1696)[7]), und Johann Bernoulli in den *Lectiones mathematicae*, die er in den Jahren 1691—92 hielt[8]). Die Bezeichnung „Blatt" findet sich im 18. Jahrhundert; so in der *Histoire de l'Académie des Sciences* für das Jahr 1706, wo sich S. 94 folgende Bemerkung findet, die sich wahrscheinlich auf die Kurve, um die es sich hier handelt, bezieht: „Monsieur Carré a donné en trois manières différentes la quadrature d'une courbe appelé Folium ou feuille a cause de son contour"; so nannte Moivre die Kurve (1) „the Foliate"[9]), und später bemerkten Bragelogne[10]) und Cramer[11]), daß „la partie finie d'une courbe, qui renferme un espace, s'appelle feuille". Schließlich hat D'Alembert, indem er dem „folium de Descartes" einen besonderen Artikel in der *Encyclopédie methodique* widmete, ohne Zweifel dazu beigetragen, den Gebrauch dieses Namens, dessen Anfänge sich zweifellos in den vorhin angeführten Briefen von Descartes (23. Aug. 1638) und Huygens (17. Sept. 1693) finden, in der ganzen zivilisierten Welt zu verbreiten.

Zu den schon erwähnten wollen wir noch den Namen ligne inclinée hinzufügen, mit welchem das Blatt in einem von P. Tannery untersuchten Manuskripte des 17. Jahrhunderts bezeichnet wird. Aus der folgenden Zeit, in welcher die Gestalt der Kurve genau bestimmt wurde, sollen zwei Punkte erwähnt werden: Erstens, daß Huygens, in einem an den Marquis de l'Hôpital den 29. Dezember 1692 gerichteten Briefe die richtige Gestalt und die Asymptote der Kurve angegeben hat[12]) und zweitens, daß sowohl die erwähnte Schrift von

---

1) *Œuvres de Huygens* IV, S. 283, 312, 315. 2) Das. S. 33.

3) *Œuvres de Fermat* II, S. 169.

4) Brief an Huygens v. 10. (20.) März 1693, wo es heißt: „la galande de Mr. de Roberval". (*Leibniz* ed. Gerhardt II, S. 158.)

5) *Lectiones geometricae* (London, 1670).

6) Daher der v. Fermat u. anderen angewandte Namen curva Schootenii.

7) II. Aufl. (Paris, 1705) S. 15 und 42.

8) *Joh. Bernoulli Opera* III, S. 403.

9) *A ready description and quadrature of a curve of the third order resembling that commonly called the foliate* (Phil. trans. Nr. 345).

10) *Mém. de l'Acad. des Sciences,* Paris 1730, S. 165.

11) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genève 1750) S. 9.

12) *Œuvres de Huygens*, X (La Haye, 1905) S. 351. Diese Bemerkungen

Moivre als auch die *Lectiones* von Joh. Bernoulli mit exakten Zeichnungen der Kurve versehen sind.

33. Der von Descartes am 23. August 1638 geschriebene Brief enthält noch einen weiteren, sehr bemerkenswerten Passus, nämlich folgenden: „Au reste, puis que je vois qu'il (Roberval) a pris plaisir à considerer la figure de cette ligne laquelle il nomme une Galand ou une fleur de jasmin, je lui en veux ici donner une autre, qui ne merite pas moins que celle-là les mêmes noms et qui est neanmoins beaucoup plus aisée a descrire, en ce que l'invention de tous ses poins ne depend d'aucune equation cubique. Celle cy donc est telle qu'ayant pris AK pour l'aissieu de l'une de ces feuilles, et en AK le point N a discretion, il faut seulement faire que le carré de l'ordonnée LN soit au carré du segment AN comme l'autre segment NK est à l'aggregat de tout AK et du triple d' AN et ainsi on aura le point L, c'est à dire tous ceux de la courbe, puisque le point N se prend à discretion. Je pourrais luy donner une infinité d'autres lignes, qui ne seroient pas d'une nature plus composée que celle la et toutefois qui representoiraient des fleurs et des galans beaucoup plus doubles et plus beaux; etc."[1]) Bringen wir diese Definition in Formeln, so ersieht man, daß die neue Kurve die Gleichung hat:

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{l-x}{l+3x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Nun beachten wir, daß, wenn wir als Koordinatenachsen die Winkelhalbierer zwischen den alten Achsen nehmen, die Transformierungsgleichungen

$$x = \frac{\xi + \eta}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}}$$

sind. Infolgedessen geht (2) über in

$$\xi^3 + \eta^3 = l\sqrt{2}\,\xi\eta.$$

Da diese von derselben Gestalt ist, wie Gleichung (1), so ist die Kurve Descartes' nicht verschieden von dem Folium. Daß dies dem Verfasser des *Discours de la méthode* bekannt gewesen, wird durch denselben Brief von Descartes[2]) an Mersenne bewiesen, worin sich folgender Satz findet: „I'oubliois à vous dire que la nouvelle ligne que j'ai proposée au sieur Roberval à la fin de la 4e page de cete lettre est toute la mesme que l'autre, ce que je fais pour me rire de luy s'il ne le reconnoît pas à cause qu'il s'est vanté la connoistre comme le cercle." Wenn demnach Descartes die Identität der durch die

---

wurden als „sehr schön und ganz neu" von de l'Hôpital gefunden; m. s. das. S. 390.

1) *Œuvres de Descartes* ed. Tannery et Adam (Paris, 1897) S. 316—17.

2) O. a. O. S. 336.

Gleichungen (1) und (2) dargestellten Kurven erkannt hat, so ist diese Tatsache von großer Bedeutung, indem sie beweist, daß er imstande war, wenigstens in besonderen Fällen, eine Transformation der Koordinaten auszuführen.

Die Transformation der Gleichung (1) in (2) ist nicht bloß von historischem Interesse, sondern kann auch benutzt werden, um die Kurve zu konstruieren. Es seien (s. Taf. I, Fig. 6) M und M_1 zwei Punkte der Kurve (2) symmetrisch zur x-Achse gelegen; dann ist MM_1 parallel zu OY und schneidet OX in einem Punkte N. Beschreiben wir nun einen Kreis, der durch O geht und dessen Zentrum auf OX liegt, und projizieren von O aus auf diesen die Punkte M und M_1 in M' und M_1', so wird auch $M'\ M_1'$, senkrecht zu OX sein und ein paralleles Strahlenbüschel projektiv zu dem ähnlich entstandenen der Geraden MM_1 beschreiben. Umgekehrt: Es sei eine Projektivität zwischen den Punkten N und N' auf OX gegeben; man ziehe durch N' die Parallele zu OY und bestimme deren Schnitte M', M_1' mit dem Kreise; projiziert man diese von O aus auf die durch N zu OY gezogene Parallele, so erhält man zwei Punkte M und M_1, deren Ort, wenigstens in speziellen Fällen, ein Folium Cartesii ist. Um dies zu zeigen, nehmen wir an, es sei R der Radius des Hilfskreises und

$$\alpha x x' + \beta x + \gamma x' + \delta = 0$$

die Gleichung der Projektivität zwischen N und N', so hat man (wenn y und y' die Ordinaten von M und M' sind):

$$x'(2R - x') = y'^2, \qquad \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}.$$

Wenn man nun x' und y' eliminiert, erhält man als Gleichung des Ortes der Punkte M, M_1

$$\frac{2Rx^2}{x^2 + y^2} + \frac{\beta x + \delta}{\alpha x + \gamma} = 0$$

oder auch

$$(2R + \beta)x^3 + \beta x y^2 + (R\gamma + \delta)x^2 + d y^2. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese Gleichung ist allgemeiner als (2), stimmt aber mit ihr überein, wenn man setzt:

$$2R\alpha + \beta = \frac{\beta}{3} = \frac{2R\gamma + \delta}{l} = \frac{\delta}{l}.$$

Infolgedessen wird die projektive Beziehung zwischen den Punkten N, N' durch die Gleichung dargestellt:

$$x' = R\frac{3x + l}{x + l};$$

sie kann daher durch die Bestimmung erhalten werden, daß den Werten $x = 0, -l, \infty$ die Werte entsprechen $x' = R, \infty, 3R$.

Außer dieser direkten Konstruktion des Foliums, wurde noch eine andere von G. de Longchamps[1]) angegeben, während noch andere sich als auf besonderen geometrischen Transformationen beruhend erweisen[2]); auf einige derselben werden wir im folgenden noch zurückkommen (s. Nr. **47**).

34. Aus Gleichung (1) folgt, daß die Hessesche Kurve des dadurch dargestellten Foliums ein anderes Folium ist, d. h. die Kurve

$$x^3 + y^3 + \tfrac{3}{2}\,axy = 0.$$

Aus derselben Gleichung ergibt sich folgende Polargleichung der Kurve:

$$\varrho = \frac{3a \sin\omega \cdot \cos\omega}{\sin^3\omega + \cos^3\omega},$$

die in vielen Fällen recht nützlich ist, z. B. um die Fläche der Kurve zu berechnen[3]); so wird man im speziellen finden, daß $\frac{3a^2}{2}$ sowohl den Flächeninhalt der Schleife als auch den des zwischen der Asymptote und den beiden unendlichen Zweigen belegenen Teiles ausdrückt[4]). Die Rektifikation der Kurve läßt sich hingegen nicht elementar bewirken, sondern erfordert elliptische Integrale (vgl. Nr. **20**).

Aus derselben Gleichung (1) ergibt sich folgende parametrische Darstellung:

$$x = \frac{3a\lambda}{1+\lambda^3}, \qquad y = \frac{3a\lambda^2}{1+\lambda^3},$$

und daraus die Bedingung für die Kollinearität der drei Punkte $(\alpha)\,(\beta)\,(\gamma)$

$$\alpha\beta\gamma + 1 = 0.$$

Die drei Wendepunkte der Kurve befinden sich also alle im Unendlichen, und nur einer ist reell. Die Gleichung der Tangente im Punkte (λ) ist

$$(\lambda^4 - 2\lambda)\,x - (2\lambda^3 - 1)\,y + 3a\lambda^2 = 0.$$

Die der Asymptote erhalten wir, wenn wir $\lambda = -1$ machen, daher ist sie

$$x + y + a = 0.$$

Weiter wollen wir uns nicht mit dem Cartesischen Folium befassen, da es eine Kurve von geringem Interesse ist, indem sie sich bei keinem

1) *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre,* S. 104—05.

2) *Intermédiaire* V, 1898, S. 102—04.

3) Die Einzelheiten der Berechnung finden sich in J. A. Serret, *Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Nach A. Harnacks Übersetzung. III. Aufl. neu bearbeitet von G. Scheffers* (künftig als *Serret-Harnack-Scheffers* zitiert) II (Leipzig, 1907) S. 270—271. Über die ersten Quadraturmethoden vgl. G. Loria, *Curve piane speciali nel carteggio di C. Huygens* (Bibl. math., 3. Reihe, VII, 1906, S. 271—274).

4) Andere verwandte elegante Sätze finden sich in P. Mansion, *Sur certaines courbes carrables algébriquement* (Nouv. Corresp. math. I, 1878).

geometrischen Problem zeigt[1]). G. Bellavitis glaubte, daß die Kurve die Inverse der gleichseitigen Hyperbel sei, den Scheitel als Pol genommen[2]); es läßt sich jedoch leicht einsehen, daß dies nicht der Fall ist[3]).

Bemerken wollen wir nur noch, daß man als Verallgemeinerungen der Kurve ansehen kann sowohl alle diejenigen, die durch Gleichung (3) dargestellt werden, deren Erzeugung wir erörtert haben, als auch diejenigen, die durch folgende Gleichung dargestellt werden:

$$ay^3 + bx^3 = abxy + c^3(x + y).$$ [4])

Noch weiter gehend und wichtiger ist die Verallgemeinerung, die aus der Betrachtung der Kurven von folgender Gleichung hervorgeht:

$$x^{2n+1} + y^{2n+1} = (2n - 1)\, ax^n y^n.$$ [5])

Gibt man dem n einen beliebigen ganzzahligen Wert, so erhält man dementsprechend eine rationale Kurve von der Ordnung $2n+1$, die im Koordinatenanfang einen $2n$-fachen Punkt, und als Asymptote die Gerade $x + y = (-1)^n \cdot a$ hat; jenachdem n gerade oder ungerade, ist das Verhalten der Kurve im Anfangspunkt verschieden; usw.

Achtes Kapitel.

Die Fokale von Quetelet oder schiefe Strophoide, die Logocyklika von Booth oder gerade Strophoide.

35. Wir betrachten einen Rotationskegel mit der Spitze V (vgl. Taf. I, Fig. 7). Sei g' eine Erzeugende und t eine Tangente senkrecht zu g'. Jede Ebene π durch t geführt, schneidet den Kegel in einem Kegelschnitt Γ, dessen Brennpunkte M_1 und M_2 seien; der Ort derselben, wenn sich π um t dreht, ist eine gewisse Kurve Φ. Da M_1 und M_2 sich auf der Senkrechten zu t, die durch den Berührungspunkt A geht, befinden, so liegt die Kurve auf einer durch A gehenden, zu t senkrechten Ebene, d. h. auf einer von A durch die Achse

---

1) Es gibt übrigens zwei Monographien über diese Kurve: Erdmann, *Das Descartessche Folium in seiner Verallgemeinerung* (Progr. Münster, 1871); Rychlicki, *Das Folium von Descartes* (Progr. Wongrowitz, 1882).

2) *Sulla classificazione delle curve di terz' ordine* (Mem. della Soc. Ital. delle Scienze XXV, Teil 2, 1851) S. 23.

3) Diese ist vielmehr eine Strophoide (Michel, *Démonstration élémentaire d'une théorème connu*, Journ. Math. spéc. 4. Serie, IV, 1895).

4) Reichenbach, *Diskuss. der durch d. Gleich.* $ax^3 + by^3 = abx + c^3(x+y)$ *dargestellten krummen Linie* (Münster, 1872).

5) Von diesen Kurven ist die Rede in den Questions 7772 u. 7840 der *Educ. Times* (XLIV, 1886, S. 88—90); jedoch ihre Haupteigenschaften, sowohl wie die Quadratur finden sich in Cesàro-Kowalewski, *Alg. Analysis und Integralrechnung*, S. 585 und 796.

des Kegels gehenden Ebene σ. Beachten wir nun, daß infolge eines bekannten Satzes von Dandelin und Quetelet es genügt, die Berührungspunkte der in den Kegel eingeschriebenen Kugeln, die π berühren, zu bestimmen, um M_1 und M_2 zu finden; die beiden Kugeln werden von σ in zwei größten Kreisen geschnitten, und daher läßt sich die Kurve Φ konstruieren, ohne daß man aus der Ebene σ herausgeht, durch folgendes Verfahren. Man zeichne die beiden Erzeugenden g' und g'' des gegebenen Kegels, die in die Ebene σ fallen, ebenso den Spurpunkt A der Tangente t; von A ziehe man eine beliebige Transversale, die g'' in B schneide, dann zeichne man die beiden Kreise, welche g', g'' und AB berühren; ihre Berührungspunkte mit der letzteren sind die Punkte der Kurve Φ. Diese Konstruktion kann in bemerkenswerter Weise vereinfacht werden. Man zeichne den Mittelpunkt P von $M_1 M_2$ bzw. AB; die analogen Punkte P liegen dann alle auf einer Parallelen p zu g''. Diese Gerade p wird dann durch die Mittelpunkte H und D der Strecken AV und AK gehen, wenn K einen Punkt von g'' bedeutet, derart, daß $VK = VA$, also VKA ein gleichschenkliges Dreieck ist. Setzen wir nun der Kürze wegen $VA = a$, $VB = b$, $AB = c$, so ist bekanntlich

$$AM_1 = \frac{a - b + c}{2}, \qquad BM_1 = \frac{-a + b + c}{2}$$

und da $AP = \frac{c}{2}$, so ist $PM_1 = PM_2 = \frac{a - b}{2}$,

aber

$$PD = \frac{1}{2} BK = \frac{a - b}{2},$$

und also

$$PM_1 = PM_2 = PD.$$

Nennen wir nun die Gerade AK q, so ergibt sich, daß die Kurve Φ auch auf folgende Weise erzeugt werden kann: Gegeben ein Winkel pq und ein Punkt A auf seinem Schenkel q; man ziehe durch A eine beliebige Gerade r, welche p in P schneidet; diejenigen Punkte M_1, M_2 von r, die denselben Abstand von P haben wie D von P, gehören der Kurve Φ an.

Betrachten wir dagegen statt des Kegels einen geraden Zylinder und verfahren wie vorhin, so sehen wir, daß der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte, die auf ihm von den durch eine zu einer Erzeugenden g' senkrechten Tangente t gehenden Ebenen π erzeugt werden, eine Kurve ist, die ganz in der Ebene σ liegt, die durch die Achse des Zylinders und den Berührungspunkt A von t geht (vgl. Taf. I, Fig. 8). Man erkennt überdies, daß die besprochene Kurve sich auf folgende Weise in der Ebene σ konstruieren läßt: Gegeben zwei Parallele g' und g'' und auf der ersteren ein Punkt A; man ziehe die

Transversale AB und bestimme auf AB die Berührungspunkte M_1 und M_2 derjenigen beiden Kreise, die außerdem die Geraden g' und g'' berühren: diese gehören jener Kurve an. Nennen wir P den Mittelpunkt von $M_1 M_2$, so wird der Ort der Punkte P die Halbierungslinie p des Streifens $g' g''$ sein. Ziehen wir durch A die Gerade q senkrecht zu g', g'', seien D und K die Schnitte mit p und g'', und schließlich O_1 und O_2 die Mittelpunkte der genannten Kreise, so sind offenbar die Dreiecke $PM_1 O_1$ und $PM_2 O_2$ einander als auch dem Dreiecke PDA kongruent und daraus ergibt sich insbesondere, daß

$$PM_1 = PM_2 = PD.$$

Im vorliegenden Falle läßt sich also die Kurve Φ auf dieselbe Weise wie im allgemeinen Falle zeichnen, indem man sich als Fundamentalelemente des Punktes A und des rechten Winkels der Geraden p und q bedient. Es ist klar, daß dieselbe Konstruktion sich auch so ausdrücken läßt: Gegeben ein System von sich in einem Punkte berührenden Kreisen und ein Punkt A auf ihrer gemeinsamen Tangente; der Ort der Endpunkte derjenigen Durchmesser dieser Kreise, die durch A gehen, ist eine Kurve Φ in bezug auf einen Zylinder[1]).

36. Es war gegen die Mitte des 18. Jahrhunderts, als die Kurve Φ ihren Einzug in die mathematische Literatur hielt; schon im Jahre 1757 wurde sie im IV. Bande der *Instituti Bononiensis Commentarii* veröffentlicht; diese enthielten zwei Abhandlungen von Gregor Casali, betitelt *De conicarum sectionum focis*, die gänzlich den Kurven Φ gewidmet waren. Ihr Ursprung geht jedoch noch ungefähr ein Jahrhundert zurück; dies bezeugt in der Tat Casali; sie wurden früher schon von Guido Grandi in einer nicht herausgegebenen Abhandlung[2]) und von Evangelista Torricelli behandelt; so erklärt sich der von Casali zur Bezeichnung der Kurve Φ angewendete Name Pteroides torricellanea[3]). Demnach hätte es den Anschein, daß man die Erfindung der betreffenden Kurve auf den berühmten Schüler Galileis zurückführen müßte, wenn nur nicht zwei Briefe existierten, die im Jahre 1645 an ihn gerichtet waren, und in denen eine planimetrische Definition der Kurve Φ in bezug auf einen Zylinder zu lesen ist und sogar der von Casali angewendete Name. Die bezüglichen Briefe[4]) wurden von Rom aus an Torricelli von F. de Verdus geschrieben, jenem „gentilhome bourdelois" und Herausgeber der berühmten *Observations sur la composition des mouvements et sur le*

---

1) Balitrand, *Note sur la strophoïde* (Journ. math. spéc. 3. Serie, III, 1889).

2) Nach Franchini (*Saggio sulla storia della matematica,* Lucca 1821, S. 226) hat G. Grandi zuerst die Kurvengleichung bestimmt.

3) Von τὸ πτερόν, der Flügel.

4) Veröffentlicht zugleich mit anderen von B. Boncompagni im *Bullettino di bibliografia* usw. VIII, 1875.

moyen de trouver les touchantes des lignes courbes von Roberval; von diesen Briefen ist der eine vom 19. Mai 1645 datiert, der andere ist unbekannten Datums, ist jedoch früher als der vorige und später als ein dritter vom 15. März 1645. Der wesentliche Inhalt derselben ist übereinstimmend, indem sie beide „die Beschreibung einer Linie, die in Frankreich Ala oder Pteroide genannt wird", enthalten, die de Verdus „an einem der letzten Tage" bekommen hatte, und die Anwendung der Methode der Tangenten, die unter dem Namen Roberval geht, auf dieselbe. Daraus geht dann hervor, daß die Erfindung der betrachteten Kurve sicherlich nicht Torricelli gebührt, sondern einem französischen Mathematiker, der vielleicht Roberval selbst gewesen ist.

Die auf einen Zylinder bezüglichen Kurven Φ scheinen nicht sobald untersucht zu sein, weder in Frankreich, wo sie das Licht erblickten, noch in Italien, wohin sie verpflanzt waren, noch anderswo; indem A. de Moivre im Jahre 1755 ihre Konstruktion in der Ebene fand[1]), bemerkte er die Ähnlichkeit der Gestalt mit dem Folium Cartesii, und gab auch die Quadratur an. Wir glauben nicht irre zu gehen, wenn wir behaupten, daß es diese Arbeit des berühmten englischen Mathematikers ist, der man das Eindringen derartiger Kurven in die sonst verbreiteten Lehrbücher verdankt; wie z. B. die *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* der D[na] Maria Gaetana Agnesi (I, Milano, 1748, S. 378—80 und 391—92), die *Analyse des lignes courbes algébriques* von G. Cramer (Genève, 1750, S. 411) und die *Institutiones analyticae* von V. Riccati und G. Saladini (Bononiae 1765, I, S. 328).

Die stereometrische Definition der Kurve Φ, die Casali mit so großer Gelehrsamkeit bearbeitet hatte, blieb unbekannt und begraben in den Abhandlungen der Akademie zu Bologna, bis B. Tortolini im Jahre 1860 es für nützlich erachtete, die Aufmerksamkeit der Gelehrten wieder auf die Arbeit des hervorragenden Italieners zu lenken[2]), veranlaßt hierzu durch den Umstand, daß von A. Quetelet im Jahre 1819 diese selbe Definition wieder gefunden war; sie ist in der Tat der Kern der *Dissertatio de quibusdam locis geometricis* (Gand), wo die Kurven Φ Fokalen[3]) oder reguläre Fokalen genannt werden, jenachdem sie sich auf einen Kegel oder Zylinder beziehen. Die Queteletsche Inaugural-Dissertation wurde der Ausgangspunkt der Dandelinschen Untersuchungen (*Mémoire sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique*; Mém. Acad. Belgique II, 1822), der von E. Külp (*De curva focali regulari*; Mannheim 1823) und von M. Chasles (*Aperçu histo-*

---

1) S. die schon zitierte Abh. *A ready description and quadrature of a curve of the third order resembling that commonly called the foliate* (Phil. trans. Nr. 345).

2) S. die bibliographische Revue *Sulla curva logociclica* (Ann. di Mat. III).

3) Andere gebrauchen den Namen Focales à noeud.

rique, Note IV), während die unzähligen in Frankreich über die Kurve Φ gemachten Untersuchungen größtenteils ihren Ursprung in einer im Jahre 1840 den Lyceen als Preisaufgabe gestellten Frage haben, die 1861 im Examen für die Zulassung zur École normale in Paris wieder vorgelegt wurde[1]). Es ist nicht unsere Absicht, vollständige Angaben hierüber zu machen, bemerken müssen wir jedoch, daß die ältesten derselben in der Note von Midy, *Sur le folium de Descartes* (Nouv. Ann. Math. III, 1849) enthalten sind[2]), und daß die erste Arbeit, in welcher sich der heute allgemeine Name Strophoide findet (von ὁ στρόφος, Wendung), der für die Kurve Φ angenommen ist[3]), die mit dem Titel *La strophoide* in den Nouv. Ann. Math. V, 1846 ist, die man Montucci verdankt und die oft irrtümlicher Weise G. Ritt zugeschrieben wurde. — Ferner wurde die reguläre Fokale oder gerade Strophoide (so genannt zum Unterschiede von der allgemeineren schiefen Strophoide) neuerdings von anderen erforscht und zwar von Lehmus, der sie ihrer Gestalt wegen Kukumaeide nannte[4]), von Booth, der wegen ihrer Beziehungen zu den Logarithmen und zum Kreise sie mit dem Namen Logocyklika belegte[5]), und von Rummer, der an ihr viele Eigenschaften entdeckte, die mit dem Begriffe der harmonischen Gruppe zusammenhängen und sie deswegen als harmonische Kurve bezeichnete[6]).

37. Die Gleichung der schiefen oder geraden Strophoide wird leicht abgeleitet, wenn man sich der zuletzt in Nr. 35 dargelegten Definition bedient. Bezeichnet man den Winkel pq mit α, nimmt A als Pol, q als Polar-Achse, so ergibt sich aus dem Dreiecke APD, wenn $AD = a$ gesetzt wird

---

1) Der Wortlaut derselben ist: Gegeben eine unendliche Mannigfaltigkeit homofokaler Kegelschnitte und ein Punkt ihrer Ebene; gefragt wird 1) welches ist der geometrische Ort der Berührungspunkte der von diesem Punkte an die genannten Kurven gezogenen Tangenten; 2) welches ist der geometrische Ort der Fußpunkte der von dem gegebenen Punkte zu den Kurven gezogenen Normalen; 3) welches ist der Ort der Fußpunkte der Senkrechten, die von dem gegebenen Punkte auf seine Polaren in bezug auf die gegebenen Kegelschnitte gefällt werden.

2) Daselbst ist die Kurve durch die Gleichung $y = x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ definiert, ähnlich der Gleichung $y = x\sqrt{\frac{a-x}{a+3x}}$ für das Folium Cartesii.

3) H. Brocard und P. Tannery, *Intermédiaire* IV, 1897, S. 87.

4) *Aufgaben aus der höheren Mathematik* (Berlin, 1842) S. 120. Der Name Kukumaeide war aber bereits von Uhlhorn (*Entdeckungen in der höheren Geometrie*, Oldenburg, 1809, S. 57) an die Kurve $[(x+a)^2 + y^2]\,x = a^2y^2$ vergeben worden, die augenscheinlich eine gerade Strophoide ist.

5) *On the logocyclic curve and the geometrical origine of logarithmes* (Quart. Journ. Math. III, 1860). Vgl. *A treatise on some new geometrical methods* I (London, 1877).

6) *Neue Sätze über eine krumme Linie mit vorzugsweise geometrischer Ableitung* (Heidelberg, 1868).

$$\frac{a}{\sin(\omega+\alpha)} = \frac{AP}{\sin\alpha} = \frac{DP}{\sin\omega},$$

daher

$$AP = \frac{a\cdot\sin\alpha}{\sin(\omega+\alpha)}, \qquad DP = \frac{a\cdot\sin\omega}{\sin(\omega+\alpha)};$$

und da nach der Konstruktion die Radienvektoren der Punkte M_1 und M_2 gleich $AP \pm DP$ sind, so folgt, daß

$$\varrho = a\frac{\sin\alpha \pm \sin\omega}{\sin(\omega+\alpha)} \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

die Polargleichung der schiefen Strophoide ist[1]). Wenn $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so wird diese zu

$$\varrho = a\frac{1\pm\sin\omega}{\cos\omega}, \quad \text{oder auch} \quad \varrho = a\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{\omega}{2}\right) \quad \dots \quad (2)$$

welche Gleichungen die gerade Strophoide darstellen. Gehen wir zu kartesischen Koordinaten über, so verwandelt sich (1) in eine Gleichung vierten Grades in x und y, aus welcher sich jedoch der Faktor $x\cdot\sin\alpha - y\cdot\cos\alpha$ abscheidet. Nach Wegschaffung desselben bleibt

$$(x^2+y^2)(x\sin\alpha + y\cos\alpha - 2a\sin\alpha) + a^2(x\sin\alpha - y\cos\alpha) = 0 \quad (3)$$

als Gleichung der schiefen Strophoide, und demnach

$$(x^2+y^2)(x-2a) + a^2x = 0, \quad \text{oder} \quad y = \pm(x-a)\sqrt{\frac{x}{2a-x}} \quad (4)$$

als Gleichung der geraden Strophoide, deren Asymptote die Gerade $x = 2a$ ist. In beiden Fällen **ist die Strophoide eine zirkulare Kurve dritter Ordnung, die durch den Punkt A geht,** und wenn gerade, symmetrisch ist in bezug auf die Gerade q. Verlegen wir den Anfang nach dem Punkte D, setzen also $x - a = x'$ und zur Abkürzung $\operatorname{cotg}\alpha = \gamma$, so werden (3) und (4) in die folgenden übergehen:

$$(x'+\gamma y)(x'^2+y^2) + a(x'^2 - 2\gamma x'y - y^2) = 0 \quad \dots \quad (5)$$

$$x'(x'^2+y^2) + a(x'^2-y^2) = 0\text{[2]}) \quad \dots \quad (6)$$

---

1) Man kann Gl. (1) in folgenden beiden Formen schreiben

$$\varrho = a\frac{\cos\frac{\alpha-\omega}{2}}{\cos\frac{\alpha+\omega}{2}}, \qquad \varrho = a\frac{\sin\frac{\alpha-\omega}{2}}{\sin\frac{\alpha+\omega}{2}}.$$

Unter den schiefen Strophoiden ist wegen der Anwendung auf die Kreisteilung diejenige besonders bemerkenswert, bei welcher $\alpha = \frac{\pi}{3}$; vgl. den Artikel *Freeths Nephroid* (Proc. Lond. Math. Soc. X, 1879).

2) Aus Gl. (6) folgt, daß die von J. de Vargas y Aquirre (*Catalogo general de curvas,* Madrid Acad. Mem., XXVI, 1908, S. 495) *Cornu'sches Blatt* genannte Kurve, nichts anderes als eine gerade Strophoide ist. — Setzt man ferner

$$\sqrt{2}\,x' = \xi + \eta, \ \sqrt{2}\,y = \xi - \eta, \ 2\sqrt{2}\,a = -3\alpha$$

Diese Gleichungen zeigen, **daß die Strophoide, die gerade sowie die schiefe, D zum Doppelpunkt hat, und daß die zugehörigen Tangenten zueinander senkrecht stehen**[1]). Nehmen wir diese als neue Achsen, so nimmt die Kurvengleichung folgende Gestalt an:

$$(ax+by)(x^2+y^2)-cxy=0 \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Setzt man dagegen in (6) $x'=\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}$, $y=\frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}}$, so erhält man

$$2\sqrt{2}a\xi\eta=\frac{\xi^4-\eta^4}{\xi-\eta}, \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

welche Gleichung von De Moivre wegen ihrer Analogie mit der des Folium Cartesii (vgl. Nr. 33) hervorgehoben wurde. Mit Benutzung von (5) erkennt man, daß die Koordinaten des singulären Brennpunktes der Strophoide (Schnittpunkt der Tangenten in den Kreispunkten) sind

$$x'=-a\frac{1-\gamma}{1+\gamma^2}, \quad y'=a\frac{\gamma(1-\gamma)}{1+\gamma^2}.$$

Kombinieren wir dagegen die Gleichung (7) mit $y=\lambda x$, so finden wir

$$x=\frac{c\lambda}{(a+b\lambda)(1+\lambda^2)}, \quad y=\frac{c\lambda^2}{(a+b\lambda)(1+\lambda^2)} \quad \ldots \quad (9)$$

als parametrische Darstellung der Kurve, die für viele Fälle sehr nützlich ist, und von welcher wir alsbald eine Anwendung machen werden. Aus (9) ergibt sich als Bedingung für die Kollinearität der drei Punkte (α), (β), (γ)

$$a+b\cdot\alpha\beta\gamma=0, \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

während die Bedingung der Konzyklität der vier Punkte (α), (β), (γ), (δ) ist

$$a^2-b^2\cdot\alpha\beta\gamma\delta=0. \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Daraus ergibt sich, daß, wenn der Krümmungskreis im Punkte (α) die Kurve in (α_1) schneidet, sein wird

$$a^2-b^2\cdot\alpha^3\alpha_1=0.$$

Ist daher α_2 gegeben, so bleiben die drei Punkte (α'), (α''), (α''') bestimmt durch

$$\alpha'=\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2\alpha_1}}, \quad \alpha''=\varepsilon\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2\alpha_1}}, \quad \alpha'''=\varepsilon^2\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2\alpha_1}},$$

---

so wird die Gleichung (6)

$$(\xi+\eta)(\xi^2+\eta^2)=3\alpha\xi\eta;$$

daraus folgt, daß auch das *zirkulare Folium* von C. Reuschle (*Praxis der Kurvendiskussion,* I Thl., Stuttgart 1886) eine gerade Strophoide ist.

1) Alle die Strophoiden können durch einen Apparat beschrieben werden, welchen man V. Lebeau verdankt; vgl. den Aufsatz desselben *Sur un nouveau curvigraphe* und die darauf folgende Abh. von J. Neuberg, *Sur les lignes tracées par le curvigraphe Victor Lebeau* (Liège Mém., 3e Sér., V, 1904).

wo ε eine imaginäre dritte Wurzel von 1 ist; da nun hieraus folgt, daß

$$b^2 \cdot \alpha\alpha'\alpha''\alpha''' - a^2 = 0,$$

so erhalten wir schließlich folgenden Lehrsatz: **Durch jeden Punkt der Strophoide gehen drei Kreise, die sie anderswo oskulieren; die Oskulationspunkte derselben liegen auf einem Kreise, der durch jenen Punkt geht.** Nennen wir nun „den einem Punkte (α) korrespondierenden Oskulationspunkt der Strophoide" den Schnittpunkt (α_1) derselben mit dem Kreise, welcher sie in (α) oskuliert, und betrachten wir vier konzyklische Punkte (α), (β), (γ), (δ) und die korrespondierenden Oskulationspunkte (α_1), (β_1), (γ_1), (δ_1), so bestehen die Gleichungen:

$$a^2 = b^2\alpha\beta\gamma\delta, \quad a^2 = b^2\alpha^3\alpha_1, \quad a^2 = b^2\beta^3\beta_1, \quad a^2 = b^2\gamma^3\gamma_1, \quad a^2 = b^2\delta^3\delta_1,$$

woraus durch Elimination von α, β, γ, δ sich ergibt

$$a^2 = b^2\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1,$$

welche Gleichung folgenden Satz ausdrückt: **Wenn vier Punkte einer Strophoide einem Kreise angehören, so trifft dasselbe zu für die korrespondierenden Oskulationspunkte.**

Die Krümmungsradien in O der zwei sich darin kreuzenden Zweige der Kurve (7) sind resp. $\frac{c^2}{2a}$ und $\frac{c^2}{2b}$.[1])

38. Will man die Untersuchung auf die gerade Strophoide beschränken, so bedient man sich zweckmäßig der Gleichung (2). Diese liefert als Ausdruck für die Radienvektoren zweier konjugierter (d. h. auf derselben von A ausgehenden Geraden gelegener) Punkte

$$AM_1 = a\frac{1-\sin\omega}{\cos\omega}, \quad AM_2 = a\frac{1+\sin\omega}{\cos\omega},$$

daraus folgt:

$$AM_1 \cdot AM_2 = a^2,$$

und demnach: **Die gerade Strophoide wird vermittels Transformation durch reziproke Radien mit A als Pol und a^2 als Potenz in sich selbst verwandelt.** Beachtet man ferner, daß $OP = \frac{a}{\cos\omega}$, so erkennt man, daß folgende elegante Beziehung besteht:

$$\frac{1}{AM_1} + \frac{1}{AM_2} = \frac{2}{AP}.$$

Seien nun s_t und s_n die polare Subtangente und Subnormale der Logocyklika, so hat man

$$s_t = a(1 \pm \sin\omega), \quad s_n = a\frac{1 \pm \sin\omega}{\cos^2\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Der erste dieser beiden Ausdrücke zeigt, daß die Gleichung des Ortes

1) Andere Eigenschaften derselben Kurve findet man im Aufsatze von C. Servais, *Sur la strophoïde oblique* (Mathésis, 3e Ser., VII, 1907).

der Endpunkte der polaren Subtangenten lautet

$$\varrho = a(1 \pm \sin\omega),$$

und dieser ist daher eine Kardioide (vgl. Abschn. III, Kap. 7); hingegen der Ort der Endpunkte der polaren Subnormalen hat die Gleichung

$$\varrho = a\frac{1 \pm \sin\omega}{\cos^2\omega}, \quad \text{oder } \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{2y}{a} = 1,$$

und besteht daher aus zwei Parabeln. Bezeichnet man nun mit s_t', s_t'' die polaren Subtangenten in zwei konjugierten Punkten, und mit s_n', s_n'' die entsprechenden Subnormalen, so hat man wegen (12)

$$s_t' + s_t'' = 2a, \quad \frac{1}{s_n'} + \frac{1}{s_n''} = \frac{2}{a},$$

durch Einfachheit und Eleganz bemerkenswerte Beziehungen.

Gleichung (2) führt zu folgender neuen parametrischen Darstellung:

$$x = a(1 \pm \cos\omega), \quad y = a\frac{\sin\omega(1 \pm \cos\omega)}{\cos\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

die man dadurch vereinfachen kann, daß man, was ja erlaubt ist, die doppelten Vorzeichen unterdrückt, indem man z. B. nur die unteren beibehält; dann ist die allgemeine Gleichung der Tangente:

$$[1 - (1 + \cos^2\omega)\sin\omega]x + \cos^3\omega \cdot y - a(1 - \sin\omega)^2 = 0.$$ [1]

Die Tangenten in zwei konjugierten Punkten schneiden sich im Punkte

$$x = a(1 + \sin^2\omega), \quad y = a\frac{\sin^3\omega}{\cos\omega};$$

der Ort der Schnittpunkte hat die Gleichung:

$$y^2(2a - x) = (x - a)^3$$

und ist daher (Nr. 24) eine Kissoide des Diokles. Hingegen ist, wie leicht zu beweisen, der Ort der Schnittpunkte der Normalen in zwei konjugierten Punkten eine Parabel.

Aus der Gleichung der Tangente ergibt sich, wenn man mit t_1, t_2 die Längen der Tangenten in zwei konjugierten Punkten bis zur Asymptote, und mit h_1, h_2 die Abstände der Tangenten selbst von A bezeichnet, daß

$$t_1 = t_2 = a\frac{\sqrt{1 + \cos^2\omega}}{\cos\omega}, \quad h_1 h_2 = a^2\frac{\cos^2\omega}{1 + \cos^2\omega},$$

und daher

$$t_1 t_2 \cdot h_1 h_2 = a^4.$$

---

1) Betreffs Konstruktion der Tangente nach der Methode von Roberval s. A. Saint-Germain, *Recueil d'exercises sur la mécanique rationnelle* (2. Aufl. Paris, 1889) S. 166.

Führen wir die hyperbolischen Funktionen ein, indem wir setzen

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \mathfrak{Tg}\frac{u}{2}, \quad \text{oder } \mathfrak{Cos}\, u = \sec\omega, \quad \mathfrak{Sin}\, u = \operatorname{tg}\omega,$$

so verwandelt sich (2) in folgende Gleichung

$$\varrho = a(\mathfrak{Cos}\, u \pm \mathfrak{Sin}\, u), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

die sich in hervorragender Weise dazu eignet, durch ein gleichförmiges und elegantes Rechnungsverfahren alle Eigenschaften der betrachteten Kurve aufzustellen.[1])

39. Die Quadratur der geraden Strophoide kann leicht mit Hilfe der Gl. (4) ausgeführt werden; man findet so, daß die Fläche der Schleife gleich $a^2 - \frac{1}{4}\pi a^2$ ist, während die Fläche zwischen den unendlichen Zweigen und der Asymptote gleich $a^2 + \frac{\pi a^2}{4}$ ist. Nicht schwieriger ist die Bestimmung des Schwerpunktes des durch Rotation der Schleife um ihre Symmetrieachse erzeugten Körpers[2]). Die Konstruktion der Krümmungskreise wurde neuerdings von O. Gutsche elementar begründet[3]). Die Rektifikation der Strophoide hingegen erfordert elliptische Integrale (vgl. Nr. **20**), und Booth hat gezeigt, daß jeder beliebige Bogen der Logocyklika gleich der Summe eines Bogens der gleichseitigen Hyperbel und dem einer Lemniskate ist, oder auch gleich der Summe eines Ellipsenbogens, eines Hyperbelbogens und einer Geraden ist[4]). Sehr zahlreich sind die geometrischen Fragen, bei denen die Strophoide auftritt, z. B. ist sie die Fußpunktkurve einer Parabel in bezug auf den Schnittpunkt der Direktrix mit der Achse[5]); zwei Briefe von G. A. Kinner und Chr. Huygens vom 18. Juli und 9. Aug. 1653 zeigen, daß sie eine Duplikatrix- und eine Sektrix-Kurve ist[6]); des weiteren bildet diese Kurve die Lösung eines Problems aus der geometrischen Optik[7]); schließlich trifft man auf sie in Fragen der darstellenden Geometrie[8]).

---

1) S. Kap. III des Werkchens von S. Günther, *Parabolische Logarithmen und parabolische Trigonometrie* (Leipzig, 1882).

2) S. Saint Germain (o. a. O.), S. 49.

3) Arch. Math. Phys., 3. Reihe, XIII, 1908, S. 197—202.

4) S. auch S. Günther, *Note sur la logocyclique ou strophoïde* (Mathésis l, 1881); P. Mansion, *Longueur de la bouche de la logocyclique ou strophoïde* (Das. VI, 1886); Cesàro-Kowalewski, *Alg. Analysis und Infinitesimalrechnung,* S. 786.

5) Wir überlassen es dem jungen Leser, diesen Satz zu beweisen.

6) *Œuvres de Huygens* I, S. 236 u. 238; vgl. G. Loria, *La strophoïde est une sectrice et une duplicatrice* (Mathésis II, Sér. VIII, 1898).

7) „Gegeben in einer Ebene ein leuchtender Punkt A und ein beobachtendes Auge in B; ein geradliniger Spiegel rotiert in dieser Ebene um den Punkt A; für jede seiner Lagen gibt es einen von A ausgehenden Strahl, welcher durch Reflexion an diesem durch den Punkt B hindurchgeht; welches ist der Ort der Inzidenzpunkte?" E. Sang, *On the curves produced by reflexion from a polished revolving straihgt wire* (Edinburgh Trans. XXVIII, Teil I, 1877); G. Loria, *Identité*

Zahlreich sind ferner die Methoden, die zu ihrer Erzeugung angegeben wurden. Wir führen z. B. diejenige an, auf Grund deren die gerade Strophoide sich als eine Kissoide (s. Nr. 29) abgeleitet aus einer Geraden und einem Kreise darstellt[1]), wie auch die, wonach die gerade Strophoide als Hüllkurve von Kreisen erscheint, deren Mittelpunkte C auf der Parabel $y^2 = 4a(a-x)$ liegen und deren Radien ausgedrückt werden durch $\sqrt{\overline{CO}^2 - a^2}$, und verweilen schließlich nur kurz bei einer, die mit dem Namen zweier bedeutender Geometer verknüpft ist.

L. J. Magnus hat in seiner *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie* (Berlin, 1833) S. 265 folgende Aufgabe behandelt: „Gegeben drei Punkte A, B, C; man suche den Ort der Punkte P derart, daß die Winkel APB, APC einander gleich sind.“ Magnus fand die Gleichung dieses Ortes und zeichnete die Figur; jene beweist und diese bestätigt uns, daß derselbe eine im allgemeinen schiefe Strophoide ist. Diese Tatsache wurde nur zufällig ein halbes Jahrhundert später bekannt, als O. Hermes der ausführlicheren Untersuchung der Magnusschen Kurve eine Abhandlung widmete[2]); P. H. Schoute[3]) hob dann kurz darauf hervor, daß sie eine Strophoide sei, und ferner machte er die Bemerkung, daß der von Magnus untersuchte Ort ein Spezialfall eines von Steiner mit folgenden Worten definierten sei: „Sind in einer Ebene zwei begrenzte Geraden AB und CD in beliebiger fester Lage gegeben, so besteht der Ort derjenigen Punkte von denen aus sie unter gleichen (oder Supplementieren) Winkeln gesehen werden, aus zwei Kurven dritten Grades. Beide Kurven gehen durch die vier Endpunkte der gegebenen Geraden sowie durch ihren gegenseitigen Schnittpunkt. Ferner haben die Kurven diejenigen zwei Punkte gemein, von denen aus beide Geraden unter rechten Winkeln erscheinen. Die zwei übrigen gemeinschaftlichen Punkte der Kurven sind imaginär und liegen auf der unendlich entfernten Geraden“[4]). Es möge noch angeführt werden, daß dieselbe Erzeugungsart der Strophoide, welche die Magnussche Aufgabe in sich schließt, von Cazamian[5]) im Jahre 1893 wieder aufgefunden

de la strophoïde avec la focale à noeud, *son application à l'optique géométrique* (Nouv. Ann. Math., 3e Ser. XVI, 1897).

8) J. de la Gournerie, *Traité de géométrie descriptive*. 2. Aufl. III. Teil (Paris, 1885). S. 149—50.

1) G. Bellacchi, *Lezioni ed esercizi di algebra complementare*, I. (Firenze, 1898). S. 44.

2) *Über eine gewisse Kurve des dritten Grades* (Crelles Journ. XCVII, 1884).

3) *Bemerkung anläßlich des Aufsatzes von Herrn O. Hermes* (Das. XCIX, 1886).

4) Crelles Journ. XLV, oder Steiners Werke II (Berlin, 1884) S. 487.

5) *Sur un lieu géométrique et ses applications* (Nouv. ann. 3e Série, XII, 1893). Vgl. auch die Bemerkungen von Valdès, *Sur la strophoïde* (Das. XIII, 1894).

wurde, der sie auch bemerkenswerten Umformungen unterzog, und bewies, daß die Brennpunktskurve einer Schar doppelt berührender Kegelschnitte auch eine (i. a. schiefe) Strophoide ist.[1])

Neuntes Kapitel.

Verallgemeinerungen der Strophoide.

40. Einige Eigenschaften der geraden Strophoide, die wir in Nr. 38 teils bewiesen, teils ausgesprochen haben, kommen viel allgemeineren Kurven zu, die unabhängig voneinander von drei Autoren, nämlich Bretschneider[2]), Rosenstock[3]) und Andreasi[4]) untersucht wurden. Wir wollen sie der Kürze halber Panstrophoiden nennen und zunächst folgende Definition von ihnen geben: „Wir betrachten (Taf. II, Fig. 9) ein Kreisbüschel mit den Grundpunkten B und C, die reell oder konjugiert imaginär sein können, und ein Strahlenbüschel, das zum Scheitelpunkt einen Punkt A der Geraden hat, die der Ort der Mittelpunkte der Kreise des Büschels ist; der Ort der Punkte, in welchen die Geraden des Büschels von den Kreisen des Büschels berührt werden, ist eine Panstrophoide.“ Indem jeder von A ausgehende Strahl r von zwei durch B und C gehenden Kreisen berührt wird, gibt es auf jeder von A ausgehenden Geraden zwei Punkte der Panstrophoide M_1 und M_2; sie heißen korrespondierende Punkte der Kurve. Sei L der Schnittpunkt der Geraden r mit BC; es ist klar, daß in dem Spezialfalle, wenn B und C zusammenfallen, die Strecken LM_1 und LM_2 beide gleich LB werden, und dann haben wir wieder die gewöhnliche Definition der geraden Strophoide.[5])

Um die Gleichung der Panstrophoiden zu finden, nehmen wir die Gerade BC (die immer reell ist) als y-Achse, und als x-Achse den Ort der Mittelpunkte der Kreise des Büschels. Wenn $-g$ die Abszisse des Punktes A ist und k (eine reelle oder rein imaginäre Größe) der absolute Wert von $\frac{1}{2}\overline{BC}$ ist, so lauten die Gleichungen eines Kreises und einer Geraden der betrachteten Büschel

$$x^2 - 2cx + y^2 - k^2 = 0 \quad . \quad . \quad (1) \qquad y = \lambda(x+g) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Da nun die Bedingung der Berührung zwischen den so dargestellten Linien lautet

$$c^2 + k^2 = \lambda^2(g^2 + 2cg - k^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

so ist die Gleichung der betreffenden Panstrophoide das Resultat der

---

1) V. Berghoff, Progr. Dortmund 1887.

2) *Die harmonischen Polarkurven* (Arch. Math. Phys. L, 1869).

3) *Über eine Gruppe ebener Kurven dritter Ordnung* (Programm Gotha, 1886).

4) *Studio analitico delle tre cubiche cicliche* (Giorn. di Mat. XXX, 1892).

5) Bretschneider nannte sie harmonische Schlinge.

Elimination von c und λ aus den Gleichungen (1), (2), (3), und demnach

$$x(x^2 + y^2) + g(x^2 - y^2) + k^2(x + g) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Die Form dieser Gleichung zeigt, daß die Panstrophoiden zirkulare Kurven dritter Ordnung und symmetrisch in bezug auf eine Achse sind; sie beweist ferner, daß eine solche Kurve durch die Punkte A, B und C geht, ebenso auch durch die Punkte der Abszissenachse, die die Abszissen $\pm ik$ haben (reell, wenn B und C imaginär sind und umgekehrt). Schreiben wir Gleichung (4) wie folgt

$$y = \sqrt{\frac{(x+g)(x^2+k^2)}{g-x}},$$

so sieht man, daß die Gerade $x = g$ eine Wendeasymptote ist. Wenn $k^2 > 0$, so besteht die Panstrophoide aus einem Schlangenzuge (s. die Figur), wenn $k^2 = 0$, ist der Anfangspunkt ein Doppelpunkt, wenn endlich $k^2 < 0$, besteht sie aus einem Oval und einem Schlangenzuge. Auch zwei Grenzfälle wollen wir anführen: wenn $g = 0$, so zerfällt die Kurve in die Gerade $x = 0$ und den Kreis $x^2 + y^2 + k^2 = 0$; wenn aber $g = \infty$, so besteht sie aus der unendlich fernen Geraden und der Hyperbel $x^2 - y^2 + k^2 = 0$.

Verlegen wir den Koordinatenanfang nach A, so wird Gleichung (4)

$$y^2 (2g - x) = (k^2 + g^2 + x^2 - 2gx)$$

und, wenn wir zu Polarkoordinaten übergehen:

$$\varrho^2 \cdot \cos\omega - 2g\varrho + (g^2 + k^2)\cos\omega = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Nennen wir die Radien zweier korrespondierenden Punkte M_1 und M_2, ϱ_1 und ϱ_2, und L den Schnitt von $M_1 M_2$ mit BC, so haben wir

$$AM_1 = \varrho_1 = \frac{g - \sqrt{g^2 \sin^2\omega - k^2 \cos^2\omega}}{\cos\omega},$$

$$AM_2 = \varrho_2 = \frac{g + \sqrt{g^2 \sin^2\omega - k^2 \cos^2\omega}}{\cos\omega},$$

$$AL = \frac{g}{\cos\omega},$$

und daher

$$LM_2 = AM_2 - AL = \frac{\sqrt{g^2 \sin^2\omega - k^2 \cos^2\omega}}{\cos\omega} = AL - AM_1.$$

L ist aber der Mittelpunkt von $M_1 M_2$; die Gerade BC ist somit **der Ort der Mittelpunkte der Sehnen, die durch ein Paar korrespondierender Punkte begrenzt werden.** Dieser Satz kann übrigens leicht geometrisch bewiesen werden.

Bemerken wir noch, ohne es zu beweisen, daß 1) die Normalen in zwei beliebigen korrespondierenden Punkten sich in einem Punkte treffen, dessen geometrischer Ort die Parabel $y^2 + 4gx = 0$ ist, 2) die absolute Invariante der Kurve (s. Nr. **12**) gleich $\frac{g-k}{g+k}$ ist, und

3) die Kurve in endlicher Entfernung acht Wendepunkte hat, die zu je zweien auf vier Parallelen zur y-Achse liegen, deren Abszissen ein äquianharmonisches Verhältnis bilden.

41. Andere Verallgemeinerungen der geraden Strophoide sind die Kurven mit der allgemeinen Gleichung[1]):

$$(x+y)(x^2-2kxy+y^2)=2(1+k)axy, \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

welche L. Burmester[2]) *zweiteilige Fokalkurven* genannt hat. Setzen wir darin $k=0$, so erhalten wir die Gleichung der Logocyklika, für $k=\frac{1}{2}$ dagegen erhalten wir die des Folium Cartesii.

Mehr geometrisch ist folgende Verallgemeinerung[3]): Gegeben in einer Ebene zwei Punkte O und A, sowie eine Gerade r; M sei ein beliebiger Punkt derselben. Man ziehe die Gerade OM und nehme auf dieser zwei Punkte P, P' so, daß $MP=MP'=MA$ ist. Der Ort der Punkte PP' ist immer eine Kurve dritter Ordnung, die durch ihren eigenen singulären Brennpunkt hindurch geht; sie ist eine (gerade oder schiefe) Strophoide, wenn die Gerade r durch A geht, andernfalls eine strophoidale Kurve dritter Ordnung, welche auf unendlich viele Weisen als der Ort der Brennpunkte einer Kegelschnittschar betrachtet werden kann.

Von ganz anderer Natur ist die von Picquet[4]) in folgendem Orts-Problem angegebene Verallgemeinerung: „Gegeben ein Kegelschnitt Γ und eine feste Tangente a desselben mit den Punkten M und N, ferner ein dritter fester Punkt O auf Γ (s. Taf. II, Fig. 10). Man betrachte eine beliebige Tangente t der Kurve und nenne u die Gerade, welche den Punkt O mit dem harmonisch konjugierten C' des Punktes $C\equiv at$ in bezug auf das Paar MN verbindet; man finde den Ort des Punktes $tu\equiv P$." Es ist klar, daß dieser Ort durch eine Projektivität erzeugt wird, die zwischen dem Strahlenbüschel mit dem Scheitel O und dem Büschel der Tangenten des Kegelschnitts Γ besteht. Der Ort selbst ist demnach eine Kurve dritter Ordnung, die O als Doppelpunkt hat. Picquet hat bemerkt, daß sie die Projektion der Fußpunktkurve einer Parabel in bezug auf einen Punkt der Leitlinie ist.

Noch weiter gehen zwei Verallgemeinerungen, die wir hier anführen wollen. Die eine wurde von Barbarin in der *Revue de mathématiques spéciales*, 1894 angegeben und ist im Grunde genommen eine Methode, aus einer Kurve unzählige andere abzuleiten. Er nimmt eine beliebige Kurve Γ als gegeben und zwei Punkte O' und O'' in deren Ebene. Man greife einen beliebigen Punkt M von Γ heraus,

---

1) Cesàro-Kowalewski, *Alg. Analysis und Infinitesinalrechnung,* S. 573.

2) *Lehrbuch der Kinematik* (Leipzig, 1888) S. 38.

3) Vgl. Lagrange, *Sur les cubiques strophoidales* (Nouv. Ann. Mathém. 3e Sér. XIX, 1900).

4) *Géométrie analytique* (Paris, 1882) S. 552.

verbinde ihn mit O' und schneide die Verbindungslinie mit dem Kreise, dessen Zentrum M ist und dessen Radius MO''. Der Ort der Schnittpunktepaare ist eine Kurve, welche die Strophoidale von Γ heißt[1]). G. de Longchamps zeigte, wie man ihre Tangente konstruieren kann[2]).

Die andere rührt von W. W. Johnson her[3]). Er betrachtete den Ort der Punkte P, in denen sich zwei Gerade schneiden, die um zwei feste Punkte A und B sich drehen in der Art, daß, wenn φ und ψ die von PA und PB mit AB gebildeten Winkel sind und α ein gegebener Winkel, man beständig hat

$$n\psi \pm m\varphi = \alpha. \qquad (7)$$

Die Größen m und n kann man als beliebig annehmen, will man jedoch eine algebraische Kurve erhalten, so muß man sie als kommensurabel annehmen; demnach kann man sie ganzzahlig und relativ prim annehmen. Unter dieser Voraussetzung wollen wir den Ort der Punkte P als allgemeine Strophoide bezeichnen. Um ihre Gleichung zu erhalten, nehmen wir A als Anfangspunkt, AB als x-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems und setzen ferner

$$AB = a; \quad (x + iy)^n = X_n + iY_n, \quad (\overline{a - x + iy})^m = X'_m + iY'_m$$
$$x + iy = \sigma e^{i\psi}, \qquad \overline{a - x + iy} = \varrho e^{i\varphi};$$

dann haben wir

$$X_n + iY_n = \sigma^n \cdot e^{in\psi}, \qquad X'_m \pm iY'_m = \varrho^m \cdot e^{\pm mi\varphi},$$
$$(X_n + iY_n)(X'_m \pm iY'_m) = \varrho^m \sigma^n \cdot e^{i(n\psi \pm m\varphi)},$$

oder, mit Benutzung der Gleichung (7),

$$(X_n + iY_n)(X'_m \pm iY'_m) = \varrho^m \sigma^n \cdot e^{i\alpha},$$

oder auch

$$(X_n X'_m \mp Y_n Y'_m) + i(Y_n X'_m \pm X_n Y'_m) = \varrho^m \sigma^n (\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Diese Gleichung zerfällt in die zwei

$$X_n X'_m \mp Y_n Y'_m = \varrho^m \sigma^n \cdot \cos\alpha; \qquad Y_n X'_m \pm X_n Y'_m = \varrho^m \sigma^n \cdot \sin\alpha.$$

Eliminiert man aus diesen $\varrho^m \sigma^n$, so erhält man schließlich

$$(X_n X'_m \mp Y_n Y'_m) - \cot\alpha\,(Y_n X'_m \pm X_n Y'_m) = 0. \qquad (8)$$

Diese Gleichung vom Grade $(m + n)$ ist die der allgemeinen Strophoiden. Für $m = 1$, $n = 2$, und wenn man das Minus-Zeichen nimmt,

---

1) Wenn Γ eine Gerade ist, so erhält man wiederum die Lagrangesche Erzeugung der strophoidalen Kurven (s. oben).

2) *Sur les strophoidales* (Mathésis, 2e Série, IV, 1894).

3) *The strophoides* (Amer. Journ. Math. III, 1881). Vgl. auch *A note on the strophoides* (J. Hopkins University Circulars II, 1883), wo E. Barnes auf die Kurven Johnsons die Quaternionen anwendet.

erhält man die schiefe Strophoide, die also die bemerkenswerte Eigenschaft besitzt, die durch die Beziehung $2\psi - \varphi = \alpha$ ausgedrückt wird.

Zum Schlusse sei bemerkt, daß auch die stereometrische Urdefinition (Nr. **35**) der Strophoide verallgemeinert wurde und zu zwei speziellen Kurven vierter Ordnung führte[1]).

Zehntes Kapitel.

Die Slusesche Konchoide.

42. Unter den speziellen zirkularen Kurven dritter Ordnung gibt es eine, die der Aufmerksamkeit der modernen Geometer verborgen blieb, bis zu dem Zeitpunkte, in welchem der Briefwechsel zwischen R. de Sluse und C. Huygens veröffentlicht wurde[2]). Wir wollen sie die Slusesche Konchoide nennen und folgendermaßen definieren: „Es sei gegeben ein Punkt O (s. Taf. II, Fig. 11), eine Gerade r und eine Konstante k^2, man ziehe durch O einen beliebigen Strahl, der r in M schneidet und trage auf OM von M aus nach der entgegengesetzten Seite als wo O liegt eine Strecke MP ab, derart, daß $OM \cdot MP = k^2$; der Ort von P ist dann eine Slusesche Konchoide“[3]). Nehmen wir O als Pol, das von O auf r gefällte Lot als Polarachse und bezeichnen wir den Abstand des Punktes O von r mit a, so haben wir

$$OP = \varrho, \quad OM = \frac{a}{\cos\omega}, \quad MP = \varrho - \frac{a}{\cos\omega}$$

und somit lautet die Polargleichung der Kurve

$$a(\varrho\cos\omega - a) = k^2\cos^2\omega \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Die kartesische Gleichung hingegen ist

$$a(x-a)(x^2+y^2) = k^2x^2 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Wenn man die Strecke $\frac{k^2}{OM}$ von M aus nach der anderen Seite abtragen würde, nach O hin als MP', so würde man die Kurve erhalten haben

$$a(x-a)(x^2+y^2) = -k^2x^2 \quad \ldots \ldots \quad (2')$$

die nicht mehr muschelähnliche Gestalt hat, die wir aber dennoch —

---

1) H. B. Newson, *A pair of curves of the fourth degree and their application in the theory of quadrics* (Amer. Journ. Math. XIV, 1892).

2) C. Le Paige, *Correspondance de R. de Sluse* etc. (Bullettino di Bibliografia ecc. XVII, 1884). Vgl. G. Loria, *Une courbe oubliée* (Mathésis 2e Ser. VII, 1897).

3) Brief vom 6. Oktober 1662 in *Œuvres de Huygens* IV, S. 247. Der oben definierten Kurve wird Erwähnung getan vom Marquis de l'Hôpital in seiner *Analyse des infiniment petits* (S. 67 der II. Aufl., Paris 1705).

wegen der Ähnlichkeit der Gleichungen — noch Slusesche Konchoide nennen wollen; mit anderen Worten: wir wollen die Möglichkeit zulassen, daß in Gleichung (2) k^2 negativ sei[1]).

Um eine bequemere Konstruktion unserer Kurve zu erhalten, betrachten wir den Ort der Punkte N derart, daß $OM \cdot ON = k^2$, wo O, M, N in gerader Linie liegen sollen. Dieser Ort ist der Kreis K, der durch den Anfangspunkt geht und als Mittelpunkt den Punkt $C\left(\frac{k^2}{2a}, 0\right)$ hat; wir haben dann $ON = MP = P'M$; also: „Gegeben ein Kreis K, ein Punkt O seiner Peripherie und eine Gerade r, die parallel läuft zur Tangente in O; man ziehe eine beliebige Gerade, die K in N und r in M schneidet, auf dieser Geraden trage man von M aus nach O hin (oder auch nach der entgegengesetzten Seite) die Strecke MP (oder MP') gleich ON ab; der Ort der Punkte P (oder P'), die man so erhält, ist eine Slusesche Konchoide."

O ist ein Doppelpunkt dieser Kurve; die zugehörigen Tangenten werden zusammen dargestellt durch die Gleichung

$$(k^2 - a^2)\, x^2 - a^2 y^2 = 0,$$

der Punkt ist daher ein Knoten, eine Spitze oder isolierter Punkt, jenachdem $k \gtreqless a$ ist. Im ersten Falle haben die zwei Kurvenzweige in O dieselbe durch $\frac{a}{k\sqrt{k^2 - a^2}}$ ausgedrückte Krümmung[2]).

Kombinieren wir die Gleichung (2) mit $y = \lambda x$, so erhalten wir folgende parametrische Darstellung:

$$x = a + \frac{k^2}{a(1+\lambda^2)}, \qquad y = a\lambda + \frac{k^2 \lambda}{a(1+\lambda^2)} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

1) Im Falle $k = a$ fallen die Kurven (2') und (2) mit einer Kissoide und ihrer Begleitkurve zusammen.

2) Es verdient bemerkt zu werden, daß die Sluseschen Konchoiden unabhängig von ihrem ersten Entdecker vorkommen. So in der *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* von G. Cramer (Genève, 1750 S. 441) wo sich die Gleichung findet

$$x(x^2 + y^2) = (b - R)\, x^2 + b y^2,$$

die offenbar auf die Form (2) zurückführbar ist. Daher der Name *Cramersche Kurve*, der ihr von H. Rieder in seiner Dissertation *Untersuchung einer zweivierdeutigen kinetographischen Verwandtschaft* (München 1907, S. 31—33) gegeben wird; sie ist dort verallgemeinert in die folgendermaßen dargestellte Kurve

$$(by - ax)(x^2 + y^2) + (ab - aR)\, x^2 + aby^2 + bRxy = 0.$$

Andrerseits hat E. Cavalli (*Le figure reciproche e la trasformazione quadratica nella cinematica*, Mem. Accad. Napoli II. Ser. IX, 1899) die Kurve betrachtet

$$(x - a)(x^2 + y^2) + bx^2 = 0$$

und sie in Rücksicht darauf, daß sie für $b = a$ eine Kissoide darstellt, Pericissoide oder Hypocissoide genannt, jenachdem $a \gtrless b$.

Daraus leitet man leicht folgende Bedingung für die Kollinearität der drei Punkte $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ ab:

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = \frac{a^2 + k^2}{3a^2} \cdot \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Infolgedessen hat die Kurve (abgesehen von einem unendlich fernen Wendepunkt) noch zwei Wendepunkte in endlicher Entfernung[1]), deren Parameter gleich $\pm \frac{\sqrt{a^2 + k^2}}{3a}$ und deren Koordinaten

$$x = \frac{4a(a^2 + k^2)}{4a^2 + k^2}, \qquad y = \pm \frac{4(a^2 + k^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{3}(4a^2 + k^2)} \text{ sind.}$$

Durch Elimination von k erhalten wir die Gleichung

$$x(x^2 + y^2) = 4ay^2,$$

welche eine Kissoide darstellt; wir erhalten daher folgenden von Sluse entdeckten Satz[2]): **Der Ort der Wendepunkte aller Sluseschen Konchoiden, die denselben Doppelpunkt und dieselbe Asymptote haben, ist eine Kissoide des Diokles, die jenen Punkt als Spitze und ihre Asymptote parallel jener, aber in einem vierfachen Abstande von dem singulären Punkte hat.**

Die Gleichungen (3) liefern uns:

$$a^2(\beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\delta + \alpha\beta\gamma) - (a^2 + k^2)(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 0 \quad (5)$$

als Bedingung der Konzyklität der vier Punkte $(\alpha), (\beta), (\gamma), (\delta)$. Überlassen wir es dem Leser, daraus abzuleiten, daß durch jeden Punkt der Konchoide drei Kreise gehen, die sie anderswo oskulieren; die drei Oskulationspunkte gehören immer einem Kreise an, der durch den Anfangspunkt geht; dagegen gibt es in jedem Punkte der Kurve zwei Kreise, die die Kurve hier berühren und noch in einem anderen Punkte usw.

Wir schließen mit dem Beweise einer Bemerkung von J. Neuberg[3]) **daß die Slusesche Konchoide die Fußpunktkurve einer Parabel in bezug auf einen Punkt der Achse ist.** In der Tat hat die Fußpunktkurve der Parabel $y^2 = 2px$ in bezug auf den Punkt $(\alpha, 0)$ die Gleichung

$$2x(x - \alpha)^2 + 2(x - \alpha)y^2 + py^2 = 0;$$

setzen wir nun $x - \alpha = x'$, so wird diese zu

$$\left(x' + \frac{p}{2}\right)\left(x'^2 + y^2\right) = \left(\frac{p}{2} - \alpha\right)x'^2;$$

---

1) Die Bestimmung derselben ist in einem Briefe von Sluse vom 12. Jan. 1663 (o. a. Bd. S. 292) angegeben als von Huygens ausgeführt.

2) S. den zuerst zitierten Brief von Sluse.

3) S. die Schlußnote in dem angeführten Artikel *Une courbe oubliée.*

und da diese von der Form der Gleichung (2) ist, so ist die behauptete Eigenschaft bewiesen.

Wenn man den positiven Sinn auf der x-Achse umkehrt, so nimmt die Gleichung (2) folgende Gestalt an

$$(x+a)(x^2+y^2) = -\frac{k^2}{a}x^2;$$

und wenn man im speziellen $k^2 = -4a^2$ nimmt, so wird sie zu

$$(x+a)(x^2+y^2) = 4ax^2,$$

welche Kurve als Burtons Trisektrix bezeichnet wird, nach dem amerikanischen Geometer, der sie 1831 zur Lösung des Problems der Winkeldreiteilung bekannt gab und deren Zeichnung mit Hilfe eines Gelenksystems lehrte[1]).

Elftes Kapitel.

Rationale Kurven dritter Ordnung, die die unendlich ferne Gerade berühren, insbesondere die Rollesche Kurve.

43. Eine rationale Kurve dritter Ordnung, welche die unendlich ferne Gerade berührt, kann immer durch eine Gleichung von der Form $u_1 v_1{}^2 + u_2 = 0$ dargestellt werden, wo u_1 und v_1 lineare und u_2 eine quadratische Form in x und y ist. Um dies zu erhalten, genügt es den singulären Punkt, den die Kurve besitzt, als Anfangspunkt zu nehmen. Über derartige Kurven gilt der folgende

Satz: Gegeben eine Parabel, ein Punkt O derselben und eine Gerade r in ihrer Ebene, man ziehe von O einen beliebigen Strahl, der die Parabel in O' und die Gerade in P schneidet und bestimme auf dieser einen Punkt P' derart, daß die beiden Strecken OO', PP' denselben Punkt als Mittelpunkt haben[2]). Der Ort von P' ist eine Kurve dritter Ordnung, die O als Doppelpunkt und die unendlich ferne Gerade als Tangente hat.

Beweis: Die gegebene Parabel werde durch die Gleichungen $x = \frac{\lambda^2}{2p}$, $y = \lambda$ dargestellt; die Gerade r sei die Verbindungslinie der Punkte (α), (β); sie hat also die Gleichung $2px - (\alpha+\beta)y + \alpha\beta = 0$. Der Punkt O' habe den Parameter λ; eine leichte Berechnung zeigt dann, daß die Koordinaten von P' sind

---

1) Vgl. G. Scott, *On a looped curve of the third degree which facilitats the trisection of angles and its mechanial description by continuous motion* (Educ. Times, II Ser. IV, 1903).

2) Nach der in der Dreiecksgeometrie üblichen Bezeichnungsweise heißt P' der isotomische Punkt von P in bezug auf das Punktepaar OO'.

$$x = \frac{\lambda^2}{2p} - \frac{\alpha\beta\lambda}{2p(\alpha+\beta-\lambda)}, \quad y = \lambda - \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta-\lambda};$$

durch Elimination von λ erhält man:

$$\alpha\beta y^2 - 2p(\alpha+\beta)xy + 4p^2x^2 = 2y^2[px - (\alpha+\beta)y] \quad . \quad (1)$$

als Gleichung des Ortes der Punkte P'; durch ihre Form beweist diese den obigen Satz.

Schreiben wir die Gleichung (1) folgendermaßen:

$$(2px - \alpha y)(2px - \beta y) = 2y^2[px - (\alpha+\beta)y]; \quad . \quad . \quad (2)$$

so erkennt man, daß O ein Knoten, eine Spitze oder ein isolierter Punkt ist, je nachdem die Gerade r die Parabel schneidet, berührt oder nicht schneidet. Die zugehörigen Tangenten sind die Geraden, die O mit den Punkten (α) und (β) verbinden. Im Falle die Kurve eine Spitze hat, wird (1') zu

$$(2px - \alpha y)^2 = 2y^2(px - 2ay).$$

Diese Gleichung kann auf die Form gebracht werden:

$$xy^2 = a(y - mx)^2;$$

für $m = -1$ wird diese dann

$$xy^2 = a(x+y)^2,$$

und die zugehörige Kurve ist — wir wissen nicht, aus welchem Grunde — die Rollesche Kurve genannt worden[1]). Ihre Gestalt wird durch Fig. 12 auf Taf. II wiedergegeben.

Zwölftes Kapitel.

Versiera, Visiera und Pseudo-Versiera.

44. Es sei ein Kreis gegeben mit dem Durchmesser AC (s. Taf. II, Fig. 13). Der Ort der Punkte M, so beschaffen, daß, wenn man die Gerade MDB senkrecht zu AC zieht und die Schnittpunkte derselben mit dem Durchmesser und der Peripherie des Kreises mit B und D bezeichnet, man die Proportion hat

$$AB : BD = AC : BM \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ist eine Kurve, die sich im I. Bande (S. 380—81) der *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* von D[na] Maria Gaetana Agnesi (Milano, 1748) findet, woselbst sie mit dem Namen „la versiera" bezeichnet ist. Die Gleichung der Kurve — in der hier unten

1) Elgé, *Sur la courbe de Rolle. Sa construction par points et par tangents* (Journ. math. spéc., 4[e] Ser. V, 1896). Dort ist die oben angegebene allgemeine Konstruktion für den betrachteten besonderen Fall dargelegt.

mit (2′) bezeichneten Form — findet sich schon in einem Passus bei Fermat[1]), aus dem man ersieht, daß dieser die Gleichung der Kurve fand und sich schon mit ihrer Quadratur beschäftigt hat; der oben angeführte Name jedoch findet sich zuerst in einer Note zum *Trattato del Galileo del moto naturalmente accelerato, del Padre Abate D. Guido Grandi* (Opere di G. Galilei, T. III, Firenze 1718, S. 393), wo man liest, daß der Name Versiera (Lat. Versoria) aus „sinus versum" abgeleitet wurde und daß die Kurve selbst durch Grandi in seiner berühmten Abhandlung über die *Quadratura circuli et hyperbolae* (Pisis, I. Aufl. 1703; II. Aufl. 1710) definiert und untersucht wurde[2]).

In dem Agnesischen Werke wird nicht eine vollständige Untersuchung der Kurve angestellt, jedoch wird bemerkt (S. 391—93), daß sie leichter auf folgende Weise konstruiert werden könne: „Man ziehe durch den Endpunkt A des gegebenen Durchmessers einen beliebigen Strahl, der die Peripherie des Kreises zum zweitenmal in D trifft und in E die Tangente desselben in C; die durch D und E bezüglich zur Tangente und zum Durchmesser AC gezogenen Parallelen treffen sich in einem Punkte M der Versiera." In der Tat folgt aus dieser Konstruktion, daß $AB:BD = AC:CE$, was mit (1) übereinstimmt, indem ja $CE = BM$. Bezeichnen wir mit a den Durchmesser des gegebenen Kreises, nehmen AC als y-Achse und A als Anfang, so läßt sich die zuletzt geschriebene Proportion in folgender Form ausdrücken:

$$\frac{y}{\sqrt{y(a-y)}} = \frac{a}{x},$$

oder, was dasselbe ist

$$x^2y = a^2(a-y) \quad (2) \qquad \text{oder auch} \quad y = \frac{a^3}{a^2 - x^2}.\,^{3)} \quad (2')$$

Die Versiera ist also eine rationale Kurve dritter Ordnung, welche die x-Achse als Wendeasymptote hat, in C den gegebenen Kreis berührt und den unendlich fernen Punkt des Durchmessers AC zum isolierten Punkt hat. Es ist klar, daß sie folgender parametrischer Darstellung fähig ist

$$x = \lambda, \quad y = \frac{a^3}{a^2 + \lambda^2}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

1) S. die berühmte Abhandlung *De aequationum localium transmutatione et emendatione* (*Œuvres de Fermat* I, S. 279—70 und III, 233—34); vgl. auch *Œuvres de Huygens* X (La Haye, 1905) S. 364—373.

2) S. die Note von G. Vacca, *Sulla versiera* (Bull. bibl. storia Sc. mat. III, 1901, S. 33).

3) Setzt man $x = y'$, $a - y = x'$, so wird (2) $y' = a\sqrt{\frac{x'}{a-x'}}$, die von Mister angewandte Gleichung (*Propriété de la courbe d'Agnesi*; Mathésis VII, 1887); setzt man $a = 2a'$, so erhält man die von J. Booth (*A treatise on some new geom. methods,* I. London 1873, S. 302—303) bevorzugte Gleichungsform von „the witch or curve of Agnesi".

dementsprechend hat man als Kollinearitäts-Bedingung für drei Punkte (α), (β), (γ)

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = a^2,$$

woraus sich ergibt, daß die Kurve in endlicher Entfernung zwei Wendepunkte besitzt mit den Koordinaten:

$$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{3a}{4}.$$

Aus Gleichung (2) ergibt sich:

$$\int y \cdot dx = a^3 \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = a^2 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + const.,$$

und demnach

$$\int\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} y \cdot dx = 4\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2;$$

daher ist **die zwischen der Versiera und ihrer Asymptote belegene Fläche gleich dem vierfachen Inhalt des erzeugenden Kreises.**[1])

Aus derselben Gleichung (2) folgt

$$\int y^2 \cdot dx = a^6 \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{a^4 x}{a^2 + x^2} + \frac{a^3}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a},$$

daher

$$\pi \int\limits_{x=-\infty}^{x=+\infty} y^2 \cdot dx = 2 \cdot \frac{\pi^2 a^3}{4},$$

welches zeigt, **daß die Versiera und der erzeugende Kreis durch Rotation um die Asymptote Volumina erzeugen, von denen das erstere das Doppelte des zweiten ist.**

Die für die Versiera angegebene Konstruktion ist einer naheliegenden Verallgemeinerung fähig, indem jene ein Spezialfall der folgenden ist: Gegeben ein Kreis **K** mit dem Zentrum C und dem Radius r, ein Punkt O und eine Gerade d in der Ebene des Kreises. Man ziehe durch O einen beliebigen Strahl, der d in D und **K** in N trifft. Die durch N zu d gezogene Parallele schneide die Senkrechte aus D zu d in einem Punkte M, dessen Ort ist im allgemeinen eine Kurve vierter Ordnung. Befindet sich jedoch O auf der Peripherie von **K**, so zerfällt sie in die von O zu d gezogene Parallele und in eine Kurve dritter Ordnung, die eine Versiera wird, wenn d Tangente von **K** im anderen Endpunkte des Durchmessers CO ist. Ist dagegen OC parallel zur Geraden d, so ist die betreffende Kurve eine Newton-

1) Ein ähnlicher Satz gilt für alle durch die Gleichung

$$y(x^2 + a^2) = ar^2$$

dargestellten Kurven, wie H. Wieleitner (*Über zwei Familien von rationalen Kubiken,* Monatshefte Math. Phys. XVIII, 1907, S. 132—137) bewiesen hat.

sche Serpentine (Schlangenkurve)[1]. Es soll bemerkt werden, daß, wenn man in dem allgemeinen Falle O zum Koordinatenanfang nimmt und zur x-Achse eine Parallele zu d, zwischen den Koordinaten der Punkte $N(x, y)$ und $M(x', y')$ die Beziehungen bestehen $x' = \frac{ax}{y}$, $y' = y$, **also sind die Versiera, die Serpentine und die anderen eben betrachteten Kurven Hyperbolismen von Kreisen** (s. Nr. 15).

45. G. Peano hat auf S. 87 seiner *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Torino, 1887) eine Kurve betrachtet, die ihrer Gestalt nach der Versiera ähnlich ist und die er Visiera der Agnesi genannt hat. Ihre Konstruktion ist folgende: „Man betrachte den Kreis, der auch zur Konstruktion der Versiera diente (Taf. II, Fig. 13), und ziehe durch A einen beliebigen Strahl, der die Tangente an **K** in C und die Peripherie bezüglich in T und U schneidet. Der Mittelpunkt N der Strecke TU gehört dem fraglichen Orte an.“

Sind ϱ, ω die Polarkoordinaten von N in bezug auf A als Pol und den Durchmesser AC als Polarachse, so hat man

$$\varrho = AN = \frac{1}{2}(AT + AU) = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{\cos\omega} + \cos\omega\right) \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

woraus sogleich folgt (vgl. Nr. **24**), daß die Visiera nichts anderes als die Begleitkurve einer Kissoide ist. Sie ist daher eine zirkulare Kurve dritter Ordnung, die den Punkt A zum isolierten Punkte und als Asymptote die durch den Mittelpunkt des Kreises **K** zu t gezogene Parallele hat; sie ist also von der Versiera durchaus verschieden. Auf folgende Art kann sie parametrisch dargestellt werden:

$$x = \frac{a}{2} \cdot \frac{\lambda^2 + 2}{\lambda^2 + 1}, \quad y = \frac{a}{2} \cdot \frac{\lambda^2 + 2\lambda}{\lambda^2 + 1}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

dieser Darstellung entspricht folgende Kollinearitäts-Bedingung für drei Punkte (α), (β), (γ)

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta - 2 = 0;$$

folglich besitzt die Kurve im Endlichen zwei Wendepunkte, die die Koordinaten haben

$$x = \pm \frac{4a}{5}\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad y = \frac{4a}{5}.$$

Nimmt man als x-Achse die Asymptote der Visiera, so hat man an Stelle von (5) folgende parametrische Darstellung:

$$x = a\left(\frac{1}{4}\sin 2\omega + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\omega\right), \quad y = \frac{a}{2}\cos^2\omega; \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

1) G. Bellacchi, *Lezioni ed esercizi d'algebra complementare* (Firenze, 1898) Bd. I, S. 46. Dieselbe Kurve, auf die nämliche Weise erzeugt, findet sich auch in einer Abhandlung von G. de Longchamps (Journ. math. spéciales, 1. Série, IX, 1885, S. 202).

daraus leitet man ab

$$\int x \cdot dy = -\frac{a^2}{2}\int (2\sin^2\omega - \sin^4\omega)\,d\omega,$$

demnach

$$2\int_{\omega=\frac{\pi}{2}}^{\omega=0} y \cdot dx = \frac{5}{4}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Folglich: **Die von der Visiera und ihrer Asymptote begrenzte Fläche ist gleich $\frac{5}{4}$ der Fläche des zur Konstruktion der Kurve dienenden Kreises.**

46. Es gibt noch einen anderen geometrischen Ort, der irrtümlich mit der Versiera indentifiziert wurde. Nämlich in dem oft angeführten *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* von G. de Longchamps findet sich (S. 111) folgende Konstruktion einer angeblichen „courbe d'Agnesi". Gegeben (Taf. II, Fig. 13) drei Punkte A, C, G in gerader Linie, C sei der Mittelpunkt der von den beiden andern begrenzten Strecke; man ziehe durch ihn die Gerade t senkrecht zu ACG, dann ziehe man durch A eine beliebige Gerade, die t in H schneide und fälle auf diese die Senkrechte GK; die von H zu ACG und die von K zu t gezogenen Parallelen schneiden sich in einem Punkte P, dessen geometrischen Ort wir suchen. Wir beachten zu dem Zwecke, daß der Punkt K nichts anderes ist, als der Schnittpunkt der von C gezogenen Geraden mit dem Kreise, dessen Zentrum C und dessen Radius CA ist. Nehmen wir A als Ursprung, AG als y-Achse und nennen ω den Winkel der Transversalen mit der Geraden ACG, so erhalten wir offenbar

$$x = a \cdot \operatorname{tg}\omega, \qquad y = 2a \cdot \cos^2\omega \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Eliminieren wir nun ω, so erhalten wir die gesuchte Gleichung des Ortes in folgender Form:

$$x^2 y = a^2(2a - y) \quad . \; . \quad (8) \qquad \text{oder} \qquad y = \frac{2a^3}{a^2 + x^2} \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8')$$

Der Ort selbst ist demnach eine Kurve dritter Ordnung, jedoch nicht die Versiera; wir wollen sie Pseudo-Versiera nennen und zeigen, daß sie mit der Agnesischen Kurve in einer bemerkenswerten geometrischen Beziehung steht. Setzt man nämlich $x = x'$, $y = 2y'$, so wird die Gleichung (8) zu

$$x'^2 y' = a^2(a - y');$$

da diese Gleichung von der Form (2) ist, so schließt man: **Die Pseudo-Versiera entsteht aus der Versiera, indem man alle Ordinaten derselben, die senkrecht zur Asymptote sind, verdoppelt;** sie ist also zu der Versiera affin.

Das erste Auftreten der Pseudo-Versiera geht auf eine Zeit zurück, viel früher als der *Essai* von de Longchamps. Nämlich schon Leibniz hat in seinen ersten Untersuchungen über die Quadratur ebener Kurven[1]) folgenden Prozeß angegeben, um aus einer Kurve Γ eine andere C abzuleiten: Gegeben zwei zueinander senkrechte Geraden r und s; man ziehe in einem Punkte π von Γ die Tangente an diese Kurve, so daß sie r in T schneidet; alsdann ziehe man von Γ die Parallele zu s und von π die zu r, ihr Schnitt p wird ein Punkt von C sein. Diese Kurve wird die „figura resectarum" in bezug auf Γ genannt. Um die Formeln, welche die Koordinaten ξ und η von π mit x und y, denen von p, verknüpfen, zu finden, nehmen wir r als Abszissen-, s als Ordinaten-Achse. Man findet dann leicht

$$x = \xi - \eta \frac{d\xi}{d\eta}, \quad y = \eta .$$

Um nun die Gleichung von C zu erhalten, genügt die Elimination von ξ und η aus diesen Gleichungen und der Gleichung $f(\xi, \eta) = 0$ der Kurve Γ. Ist z. B. Γ ein Kreis, der die x-Achse im Anfang berührt, so kann man setzen

$$\xi = a \cdot \cos \omega, \qquad \eta = a + a \cdot \sin \omega$$

demnach

$$d\xi = - a \sin \omega \cdot d\omega, \quad d\eta = a \cos \omega \cdot d\omega .$$

Dann liefern die vorigen allgemeinen Formeln

$$\frac{x}{a} = \frac{1 + \sin \omega}{\cos \omega}, \quad \frac{y}{a} = 1 + \sin \omega .$$

Eliminiert man ω, erhält man als Gleichung der „figura resectarum"

$$y = \frac{2ax^2}{a^2 + x^2} \quad \text{oder} \quad 2a - y = \frac{2a^3}{a^2 + x^2} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Da letztere Gleichung sich von (8') nur dadurch unterscheidet, daß $2a - y$ an Stelle von y tritt, so ist die dargestellte Kurve eine Pseudo-Versiera. Leibniz hatte sie gefunden bei der Aufstellung seiner berühmten Formel $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ Huygens interessierte sich dafür und schrieb ihm unter dem 7. November 1674[2]): „Pour ce qui est de la ligne courbe Anonyme, qui sert à Votre demonstration, j'avois envie de la baptizer en lui donnant quelque nom composé des noms de deux lignes dont je trouvois qu'elle estoit produite, qui sont le Cercle et la Cissoide des anciens[3]). Mais ayant vu

---

1) *Leibniz,* ed. Gerhardt V, S. 100.

2) *Leibniz,* ed. Gerhardt V, S. 91, ebenso II, T. 16—17, oder auch *Œuvres de Huygens* VII, S. 393—95.

3) Um sich diese Bemerkung klar zu machen, beachte man, daß man die Gleichung (9) auch schreiben kann

depuis que cette même ligne a esté premièrement mise en avant par J. Gregorius[1]), je crois qu'il luy faut laisser le droit de la nommer comme il voudra." — Mit diesem Zitate, welches also die erste Erfindung der Pseudo-Versiera auf J. Gregory zurückführt, glauben wir unsern Bericht über diese bemerkenswerte Kurve wohl abzuschließen, nachdem wir bemerkt haben, daß man derselben unter dem Namen Geometrische Quadratrix im *Dictionnaire mathématique* von Ozanam (Amsterdam 1691, S. 108) begegnet,[2]) welchen dieser Geometer in seiner *Géometrie pratique* (1684) vorgeschlagen hat.

Dreizehntes Kapitel.

Die Trisektrix-Kurven von Maclaurin, von Catalan und von de Longchamps.

47. Es seien (Taf. II, Fig. 14) drei Punkte in gerader Linie gegeben O, O', O'', derart, daß $O''O' = \frac{1}{3} O'O$; man ziehe durch O' die Gerade o senkrecht zu $O''O'O$ und von O'' einen beliebigen Strahl, der o in M trifft, dann von M die Senkrechte und von O die Parallele zu $O''M$; diese beiden Geraden schneiden sich in einem Punkte P, deren Ort die Trisektrix von Maclaurin heißt, und zwar wegen der Anwendung, die man von ihr machen kann, und zu Ehren des Geometers, der sie zuerst betrachtete[3]). Um ihre Gleichung zu finden nehmen wir O als Pol und $OO'O''$ als Polarachse, setzen $O'O'' = a$ (weshalb dann $OO' = 3a$) und haben dann, wenn K die vierte Ecke des Rechtecks $OPMK$ ist,

$$x = a\sqrt{\frac{y}{2y-a}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{y(2a-y)} + y\sqrt{\frac{y}{2a-y}}\right);$$

es ist also x das arithmetische Mittel zwischen den Abszissen der beiden Kurven $x = \sqrt{y(2a-y)}$ und $x = y\sqrt{\frac{y}{2a-y}}$, von denen die erste ein Kreis, die zweite eine Kissoide ist.

1) *Exercitationes geometricae a Jacobo Gregorio Scoto* (London, 1658).

2) G. Loria, *Pseudo-versiera e quadratrire geometrica* (Bibl. math. 3. Reihe, III, 1902, S. 127—130). — Stereometrische Erzeugungen der genannten Kurve, wie auch der Versiera und der Serpentine findet man bei E. Janisch, *Die Versiera des Agnesi und verwandte Linien als Orthogonalprojektionen von Raumkurven dritter Ordnung* (Arch. Math. Phys., 3. Reihe, XII, 1907).

3) *A treatise of fluxion*, I (Edinburgh, 1742) S. 260; *Traité des fluxions, traduit de l'anglais par* R. P. Pezenas I (Paris, 1749) S. 198 und Fig. 24, Taf. X; s. auch desselben Autors *Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis* (London, 1720) S. 23. Die im Texte angegebene Konstruktion findet sich in dem oben angef. *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* von G. de Longchamps S. 120; eine andere ist in einer Note von H. Brocard angegeben, *Remarque au sujet de la trisectrice de Maclaurin* (Journ. Math. spéc. 3[e] Sér. V, 1891).

$$O''M = \frac{a}{\cos\omega}, \qquad O''K = 4a\cos\omega,$$

$$\varrho = OP = MK = O''K - O''M = \frac{a}{\cos\omega} - 4a\cos\omega,$$

somit ist die Polargleichung der Trisektrix

$$\varrho = a\frac{1-4\cos^2\omega}{\cos\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

und also die kartesische Gleichung:

$$x(x^2+y^2) = a(y^2-3x^2) \quad (2) \qquad \text{oder} \qquad y = x\sqrt{\frac{3a-x}{a+x}} \quad (2')$$

daraus folgt, daß die Trisektrix eine zirkulare Kurve dritter Ordnung symmetrisch in bezug auf die Gerade $OO'O''$ ist und den Punkt O' als einfachen, O als Doppelpunkt enthält, die Tangenten in O und die x-Achse teilen den Raum um O in sechs gleiche Teile. Die Gerade $x+a=0$ ist eine Asymptote, und zwar die einzige reelle, der Kurve.

Wendet man auf die Kurve (2′) die folgende (affine) Transformation an,

$$x = 3x', \quad y = 3\sqrt{3}\,y',$$

so erhält man die folgendermaßen dargestellten Kurven

$$y' = x'\sqrt{\frac{a-x'}{a+3x'}},$$

d. h. (vgl. Nr. 33) ein Cartesisches Blatt; daher kann man schließen, daß **die Trisektrix von Maclaurin und das Folium Cartesii affine Kurven sind.**

Setzt man $a = \frac{c}{2}$, $x = x' + \frac{c}{2}$, so wird die Gleichung (2′) zu

$$y = \left(x' + \frac{c}{2}\right)\sqrt{\frac{c-x'}{c+x'}}$$

und stellt den Ort eines Punktes dar derart, daß wenn A und B die Punkte mit den Koordinaten $x = \pm\frac{c}{2}$, $y = 0$ sind, man hat $3\cdot\sphericalangle PAB = \pi - PAB$[1]); dies zeigt, daß die Trisektrix von Maclaurin ein Spezialfall ist, sowohl der allgemeinen Strophoiden (Nr. **41**) als auch der Sektrix-Kurven von Schoute (Abschn. V, Kap. 12)[2]).

---

1) Schlömilch, *Übungsbuch zum Studium d. höh. Anal.*, II. Teil (Leipzig, 1874) S. 59.

2) Schon hier soll bemerkt werden, daß wir a. a. O. sehen werden, daß die Trisektrix von Maclaurin durch eine der folgenden Polargleichungen dargestellt werden kann:

$$\varrho = 2a\frac{\sin 3\omega}{\sin 2\omega}; \qquad \varrho = 2a\frac{\sin\frac{\omega}{3}}{\sin\frac{2\omega}{3}}.$$

Die betrachtete Kurve ist folgender parametrischer Darstellung fähig:

$$x = a\frac{\lambda^2 - 3}{\lambda^2 + 1}, \qquad y = a\frac{\lambda(\lambda^2 - 3)}{\lambda^2 + 1}; \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

dieser entspricht folgende Kollinearitätsbedingung der drei Punkte (α), (β), (γ)

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta + 3 = 0,$$

welche uns beweist, daß die zyklischen Punkte der Ebene Wendepunkte sind, und daß der einzige reelle Punkt der Kurve auf der unendlich fernen Geraden ebenfalls ein solcher ist. Aus Gleichung (2) und (3) kann man folgern, daß die Quadratur der Trisektrix auf elementare Weise ausführbar ist, während die Rektifikation elliptische Integrale erfordert[1]) (vgl. Nr. **23**). Ebenfalls kann man unschwer nachweisen, daß die Trisektrix von Maclaurin — die man als eine besondere Slusesche Konchoide (Nr. **42**) ansehen kann — die Fußpunktkurve eine Parabel in bezug auf den Punkt der Achse ist, der von der Direktrix denselben Abstand wie der Brennpunkt hat.[2])

G. Cramer hat gezeigt[3]), wie man eine allgemeinere Kurve als die Trisektrix von Mauclaurin konstruieren kann, nämlich diejenige, die folgendes Ortsproblem löst: „Gegeben ein Kreis mit dem Zentrum C (s. Taf. II, Fig. 15) und ein Punkt O in seiner Ebene; seien A, B die Endpunkte des Durchmessers OC; man ziehe durch A eine beliebige Sehne AM, durch O die Parallele zu AM und von M das Lot auf AB; welches ist der Ort der Punkte P, in welchem sich die beiden letzteren Geraden kreuzen?" Nehmen wir die Gerade OC zur

---

Die erstere fällt im wesentlichen mit (1) im Texte zusammen, die zweite hingegen ist identisch mit $\varrho = a : \cos\frac{\omega}{3}$, die sehr wertvoll in ihren Anwendungen ist. Z. B. gibt sie die Größe der Fläche eines Kurvensektors durch den Ausdruck

$$\frac{1}{2}\int_0^\omega \varrho^2 d\omega = \frac{a^2}{2}\int_0^\omega \frac{d\omega}{\cos^2\frac{\omega}{3}} = \frac{3a^2}{2}\int_0^\omega \frac{d\frac{\omega}{3}}{\cos^2\frac{\omega}{3}} = \frac{3a^2}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{3} = 3\cdot\frac{1}{2}a\cdot a\operatorname{tg}\frac{\omega}{3},$$

ein in Worten leicht ausdrückbares Resultat, wie Godefroy hervorhob (Journ. Math. spéc. 2[e] Ser. IX, 1885, S. 179). Insbesondere ist die Fläche der Schleife $= 3\sqrt{3}\,a^2$.

1) G. de Longchamps, *Sur la rectification de la trisectrice de Maclaurin au moyen des intégrales elliptiques* (Comptes rendus CIV, 1887). Für die Konstruktion der Tangente und andere Fragen dieser Art s. V. Jeřabek, *Sur la trisectrice de Maclaurin* (Mathésis, 2[e] Sér. IX, 1899).

2) Vgl. J. Neuberg, *La trisectrice de Maclaurin* (Mathésis, 3[e] Sér., VII, 1907).

3) *Introduction à l' analyse des lignes courbes alg.* (Genève, 1750) S. 441.

x-Achse, bezeichnen mit l die Länge der Strecke OC und mit ω den Winkel POC, so haben wir

$$x = l + r \cdot \cos 2\omega, \qquad \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \omega.$$

Durch Elimination von ω ergibt sich dann

$$x(x^2 + y^2) = (r + l)x^2 - (r - l)y^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

als Gleichung des von Cramer definierten Ortes. Ändern wir die positive Richtung der x-Achse, so wird diese

$$x(x^2 + y^2) = (r - l)y^2 - (r + l)x^2,$$

und stimmt mit (2) überein, wenn man $r = 2a$, $l = a$ setzt. Die Cramersche Konstruktion liefert also in einem speziellen Falle die Trisektrix von Maclaurin.

48. Unsere Kurve kann noch auf eine andere Weise erzeugt werden, die unter ein allgemeines Verfahren der Transformation der Figuren fällt, welches P. H. Schoute untersucht hat[1]), und dem er den Namen Maclaurinsche Transformation gegeben hat. Die Definition derselben lautet: „Gegeben in einer Ebene drei Punkte A, B, C und eine Gerade f. Man lasse jedem Punkte Q der Ebene jenen Punkt Q' der Geraden CQ entsprechen, derart, daß die Geraden QA und BQ' sich in einem Punkte R der Geraden f treffen.“ Wenden wir diese Transformation, in geeigneter Weise spezialisiert, auf einen Kreis an (dessen Mittelpunkt wir M nennen wollen), so erhalten wir Kurven, von denen einige uns schon begegnet sind, wie sich aus Folgendem ergibt:

a) Der Punkt A liege auf der Peripherie des gegebenen Kreises (s. Taf. II, Fig. 16), B sei der unendlich ferne Punkt des zugehörigen Durchmessers, f sei der dazu senkrechte Durchmesser und C dessen unendlich ferner Punkt. Alsdann wird die Maclaurinsche Transformation ähnlich derjenigen, die wir zur Erzeugung der Versiera (vgl. die Fig.) angewendet haben, aber sie ist dennoch von jener verschieden; die erhaltene Kurve ist der Gestalt nach der Versiera ähnlich, aber von ihr verschieden. Schoute (der sie wahrscheinlich mit dieser verwechselte) nannte sie Agnesische Kurve[2]), in Wirklichkeit ist sie eine Pseudo-Versiera.

b) A liege noch auf der Peripherie des gegebenen Kreises (s. Taf. II, Fig. 17), B in der Mitte des Radius AM, f sei senkrecht zu diesem Radius und C liege im Unendlichen auf f. Um die Gleichung der

---

1) *Sur la construction des courbes unicursales par points et tangentes* (Archives néerlandaises XX, 1887).

2) S. die zitierte Schrift, S. 38 des Sonderabdruckes. Die Versiera würde man erhalten, wenn als f die Tangente des Kreises in dem A gegenüberliegenden Punkte gewählt würde.

transformierten Kurve abzuleiten, nehmen wir B zum Anfang und AB zur x-Achse; ist r der Radius des Kreises und $x = h$ die Gleichung der Geraden f, so kann man die Koordinaten eines beliebigen Punktes Q des Kreises in der Form schreiben $x = \frac{r}{2} + r \cdot \cos\omega$, $y = r\sin\omega$. Die Gerade AQ hat dann die Gleichung

$$\left(x + \frac{r}{2}\right)\sin\frac{\omega}{2} + y\cos\frac{\omega}{2} = 0,$$

und die Koordinaten von R sind $x = h$, $y = \left(h + \frac{r}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$; daraus folgt

$$\frac{y}{x} = \frac{2h + r}{2k}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$$

als Gleichung der Geraden BR. Indem nun die Gleichung von CQ in diesem Falle $x = \frac{r}{2} + r \cdot \cos\omega$ ist, so genügt, um die Gleichung des Ortes der Punkte Q' zu erhalten, die Elimination von ω aus den beiden letzten Gleichungen; sie ist daher

$$y^2 = -\left(\frac{2h + r}{2h}\right)^2 \frac{x - \frac{3r}{2}}{x - \frac{r}{2}} x^2. \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

Erinnern wir uns nun (vgl. Nr. **33**), daß das Folium Cartesii mit der Gleichung $\xi^2 + \eta^3 = 3a\xi\eta$ ebenfalls durch die Gleichung

$$y^2 = -\frac{1}{3}\frac{x - \frac{3a}{\sqrt{2}}}{x + \frac{a}{\sqrt{2}}} x^2$$

dargestellt werden kann, so erkennen wir, daß die Gleichung (5) ein Folium Cartesii nur unter der Voraussetzung ist, daß

$$4h + (3 + \sqrt{3})r = 0;$$

wir erhalten somit schließlich eine neue und einfache Konstruktion für die genannte Kurve.

c) Seien nun A und B (Taf. II, Fig. 18) Endpunkte eines Durchmessers des gegebenen Kreises, C liege im Unendlichen in der zu AB senkrechten Richtung, auch f liege im Unendlichen; dann stellt sich die allgemeine Maclaurinsche Transformation in folgender Weise dar: „Man nehme auf der Peripherie des Kreises den Punkt Q, ziehe die Sehne AQ und von Q das Lot auf AB, dieses schneidet die von A zu AQ gezogene Parallele in dem Q entsprechenden Punkte Q'." Wir bemerken nun, daß, wenn diese Parallele die Peripherie des gegebenen Kreises zum zweitenmal in Q'' und die in A gezogene Tangente in N schneidet, die rechtwinkligen Dreiecke ANQ'' und $BQ'Q$ einander kongruent sind, daraus folgt $BQ' = Q''N$; dies genügt zum

Nachweis, daß der Ort der Punkte Q' eine Kissoide des Diokles ist, mit B als Spitze und AC als Asymptote.

d) Sei A ein Punkt auf der Peripherie des zu transformierenden Kreises, B sei das Zentrum, C der unendlich ferne Punkt in der zu AB senkrechten Richtung und f die unendlich ferne Gerade (Taf. III, Fig. 19). Um den Punkt Q' zu erhalten, der dem Punkte Q entspricht, ziehe man AQ und durch B die Parallele zu dieser Geraden; diese wird von der aus Q senkrecht zu AB gezogenen in Q', dem Q entsprechenden Punkte, geschnitten. — Wir bemerken, wenn V der zweite Endpunkt des Durchmessers AB ist, daß Dreieck AQV rechtwinklig bei Q ist, weshalb auch BQ' senkrecht zu QV, folglich ist Dreieck $Q'QV$ gleichschenklig. Sei N der Schnittpunkt der Geraden VQ' mit dem zu AB senkrechten Durchmesser und ziehen wir NH parallel zu QV, so wird dieses die Höhe des Dreiecks NBQ' sein. Nun ist $\sphericalangle BNH = Q'QV$, da ihre Schenkel parallel sind und $\sphericalangle HNQ' = Q'VQ$ als Wechselwinkel; indem nun Dreieck $Q'QV$ gleichschenklig, so ist $\sphericalangle Q'QV = Q'VQ$ und daher auch $\sphericalangle BNH = HNQ'$. Dreieck NBQ' ist daher gleichschenklig und der Ort des Punktes Q' kann vermittels des Punktes V und des rechten Winkels VBN konstruiert werden, wie es in Nr. **35** angegeben ist, der Ort von Q' ist also in diesem Falle eine gerade Strophoide.

e) Endlich sei A wieder ein Punkt des Kreises, B der Mittelpunkt des entsprechenden Radius AM, C der unendlich ferne Punkt in der senkrechten Richtung, und f die unendlich ferne Gerade (s. Taf. III, Fig. 20, aus welcher die entsprechende Konstruktion ersichtlich ist). Nehmen wir AB als Abszissenachse, B als Anfangspunkt, so kann man die Koordinaten von Q annehmen als $x = \frac{r}{2} + r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$. Ist H der Schnittpunkt der Geraden QQ' und AB, so erhält man aus der Betrachtung der ähnlichen Dreiecke AQH und $BQ'H$

$$Q'H = \left(\frac{r}{2} + r \cdot \cos\varphi\right) \frac{r\sin\varphi}{r + r\cos\varphi} = r\,\frac{\left(\frac{1}{2} + \cos\varphi\right)}{1 + \cos\varphi}\,\sin\varphi,$$

weshalb der Ort der Punkte Q' angesehen werden kann als dargestellt durch die Gleichungen

$$x = \frac{r(1 + 2\cos\varphi)}{2}, \qquad y = \frac{r(1 + 2\cos\varphi)}{2} \cdot \frac{\sin\varphi}{1 + \cos\varphi}.$$

Führen wir Polarkoordinaten ein, ϱ und ω, so haben wir

$$\varrho = r\,\frac{1 - 4\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\cos\frac{\varphi}{2}}, \qquad \omega = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{\varphi}{2},$$

und nach Elimination von φ

$$\varrho = r \frac{1 - 4\cos^2\omega}{\cos\omega}.$$

Erinnern wir uns der Gleichung (1), so ergibt sich, daß der Ort des Punktes Q' eine Trisektrix von Maclaurin ist[1]).

Eine andere Trisektrix neueren Datums entspringt aus einer Eigenschaft der Parabel, die von E. Catalan im Jahre 1832 entdeckt wurde[2]), und die wir zunächst darlegen wollen: Es sei (Taf. III, Fig. 21) F der Brennpunkt, FB Radiusvektor einer Parabel und BC die Normale in B; man vervollständige das Rechteck $FBDC$, das zur einen Seite die Strecke FB, als Diagonale jene Normale hat, und betrachte den Ort des Punktes D. Stellt man sich nun zwei aufeinanderfolgende Radienvektoren vor, so erkennt man, daß D der Berührungspunkt der Geraden BD mit ihrer eigenen Hüllkurve ist; somit ist der Punkt B der Fußpunkt der Senkrechten von F auf eine der einhüllenden Geraden. Die Hüllkurve ist also derart, daß ihre Fußpunktkurve in bezug auf den Pol F die gegebene Parabel ist; diese Hüllkurve, also **der Ort der Punkte D ist also nichts anderes, als die erste negative Fußpunktkurve der Parabel in bezug auf ihren Brennpunkt** (vgl. Abschn. VII, Kap. 7).[3]) Man ziehe nun die Gerade FD und nenne G und E die Schnitte der Geraden BC mit FD und mit der Achse AH der Parabel, schließlich ziehe man BK parallel AH und setze zur Abkürzung $\sphericalangle BFE = \vartheta$, $\sphericalangle DFE = \omega$. Infolge einer bekannten Eigenschaft der Parabel ist nun $\sphericalangle FBE = EBK$, $\sphericalangle EBK = BEF$ als Wechselwinkel, folglich $\sphericalangle FEB = FBE$. Dreieck BEF ist also gleichschenklig, demnach $\sphericalangle FBE = \frac{\pi - \vartheta}{2}$. Es

1) Zu demselben Schlusse kommt man eher, wenn man berücksichtigt, daß die sub e) angegebene Konstruktion ein Spezialfall der in der vor. Nr. beschriebenen Cramerschen ist.

2) S. einen Brief dieses Geometers im *Journ. de math. spéc.*, 2e Ser. IV, 1885, S. 229—33.

3) Da diese Kurve früher von Tschirnhausen (*Acta Erud.* 1690, S. 68 bis 73) und de l'Hôpital (*Analyse des infiniment petits*, Paris 1696, S. 109 bis 112) schon betrachtet wurde, so wurde sie sowohl als *Tschirnhausens Kubik* (Archibald, *The cardioide and some relates curves*, Diss. Straßburg 1900) wie als *de l'Hospitals Kubik* (Cazamian, *Application de le méthode de transformations par polaires réciproques à des théoremes rélatifs aux cubiques unicurales;* Nouv. Ann. Math., 3e Sér., XIII, 1894, S. 307) bezeichnet. Der Name *Orthogenide* (welchem wir in Kap. XVIII des V. Abschn. in einer allgemeinen Bedeutung begegnen werden) wurde von Allégret ersonnen (Nouv. Ann. Math., 2e Sér., V, 1865, S. 27 und *Question* 1265, aufgelöst durch Faquenberg das. 3e Sér., XIV, 1895, S. 5*). Als Ort der Mittelpunkte der Kreise, die durch den Brennpunkt einer Parabel gehen und die Kurve berühren, begegnet man derselben Kurve im Aufsatze von E. Freund, *Über eine Kurve dritter Ordnung* (Lotos, Neue Serie, XIV, Prag 1864).

ist aber auch Dreieck BFG gleichschenklig, und daher $\sphericalangle GFB = GBF$, oder $\vartheta - \omega = \frac{\pi - \vartheta}{2}$, oder auch $= \frac{\pi - \omega}{3}$. Also ist $\sphericalangle BFD = \frac{1}{3} AFD$. Diese Beziehung bekundet, daß der Ort des Punktes D als Dreiteilungs-Kurve eines beliebigen Winkels dienen kann. Legt man nämlich den zu teilenden Winkel mit dem Scheitel in F und mit dem einen Schenkel auf FA, und ist ferner $\bar{D}$ der eine Schnittpunkt des anderen Schenkels mit dem angegebenen Orte, und $\bar{B}$ der dem Punkte $\bar{D}$ entsprechende Punkt der Parabel, so ist der Winkel $FA\bar{D}$ der verlangte.

Der Ort des Punktes D verdient also den Namen Trisektrix von Catalan. Um die Gleichung derselben zu finden, nehmen wir die vorliegende Parabel als durch die Gleichung $\varrho = \frac{p}{1 - \cos\omega}$ dargestellt; die Gleichung der Geraden BD, deren Enveloppe die Trisektrix von Catalan ist, wird dann sein $x \cdot \cos\omega + y \cdot \sin\omega = \frac{p}{1 - \cos\omega}$. Durch Differentiation erhalten wir: $-x \sin\omega + y \cos\omega = -\frac{p \cdot \sin\omega}{(1 - \cos\omega)^2}$ und daher folgende parametrische Darstellung der Kurve:

$$x = p\,\frac{(\cos\omega - \cos 2\omega)}{(1 - \cos\omega)^2} = \frac{p}{2}\,\frac{\sin\frac{3\omega}{2}}{\sin^3\frac{\omega}{2}}$$

$$y = p\,\frac{(\sin\omega - \sin 2\omega)}{(1 - \cos\omega)^2} = -\frac{p}{2}\,\frac{\cos\frac{3\omega}{2}}{\sin^3\frac{\omega}{2}}.$$

Daraus folgt

$$\frac{4(x^2 + y^2)}{p^2} = \frac{1}{\sin^6\frac{\omega}{2}}, \quad \frac{x}{y} = -\operatorname{tg}\frac{3\omega}{2},$$

oder, wenn man die Polarkoordinaten ϱ, θ einführt,

$$\frac{2\varrho}{p} = \frac{1}{\sin^3\frac{\omega}{2}}, \quad \cot\theta = -\operatorname{tg}\frac{3\omega}{2}.$$

Durch Elimination von ω erhält man dann die folgende Polargleichung:

$$\varrho^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\pi - \theta}{3}\right) = \left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und daraus endlich die kartesische Gleichung der Trisektrix:

$$(2p + x)^3 = \frac{27}{2}\,p\,(x^2 + y)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5')$$

Die Kurve ist demnach dritter Ordnung und symmetrisch in bezug auf die Parabelachse. Sie geht einmal durch den Punkt $\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$

und zweimal durch den Punkt $(4p, 0)$, die Tangenten in diesem letzteren bilden mit der Achse Winkel $= \pm \frac{\pi}{3}$; der unendlich ferne Punkt ist ein Wendepunkt mit der unendlich fernen Geraden als zugehöriger Tangente; die Punkte $(p, \pm p)$ sind Kulminationspunkte usw.

49. Noch jüngeren Ursprunges ist eine andere Kurve, die wir wegen ihrer Anwendung Trisektrix von Longchamps nennen[1]); Astor nannte sie hingegen weniger zutreffend trèfle équilatéral[2]), während Bellavitis mit Rücksicht auf ihre Gestalt ihr den Namen tricratere regolare[3]) gab. Sie kann vermittels eines Kreises (mit dem Zentrum O und dem Radius r) konstruiert werden; sei AB ein Durchmesser desselben (s. Taf. III, Fig. 22). Wir nehmen auf der Peripherie zwei Bogen AD und BE, den letzteren halb so groß als den ersteren und ziehen in deren Endpunkten D und E die Tangenten; ihr Schnitt P wird ein Punkt der Trisektrixkurve sein. Um ihre Gleichung zu bilden, nehmen wir O als Pol, OB als Polarachse; setzen wir $\sphericalangle BOE = \varepsilon$, so wird $\sphericalangle AOD = 2\varepsilon$ sein. Bezeichnen wir dann den $\sphericalangle POB$ mit ω, so besteht die Bezeichnung $\pi - 3\varepsilon = 2(\omega - \varepsilon)$ und daher $\varepsilon = \pi - 2\omega$, und $\sphericalangle POE = \omega - \varepsilon = 3\omega - \pi$. Das rechtwinklige Dreieck EOP liefert uns also $\varrho = \frac{r}{\cos(3\omega - \pi)}$ oder

$$\varrho = -\frac{r}{\cos 3\omega}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

welches also die Polar-Gleichung der Trisektrix von Longchamps ist; ihre kartesische Gleichung ist dann

$$x(x^2 - 3y^2) + r(x^2 + y^2) = 0. \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

Auch diese Trisektrix ist eine rationale Kurve dritter Ordnung; O ist ein isolierter Punkt derselben; die unendlich fernen Punkte der Geraden, die mit dem Durchmesser AB die Winkel $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ bilden, gehören ebenfalls der Kurve an; die Halbierungslinien derjenigen Winkel, die von den durch O in diesen Richtungen gezogenen Geraden gebildet wurden, sind drei Symmetriachsen der Kurve. Die unendlich fernen Punkte der Kurve sind Wendepunkte, die zugehörigen Tangenten bilden ein gleichseitiges Dreick, indem ihre Gleichungen sind: $x + \frac{r}{3} = 0$, $x \pm y\sqrt{3} - \frac{2}{2} r = 0$. Die Hessesche Kurve der unserigen hat die

1) G. de Longchamps, *Sur une trisectrice remarquable* (Mathésis VIII, 1888).

2) S. einen Brief im XIV. Bde. (1894) der 3. Serie der *Nouv. Ann. Mathém.* S. 385, dem wir die angeführten Eigenschaften der Kurve größtenteils entnommen haben.

3) *Su alcune curve di facile costruzione*, n. 22 (Mem. Soc. Ital. Scienze, 3. Ser. III, 1879).

Gleichung: $3x(x^2 - 3y^2) + r(x^2 + y^2) = 0$, weshalb sie also von derselben Art ist. Die Inverse in bezug auf den Kreis mit dem Mittelpunkte O und dem Radius R hat die Gleichung $\varrho = \frac{R^2}{r} \cos 3\omega$, gehört daher einer Klasse von Kurven (den Rhodoneen) an, der wir im V. Abschn., Kap. 8 begegnen werden. Die Cayleysche Kurve ist ein Kreis[1]). Schließlich, da man Gleichung (7) auch in folgender Weise schreiben kann

$$y = x\sqrt{\frac{x+r}{3x-r}},$$

so ist unsere Kurve (vgl. Nr. **16**) algebraisch quadrierbar.

Vierzehntes Kapitel.

Die kubische Duplicatrix und das parabolische Blatt.

50. Während die im vorigen Kapitel untersuchten Kurven zur Teilung eines Winkels in drei gleiche Teile dienen können, kann die, welche wir nunmehr besprechen werden, für die Aufgabe der Würfelverdoppelung dienen, weshalb G. de Longchamps sie kubische Duplicatrix genannt hat. Die von ihm angegebene Konstruktion ist folgende[2]): „Gegeben (Taf. III, Fig. 23) zwei Geraden r, r', die zueinander senkrecht stehen und ein Punkt O auf der zweiten; man ziehe von O einen Strahl, der r in A schneidet, in A errichte man auf diesem Strahle die Senkrechte, die r' in B trifft und ziehe durch B die Parallele zu r, bis sie den Strahl selbst in P trifft, der geometrische Ort des Punktes P ist eine kubische Duplicatrix". Um die Gleichung derselben zu finden, nehmen wir O als Pol und r' als Polarachse; ist l der Abstand des Punkte O von C, dem Schnittpunkte von r, r', so haben wir

$$OA = \frac{l}{\cos\omega}, \quad OB = \frac{OA}{\cos\omega}, \quad OP = \frac{OB}{\cos\omega};$$

da nun $OP = \varrho$, ergibt sich

$$\varrho = \frac{l}{\cos^3\omega}. \qquad (1)$$

Die entsprechende kartesische Gleichung der Kurve ist

$$x^3 = l(x^2 + y^2). \qquad (2)$$

Die kubische Duplicatrix ist also eine Kurve dritter Ordnung, die auf

---

1) Die Tangentialgleichung dieser Kurve erhält man durch die einfache Anwendung einer bekannten Formel (Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen* I, S. 517).

2) *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* (Paris, 1890) S. 92—94. Die Kurve kommt bereits bei Uhlhorn (*Entdeckungen in der höheren Geometrie*, Oldenburg, 1809, S. 54) vor und trägt daselbst den Namen Toxoide.

der y-Achse im Unendlichen einen Wendepunkt besitzt; die unendlich ferne Gerade ist die entsprechende Tangente. Der Punkt O ist ein isolierter Punkt und die zugehörigen Tangenten sind isotropische Geraden. Die Kurve kann auch durch die beiden Gleichungen

$$x = l(1 + \lambda^2), \qquad y = l(\lambda + \lambda^3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

dargestellt werden; die Kollinearitäts-Bedingung für drei Punkte (α), (β), (γ) ist dann

$$\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta = 1;$$

man erkennt, daß die Kurve im Endlichen zwei reelle Wendepunkte hat, mit der gemeinsamen Abszisse $x = \frac{4l}{3}$. — Bemerken wir noch, daß es leicht ist, die Punkte der Kurve zu bestimmen, die eine gegebene Abszisse OB haben; es genügt nämlich über dem Durchmesser OB einen Kreis zu beschreiben, dessen Schnitte A, A' mit der Geraden r zu bestimmen, und dann diese Punkte als P, P' von O aus auf die von B zu r parallel gezogene Gerade zu projizieren.

51. G. de Longchamps hat noch eine andere Kurve dritter Ordnung betrachtet, auf die wir jetzt hinweisen wollen: „Gegeben zwei aufeinander senkrechte Geraden r, r' und ein Punkt O ihrer Ebene (Taf. III, Fig. 24). Man ziehe durch O einen beliebigen Strahl, der r in P schneidet, in diesem Punkte errichte man die Senkrechte zu OP und bezeichne deren Schnitt mit r' mit Q; dann ziehe man die Parallele durch Q zu OP und bestimme deren Schnittpunkt R mit r, schließlich von R die Senkrechte RM zu OP; der Ort der Punkte M ist die fragliche Kurve[1]).“ Um ihre Gleichung zu bestimmen, nehmen wir als x- und y-Achsen die durch O zu r' und r gezogenen Parallelen; sei S der Schnitt von r, r', A und B bezüglich die Treffpunkte von r mit Ox und r' mit Oy, a und b die Koordinaten OA, OB von S, so erhält man

$$OP = \frac{a}{\cos\omega}, \quad AP = a \cdot \operatorname{tg}\omega, \quad PS = a \cdot \operatorname{tg}\omega - b, \quad PQ = -\frac{b - a \cdot \operatorname{tg}\omega}{\cos\omega},$$

$$QR = PQ \cdot \operatorname{tg}\omega = -\frac{\operatorname{tg}\omega\,(b - a\operatorname{tg}\omega)}{\cos\omega},$$

und da $\varrho = OM = OP - QR$, so ist die Polargleichung des geometrischen Ortes von M

$$\varrho \cdot \cos\omega = a + \operatorname{tg}\omega\,(b - a \cdot \operatorname{tg}\omega) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Infolgedessen lautet ihre kartesische Gleichung:

$$x^3 = a(x^2 - y^2) + bxy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Im besonderen Falle, wenn $b = 0$

$$x^3 = a(x^2 - y^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

1) *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* S. 120—121.

Gleichung (5) stellt das schiefe parabolische Blatt, (6) das gerade parabolische Blatt dar. Das erstere (welches dem allgemeineren Falle entspricht) ist eine kubische Kurve, die O zum Doppelpunkt hat — die zugehörigen Tangenten sind zueinander senkrecht — und sowohl durch den Punkt S als auch den unendlich fernen der y-Achse geht; auch dieser ist ein Wendepunkt mit der unendlich fernen Geraden als Tangente. Gleichung (5) kann durch folgende beiden ertetzt werden:

$$x = (1 - \lambda^2)\, a + \lambda b, \quad y = (\lambda - \lambda^3)\, a + \lambda^2 b, \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

aus welcher parametrischen Darstellung sich folgende Kollinearitäts-Bedingung ergibt

$$(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta + 1)\, a^2 - (\alpha + \beta + \gamma)\, ab + b^2 = 0;$$

die Parameter der Wendepunkte der Kurve sind daher die Wurzeln der Gleichung $$(3\omega^2 + 1)\, a^2 - 3\omega\, ab + b^2 = 0,$$

die Wendepunkte selbst sind daher imaginär, wie sich auch (s. Nr. **18**) voraussehen ließ. — Wenn $b = 0$, hat die Kurve die Besonderheit symmetrisch zur y-Achse zu sein.

Die beiden parabolischen Blätter gehören zur Klasse der Kurven dritter Ordnung, die einen Wendepunkt im Unendlichen haben mit der unendlich fernen Geraden als zugehöriger Tangente. Solche Kurven sind folgender parametrischer Darstellung fähig:

$$x = f_1(\lambda), \quad y = f_2(\lambda),$$

wo f_1 und f_2 rationale ganze Funktionen dritten Grades im Parameter sind. Sie gehören der großen Kategorie algebraischer Kurven beliebiger Ordnung an, die A. v. Brill[1]) als rational-ganz bezeichnet hat.

Die Kurven dritter Ordnung, deren Theorie und Geschichte wir in diesem Abschnitte dargelegt haben, sind die vornehmsten, die, soweit, uns bekannt, einen besonderen Namen erhalten haben[2]); auf andere

---

1) Math. Annalen XVI, 1880. S. 348ff.

2) Um vollständig zu sein, müßten wir noch folgende hinzufügen, mit denen G. de Longchamps sich in dem soeben angeführten *Essai* beschäftigt hat.

S. 113.	Einfache Kurven 3. O.	$x^3 = hy^2$. Einfache parabolische Kurve 3. O. mit Spitze. $x^3 = h^2 y$. „ „ „ „ „ Zentrum. $xy^2 = h^3$. Einfache hyperbolische Kurve 3. O.
S. 119.	Gemischte Kurven 3. O.	$y^2 x = h(x^2 + y^2)$.
S. 119.	Konchoidale Kurve 3. O.	$\left(\frac{y}{x-h}\right)^2 = \frac{x}{h-2x}$.
S. 119.	Zirkulare Konchoide	$(x - y)(x^2 + y^2) - h(x^2 + y^2 - xy) = 0$.

bemerkenswerte (wie die kubische und die Neilsche Parabel) werden wir noch später kommen, wenn wir allgemeinere Kurven behandeln (s. z. B. Abschn. V und VII); weitere nicht weniger bemerkenswerte wurden im Laufe verschiedenartiger Untersuchungen gefunden, erhielten jedoch keinen besonderen Namen. Eine solche ist z. B. die mit der Gleichung

$$x(x^2 + y^2) = a^2 y,$$

die sich im Briefwechsel zwischen Leibniz und Huygens findet[1]), ferner die mit der Gleichung

$$y^2 = \frac{a^2 x}{a + 2x},$$

Derselbe Geometer hat an anderer Stelle (*Cours de problèmes de géométrie analytiques* I, Paris 1898, S. 149 und 213) die kubische Serpentine und die zirkulare Serpentine betrachtet. Alle diese Kurven besitzen keine hervorragenden Eigenschaften, weshalb wir bei diesen nicht verweilen.

1) Der auf diese Kurve bezügliche Teil des Briefwechsels zwischen den beiden Mathematikern ist geschichtlich so bemerkenswert, daß wir uns nicht enthalten können, diesem einige Worte zu widmen.

Wie bekannt, gehörte Huygens nicht von vornherein zu den ersten Gläubigen der von seinem alten Schüler Leibniz erfundenen Differential-Rechnung, und um die Tragweite des „methodus tangentium inversa", dessen einzige Macht Leibniz gerühmt hatte zu erproben, gab er diesem auf, die Kurven zu finden, deren Subtangenten bezüglich ausgedrückt werden durch

$$\frac{y^2}{2x} - 2x, \quad \frac{2x^2y - a^2x}{3a^2 - 2xy}.$$

(S. den Brief vom 24. Aug. 1690 in *Leibniz*, herausg. v. Gerhardt, II, S. 46). In der Antwort (3./13. Okt. 1690 a. a. O. S. 50) sagt Leibniz, daß die zweite der verlangten Kurven (wenn man der Einfachheit halber $a = 1$ setzt) die Gleichung $\frac{x^3 y}{h} = b^{2xy}$ habe, wo h eine beliebige Konstante, und b diejenige Zahl ist, die zum Logarithmus die Einheit hat. Huygens war von dieser Lösung nicht befriedigt und antwortete unterm 18. Nov. 1690 (a. a. O. S. 35—56): „Je ne vous avois pas envoié les deux questions des lignes courbes pour vous donner de la peine en cherchant les solutions, mais croiant que vous auriez une méthode preste pour trouver les courbes par la proprieté de leur tangents, ou pour determiner quand cela se peut ou non. Je commence à croire maintenant que cela n'est point, puisque la courbe dans laquelle AB estant x et sa perpend. BC y, on trouve BD, distance du concour de la tangente égale à $\frac{2xxy - aax}{3aa - 2xy}$; cette courbe dis-je a pour équation qui exprime sa nature $x^3 + xxy = aay$." — Huygens fügte eine Bestätigung seiner Behauptung und die Konstruktion der Kurve hinzu. Die Huygensche Kritik aber konnte, sei es wegen der Autorität ihres Urhebers, sei es weil sie die Leibnizsche Erfindung empfindlich traf, nicht ohne Erwiderung bleiben, und blieb es auch nicht von seiten des berühmten Nebenbuhlers Newtons. In seinem Briefe vom 14./29. Nov. 1690 (a. a. O. S. 62—63) klärte er den Widerspruch seiner eigenen Schlüsse mit den von Huygens erhaltenen auf, indem er die Subtangente mit verschiedenem Vorzeichen genommen hatte, was er in einem späteren Briefe (v. 25. Nov. 1690, a. a. O. S. 64—65) wiederholte; daselbst ist überdies, als Gleichung der Kurve, die die erste von Huygens gestellte Aufgabe löst, die folgende bezeichnet: $2r^4x^2 = r^4y^2 + a^2y^4$, wo r und a beliebige Konstanten sind. Auch diese war nicht die von Huygens gewollte

die der Ort der Brennpunkte derjenigen Hyperbeln ist, die einen Scheitel und eine Asymptote gemeinsam haben[1]); dann der geometrische Ort für alle Punkte, die von den Seiten eines Dreiecks Entfernungen haben, deren Produkt konstant ist[2]), der uns schon S. 24 begegnet ist; eine weitere entspringt der graphischen Darstellung einer kubischen Funktion einer komplexen Variabelen[3]), usw.

Gleichung, welche nämlich $2a^2x^2 = a^2y^2 + y^4$ lautet (Brief v. 19. Dez. 1690, a. a. O. S. 68—69), diese geht jedoch auf jene zurück, wenn man statt a setzt $\frac{r^2}{a}$.

Um sich ein Urteil zu bilden über die Schwierigkeit der von Huygens gestellten Aufgaben, über die zur ihrer Lösung nötigen Mittel, und die Allgemeinheit der erlangten Resultate, wollen wir sie einmal mit den modernen Methoden behandeln. Wir beachten zu dem Zwecke, daß die zweite jener Aufgaben, je nachdem man das Vorzeichen der Subtangente nimmt, sich auf die eine oder die andere der folgenden Differentialgleichungen zurückführen läßt:

$$-y \cdot dx = \frac{2x^2y - a^2x}{3a^2 - 2xy}\, dy, \qquad y \cdot dx = \frac{2x^2y - a^2x}{3a^2 - 2xy}\, dy,$$

oder auch

$$(3a^2 - 2xy)\, y \cdot dx + (2xy - a^2)\, x \cdot dy = 0,$$
$$(3a^2 - 2xy)\, y \cdot dx + (a^2 - 2xy)\, x \cdot dy = 0.$$

Wenden wir nun die Identität an

$$\frac{Mdx - Ndy}{Mx - Ny} = \frac{1}{2}\left\{\frac{Mx + Ny}{Mx - Ny}\, d\log xy + d\log\left(\frac{x}{y}\right)\right\},$$

so verwandeln sich diese in folgende anderen:

$$\frac{1}{2}\,\frac{d(xy)}{xy\,[a^2 - xy]} + d\log\frac{x}{y} = 0; \qquad \left[1 - \frac{xy}{a^2}\right]\frac{d(xy)}{xy} + \frac{1}{2}\, d\log\left(\frac{x}{y}\right) = 0,$$

und demnach durch Quadratur

$$x^3 = kxy^2 - ka^2y; \qquad x^3y = h^2 \cdot e^{\frac{2xy}{a^2}}$$

von diesen Gleichungen stimmt die erste mit der von Huygens überein, während die zweite sich von der Leibnizschen nicht unterscheidet. — Was nun die erste der Huygensschen Aufgaben anlangt, so werden wir von dieser, weil sie auf eine Kurve vierter Ordnung führt, im folgenden Abschnitt handeln.

Wir wollen hier noch die geeignete Gelegenheit benutzen zu der Bemerkung, daß in jüngerer Zeit J. Porro bei der Bearbeitung von Fragen aus der angewandten Mathematik auf Kurven stieß, die er courbes atuptiques nannte (C. R. XXXIV, 1852, S. 173) und die in ähnlicher Weise durch folgende Differentialgleichung definiert werden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + xy^2 + 2\varrho y\sqrt{x^2 + y^2 - \varrho^2}}{y^3 + yx^2 + 2\varrho x\sqrt{x^2 + y^2 - \varrho^2}}.$$

1) S. die von H. Brocard unter Nr. 61 im *Progr. math.* II, 1891, S. 128 gestellte und von A. Schiappa-Monteiro (a. a. S. 300) gelöste Frage, auf welche sich ferner eine Note von Brocard (*Progreso* II, 1893, S. 32) bezieht und eine größere Arbeit von demselben Schiappa-Monteiro (Das. S. 201—9 und 225—34).

2) E. Czuber, *Über einen geometrischen Ort und eine damit zusammenhängende Fläche* (Monatshefte Math. Phys. 3. 1892).

3) Stöckly, *Eigenschaften der aus rationalen ganzen Funktionen dritten Grades entspringenden Kurven* (Arch. Math. Phys. LVI, 1874).

III. Abschnitt.

Kurven vierter Ordnung.

Erstes Kapitel.

Allgemeines. Klassifikation.

52. Die Kurven vierter Ordnung hielten ihren Einzug in die mathematische Literatur sozusagen gleichzeitig mit denen dritter Ordnung, und ungefähr in derselben Weise, nämlich mit dem Auftreten einzelner, in verschiedener Weise spezialisierter Kurven als deren Repräsentanten. Während jedoch die allgemeine Theorie der Kurven dritter Ordnung schon mehr als zwei Jahrhunderte Lebenszeit zählt, kann man von der Theorie der Kurven vierter Ordnung nur sagen, daß sie erst vor etwa fünfzig Jahren angefangen sei. Und, während jene einen derartigen Grad der Entwicklung erlangt hat, daß man sie als eine der vollendetsten der ganzen Geometrie ansehen kann, bietet die Theorie der Kurven vierter Ordnung, wenngleich sie auch manche sehr schöne Kapitel enthält, dennoch beklagenswerte Lücken. So sind, wenn auch die von Steiner[1]) und Hesse[2]) begonnenen und von so vielen berühmten Geometern der späteren Zeit fortgesetzten Untersuchungen über die 28 Doppeltangenten einer allgemeinen Kurve vierter Ordnung bis in die kleinsten Einzelheiten die von diesen gebildete Konfiguration zu unserer Kenntnis gebracht haben[3]), dennoch die geometrischen Beziehungen zwischen ihren 24 Wendepunkten in geheimnisvollen Nebel gehüllt; so fehlen uns noch, wenn sich auch aus der Anwendung der hyperelliptischen Funktionen vieles Licht über diese Kurven verbreitet, erschöpfende Untersuchungen über die invarianten Eigenschaften der ternären biquadratischen Formen[4]). Nichtsdestoweniger sind einige der dahin gehörigen Formeln seit langer Zeit bekannt und sollen hier wieder erwähnt werden.

---

1) *Eigenschaften der Kurven vierten Grades rücksichtlich ihrer Doppeltangenten* (Crelles Journ. XLIX, 1855).

2) *Über die Doppeltangenten der Kurven vierten Grades* (Daselbst).

3) Vgl. H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, II. Bd. (II. Aufl., Braunschweig 1895) S. 419ff.

4) Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie* I. (Leipzig, 1876) S. 274, Note.

Wenn
$$f=\sum_{ijhk} a_{ijhk}x_i x_j x_h x_k = a_x^4 = b_x^4 = \cdots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$
die linke Seite der Gleichung einer allgemeinen Kurve vierter Ordnung ist, in der wirklichen und in der symbolischen Form, und man setzt
$$I=(ab\xi)^4, \quad J=(bc\xi)^2(ca\xi)^2(ab\xi)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$
so stellen die beiden Gleichungen $I=0$, $J=0$ zwei kontravariante Kurven dar, die erste von der vierten, die zweite von der sechsten Klasse; das Übertragungsprinzip von Clebsch führt alsbald zu dem Schlusse, daß jene umhüllt werden von den Geraden, die die Kurve in vier äquianharmonischen resp. harmonischen Punkten schneiden. Die Gleichung
$$I^3-6J^2=0$$
ist dann nichts anderes als die Tangentialgleichung der Kurve, und diese ist daher von der zwölften Klasse, wie es auch die Plückerschen Formeln erfordern. — Die Funktion
$$S=(bcd)(acd)(abd)(abc)a_x b_x c_x d_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$
gleich 0 gesetzt stellt hingegen eine zur gegebenen kovariante Kurve vierter Ordnung und gleichfalls allgemeine Kurve dar. Bekannt ist auch[1]), daß während jeder Kurve vierter Ordnung, $f=0$, eine zweite $S=0$ entspricht, umgekehrt die linke Seite der Gleichung jeder Kurve vierter Ordnung angesehen werden kann als Kovariante S von 36 bestimmten ternären biquadratischen Formen. — Eine andere Kovariante (sie ist von der sechsten Ordnung) erhält man durch Betrachtung der Hesseschen von f; hingegen ist eine Kontravariante (von der achtzehnten Klasse) durch die linke Seite der Gleichung der Cayleyschen Kurve gegeben; nun hat diese Kurve 21 vierfache Tangenten, die alle tangentiellen Singularitäten der Kurve in sich schließen[2]). Unter den Invarianten verdient, außer der Diskriminante folgende besonders vermerkt zu werden:
$$A=\begin{vmatrix} a_{1111} & a_{1112} & a_{1122} & a_{1113} & a_{1123} & a_{1133} \\ a_{1211} & a_{1212} & a_{1222} & a_{1213} & a_{1223} & a_{1233} \\ a_{2211} & a_{2212} & a_{2221} & a_{2213} & a_{2223} & a_{2233} \\ a_{1311} & a_{1312} & a_{1322} & a_{1313} & a_{1323} & a_{1333} \\ a_{2311} & a_{2312} & a_{2322} & a_{2313} & a_{2323} & a_{2333} \\ a_{3311} & a_{3312} & a_{3322} & a_{3313} & a_{3323} & a_{3333} \end{vmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$
deren geometrische Bedeutung wir alsbald (Nr. **53**) ersehen werden.

1) G. Scorza, *Un nuovo teorema sopra le quartiche piane generali* (Math. Ann. LII, 1899).

2) E. Laguerre, *Sur l'application de la théorie des formes binaires à la géométrie plane* (Comptes rendus LXXVIII, 1884; *Œuvres de Laguerre*, II, 1905,

Eine Frage über die Kurven vierter Ordnung, die sogleich aufgeworfen und in verschiedener Weise gelöst wurde, ist die nach ihrer Klassifikation. Obwohl sich diese als ein kompliziertes Problem von mühevoller Lösung herausstellte, so war sie doch schon von der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts an Gegenstand der Untersuchung seitens mehrerer Geometer, an deren Spitze wir den Abt Bragelogne finden. Dieser setzte in zwei langen Abhandlungen[1]) eine Methode auseinander, die Bestimmung der verschiedenen Typen auszuführen, unter welche die Kurven vierter Ordnung gruppiert werden können, eine Methode, die in letztem Grunde darin bestand, die allgemeine Gleichung vierten Grades in rechtwinkligen Punktkoordinaten auf gewisse kanonische Formen zurückzuführen. Aber das in Aussicht gestellte große Werk, in welchem die genannten Ideen ausführlich entwickelt werden sollten, hat niemals das Licht erblickt.

Nach dem Tode Bragelognes wurde das Problem, dem er so große Mühen geopfert hatte, gleichzeitig von zwei sehr berühmten Geometern wieder aufgenommen: L. Euler[2]) und G. Cramer[3]); vom ersteren, ohne die Bemühungen des französischen Abtes zu kennen, während der andere sie ausdrücklich zitiert[4]). Die von den beiden Mathematikern vorgeschlagenen Einteilungen stimmen in der Annahme des Hauptkriteriums der Klassifikation überein, nämlich des Verhaltens der Kurve im Unendlichen. Hiernach lassen sich alle reellen Kurven vierter Ordnung in neun Klassen einteilen[5]), die durch die folgenden Anordnungen der Gruppe ihrer vier unendlich fernen Punkte charakterisiert sind: 1) Vier imaginäre und zu je zweien konjugierte Punkte; 2) zwei reelle verschiedene und zwei konjugiert imaginäre Punkte; 3) vier reelle und verschiedene Punkte; 4) zwei konjugiert imaginäre und zwei reelle zusammenfallende; 5) zwei reelle verschiedene und zwei reelle zusammenfallende; 6) zwei reelle Doppelpunkte; 7) zwei konjugiert imaginäre Doppelpunkte; 8) ein einfacher und ein dreifacher Punkt; 9) ein vierfacher Punkt. — Jede dieser Klassen umfaßt

---

S. 375). E. Bertini, *Le tangenti multiple della Cayleyana di una quartica piana generale* (Atti Accad. Torino XXXII, 1896).

1) *Examen des lignes du quatrième ordre ou courbes du troisième genre* (Mém. Acad. Sciences, Paris 1730). S. auch die Note *Sur les lignes du quatrième ordre* (Das.).

2) *Introductio in analysin infinitorum* II. (Lausanne, 1748) S. 139—49.

3) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genève, 1750) S. 369—99.

4) Eine andere von den früheren unabhängige Klassifikation verdankt man E. Waring (*Miscellanea analytica,* Cantabrigiae 1792), welcher 12 Hauptfälle und 84551 Spezies unterschied.

5) In der Tat teilt man sie gewöhnlich nur in acht Klassen ein, aber es scheint uns doch, daß man die folgenden mit 6) und 7) bezeichneten auseinander halten muß.

mehrere Arten; Euler und Cramer haben eine beträchtliche Zahl derselben angegeben, indem sie sich damit begnügten, vielmehr nur die Möglichkeit zu vermerken, als die tatsächliche Existenz der entsprechenden Kurven nachzuweisen. Diese unabweisbare Ergänzung wurde von J. Plücker[1]) geliefert, der überdies, durch eine erschöpfende Aufzählung, die Zahl der verschiedenen Arten der ebenen Kurve vierter Ordnung auf 152 brachte und für jede Art die kanonische Gleichung fand.

Das genannte Klassifikationsverfahren ist aber, da es als Grundlage ein Prinzip hat, daß sich mit den herrschenden Ideen der Geometrie seit dem Triumphe ihrer projektiven Methoden schlecht verträgt, heute schon wenig mehr in Gebrauch und ist in Vergessenheit geraten. Vielmehr gibt man einem der beiden folgenden den Vorzug. Das erste hat die Betrachtung des Geschlechtes einer Kurve als Grundlage und demnach der Zahl und Natur ihrer singulären Punkte. Dementsprechend werden alle Kurven vierter Ordnung in vier große Kategorien eingeteilt, jenachdem sie vom Geschlechte 3, 2, 1, 0 sind. Die erste enthält die Kurven ohne vielfache Punkte, die zweite die mit einem Doppelpunkte oder einer Spitze versehenen[2]), die dritte die Kurven mit zwei Punkten von der Vielfachheit zwei (es sind die elliptischen Kurven vierter Ordnung), die letzte, die mit drei Doppelpunkten (Knoten, Spitzen, oder isolierten Punkten) oder einem dreifachen Punkte (es sind die rationalen Kurven vierter Ordnung).

Eine Gruppierung der Kurven vierter Ordnung, die nur gewöhnliche Singularitäten besitzen, nach ihren Plückerschen Charakteren liefert die folgende Tabelle:

---

1) *Theorie der algebraischen Kurven* (Bonn, 1839) S. 136—49. In der früheren *Enumération des courbes du quatrième ordre, d'après la nature différente de leurs branches infinies* (Liouvilles Journ. I, 1836) hatte derselbe Geometer nur 135 Gattungen betrachtet. Vgl. auch Beers, *Tabulae curvarum quarti ordinis* (Bonn, 1852).

2) Zu dieser großen Klasse gehört die in kartesischen Koordinaten durch die Gleichung $y^4 - x^4 + ay^2 + bx^2 = 0$ dargestellte Kurve, die von den französischen Geometern courbe du diable genannt wurde; der Anfangspunkt ist ein Knoten- oder ein isolierter Punkt, je nachdem $\frac{a}{b} \lessgtr 0$; die unendlich fernen Punkte der Winkelhalbierenden der Achsenwinkel sind einfache Punkte derselben. Besonders ist oft betrachtet worden (Moigno, *Leçons de calcul diff. et de calcul intégr. redigées d'après Cauchy* I, Paris 1840, S. 222; Briot et Bouquet, *Leçons de géométrie analytique* S. 367; Nievenglowsky, *Cours de géom. analytique* II., Paris 1895, S. 73) folgender Fall

$$y^4 - x^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 = 0.$$

Die älteste Erwähnung dieser Kurve, welche die eigentliche „Teufelskurve" ist, findet sich in der *Introduction* von G. Cramer (Genève 1750), wo diese Gleichung auf S. 19—23 sorgfältig diskutiert wird, um die Gestalt der Kurve festzulegen. Die „Teufelskurve" scheint eben nur wegen ihrer seltsamen Form bemerkenswert zu sein.

Geschlecht	Klasse	Doppelpunkte	Spitzen	Doppeltang.	Wendepunkte
3	12	0	0	28	24
2	10	1	0	16	18
2	9	0	1	10	16
1	8	2	0	8	12
1	7	1	1	4	10
1	6	0	2	1	8
0	6	3	0	4	6
0	5	2	1	2	4
0	4	1	2	1	2
0	3	0	3	1	0

Diese Einteilung kann weiter fortgesetzt werden durch die Betrachtung der Moduln der einzelnen Kurven.

Die zweite der oben angekündigten Methoden gründet sich auf topologische Betrachtungen. Vorbereitet von Cayley[1]) wurde sie von Zeuthen[2]) entwickelt und in einzelnen Punkten von Crone[3]) ergänzt. Sie führt zu Unterscheidung von sechsunddreißig Typen der ebenen Kurven vierter Ordnung ohne vielfache Punkte, die in dreizehn Klassen zerfallen; sie beruht auf der Erkenntnis, daß eine Kurve vierter Ordnung mit nicht verschwindender Diskriminante höchstens aus vier geschlossenen ganz auseinander liegenden Zügen besteht oder auch aus zweien, von denen der eine innerhalb des andern liegt. Für die rationalen Kurven hingegen beträgt die Zahl der wesentlich verschiedenen Typen neun[4]), unter denen sich Übergangsformen zu den ersteren finden. Schließlich wollen wir bemerken, daß die Kurven vierter Ordnung vom Geschlecht 2 oder 1, einem bekannten allgemeinen Satze von A. Harnack[5]) zufolge höchstens aus drei oder zwei Zügen bestehen. — Dieser Hinweis auf eine Betrachtung, auf die wir nicht weiter zurückkommen werden, möge genügen; der Leser, der genauere Angaben wünscht, nehme die Dissertation von Frl. Ruth Gentry zur Hand: *On the forms of plane quartic curves* (New-York, 1896).

Zum Schlusse dieser allgemeinen Betrachtungen bemerken wir, daß die Fragen, nach der mechanischen Erzeugung der Kurven 4. Ordnung durch F. Dingeldey[6]) gründlich untersucht wurden und

1) S. den Aufsatz *On quartic curves* (Philosophical Magazine, 4e Reihe, XXIX, 1865).

2) *Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième degré* (Math. Ann. VII, 1873).

3) *Sur la distribution des tangentes doubles sur les divers systèmes de coniques ayant un contact quadruple avec une courbe du quatrième degré.* (Das. XII, 1877).

4) A. Brill, *Über rationale Kurven vierter Ordnung* (Math. Ann. XII, 1877).

5) *Über die Vielteiligkeit der ebenen algebraischen Kurven* (Das. X, 1876).

6) *Über die Erzeugung von Kurven vierter Ordnung durch Bewegungsmechanismen* (Diss. Leipzig, 1885).

daß einige dieser Linien durch den „Kurvigraph Lebeau“ beschrieben werden können.[1])

53. Alle speziellen Kurven vierter Ordnung, mit denen wir uns beschäftigen werden, sind entweder elliptische (indem sie als Doppelpunkte oder Spitzen die zyklischen Punkte der Ebene haben) oder rationale[2]); demnach werden wir — in ähnlicher Weise, wie wir es im vorigen Abschnitt getan haben — ein besonderes Kapitel den ersteren, ein zweites den anderen widmen. Zunächst aber wollen wir zum Schlusse dieses Kapitels, — wie es früher auch in Nr. **17** geschehen ist — über einige Kurven vierter Ordnung ohne vielfache Punkte, die dennoch spezieller Art sind, berichten.

a) Die erste Stelle wollen wir der Clebschschen Kurve einräumen, welche die besondere Eigenschaft hat, daß die linke Seite ihrer homogenen Gleichung als Summe der Biquadrate von fünf linearen Formen[3]) darstellbar ist; sie läßt daher polare Fünfseite zu; analytisch ist sie dadurch charakterisiert, daß ihre Invariante A (s. Gl. (4)) gleich Null ist. Die Kovarariante S (Gl. (3)) einer Clebschschen Kurve gleich Null gesetzt, stellt eine spezielle Kurve vierter Ordnung dar, indem sich in sie vollständige Fünfseite einbeschreiben lassen; sie heißt die Lürothsche Kurve vierter Ordnung zum Andenken des Geometers, der sie zuerst untersucht hat[4]); sie wird durch das Verschwinden einer gewissen Invariante B charakterisiert.

b) Die durch eine Gleichung von folgender Gestalt dargestellte Kurve

$$x_1^4 + 4u_3x_1 + u_4 = 0,$$

wo u_3 und u_4 binäre Formen vom Grade 3 bezw. 4 sind, hat die Eigentümlichkeit, daß ihre Hessesche einen singulären Punkt hat; wir nennen sie die Geisersche Kurve, zu Ehren des Geometers, der sie zuerst erdacht und sich derselben bedient hat, um das Fehlen von Doppelpunkten und Spitzen in der Hesseschen einer allgemeinen Kurve beliebiger Ordnung nachzuweisen[5]).

---

1) J. Neuberg, *Sur les lignes tracées par le curvigraphe Victor Lebeau* (Liège Mém., 3e Sér., VII, 1902).

2) In betreff der Kurven, welche nur einen Doppelpunkt oder eine Spitze besitzen, verweisen wir auf die Abh. von J. de Vries, *Le quartique nodale* (Arch. Teyler, 2e Sér., IX, 1904).

3) S. die Fundamentalabhandlung von Clebsch, *Über Kurven vierter Ordnung* (Crelles Journ. LIX, 1861).

4) Man sehe die beiden Abhandlungen: *Einige Eigenschaften einer gewissen Gattung von Kurven vierter Ordnung* (Math. Ann. I, 1869) und *Neuer Beweis des Satzes, daß nicht jeder Kurve vierter Ordnung ein Fünfseit eingeschrieben werden kann* (Das. XIII, 1878).

5) *Sopra la teoria delle curve piane di quarto grado* (Ann. Matem. 2. Ser. IX, 1878).

c) Die Jacobische Kurve einer Geraden und eines syzygetischen Büschels von Kurven dritter Ordnung ist eine Kurve vierter Ordnung, die nur von zwölf Konstanten abhängt. Geometrisch ist sie durch die Lage ihrer 24 Wendepunkte charakterisiert, die sich in zwei Gruppen scheiden, gebildet aus den Ecken der Dreiseite eines syzygetischen Büschels. Analytisch hingegen ist sie dadurch gekennzeichnet, daß die kubische Invariante der linken Seite gleich Null ist, sowie auch die Invariante 6. Grades zugleich mit allen Unterdeterminanten 5. Grades. Man pflegt sie nach dem Namen ihres Entdeckers die Caporalische Kurve vierter Ordnung zu nennen[1]).

d) Sind im Raume sechs beliebige Punkte gegeben 1, 2, 3 ... 6, so gibt es ∞^1 Kegel 2. Ordnung, die alle diese enthalten. Der geometrische Ort ihrer Spitzen ist die sogenannte Weddlesche Fläche. Sie ist von der 4. Ordnung; die gegebenen Punkte sind Doppelpunkte derselben, und sie enthält nicht nur die 15 Verbindungsgraden r der 6 Punkte, so wie auch die 10 Geraden s, in denen sich zwei Ebenen $[i, j, h][l, m, n]$ schneiden, wo i, j, h, l, m, n eine Permutation der Zahlen 1, 2, ... 6 ist. Jeder ebene Schnitt Σ einer Weddleschen Fläche ist eine Kurve 4. Ordnung, die sowohl die 15 Punkte R enthält, in denen Σ von den r geschnitten wird, als auch die zehn Punkte S, in denen sie von den Geraden s getroffen wird. Die Punkte R und S bilden eine bemerkenswerte Konfiguration, und die Kurve enthält deren unzählige andere. Analytisch ist sie dadurch charakterisiert, daß die durch $A^2 + 144B$ ausgedrückte Invariante verschwindet, wo A und B die obigen Bedeutungen haben[2]).

e) Andere spezielle Linien entstehen bei der Aufsuchung aller Kurven vierter Ordnung, die durch eine oder mehrere harmonische Homologien in sich selbst transformiert werden[3]). Eine solche Untersuchung führt zu folgenden Resultaten:

1. Eine einzige Homologie; kanonische Gleichung der Kurve

$$u_0 x_3^4 + u_2 x_3^2 + u_4 = 0,$$

wo u_0, u_2, u_4 Formen in x_1, x_2 von dem durch die Indizes bezüglich angegebenen Grade sind. Wenn insbesondere $u_0 = 0$, entsteht eine Kurve mit einem Doppelpunkt, es ist die homologisch-harmonische Kurve von Cremona[4]).

---

1) E. Caporali, *Sopra una certa curva del* 4° *ordine* (Rendic. Accad. Napoli, 1882). Vgl. E. Ciani, *La quartica di Caporali* (Das. 1896).

2) F. Morley and J. R. Conner, *Plane Sections of a Weddle surface* (Amer. Journ. Mathem. XXXI, 1909).

3) E. Ciani, *I vari tipi possibili di quartiche piane più volte omologico-armoniche* (Rend. Circolo matem. Palermo XIII, 1899).

4) S. die *Observations géométriques à propros de la note de Mr. Brioschi „Sur les tangentes doubles d'une courbe du 4e ordre avec point double"* (Math. Ann. IV, 1871).

2. Drei Homologien, deren Zentren und Achsen ein Dreieck bilden; kanonische Gleichung

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i^2 x_k^2 = 0 \qquad (i, k = 1, 2, 3);$$

die Kurve hat 24 Wendepunkte, die zu je achten auf 15 Kegelschnitten eines Netzes liegen.

3. Drei Homologien, deren Zentren auf einer Geraden liegen, und deren Achsen durch einen Punkt gehen; kanonische Gleichung:

$$a x_3^4 + b x_1 x_2 x_3^2 + c x_3 (x_1^3 + x_2^3) + d x_1^2 x_2^2 = 0;$$

die Wendepunkte liegen zu je sechsen auf vier Kegelschnitten eines Büschels.

4. Fünf Homologien; kanonische Gleichung der Kurve:

$$a(x_1^4 + x_2^4) + b x_1^2 x_2^2 + c x_3^2 (x_1^2 + x_2^2) + d x_3^4 = 0;$$

die Wendepunkte liegen zu je achten auf 27 Kegelschnitten.

5. Sieben Homologien; kanonische Gleichung:

$$a(x_1^4 + x_2^4) + b x_1^2 x_2^2 + c x_3^4 = 0;$$

die Wendepunkte liegen zu je achten auf 36 Kegelschnitten.

6. Neun Homologien; kanonische Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^4 + \lambda \sum_{ik=1}^{3} x_i^2 x_k^2 = 0.$$

7. Fünfzehn Homologien; kanonische Gleichung:

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0;$$

außerdem gibt es noch 96 Homographien, die die Kurve in sich selbst verwandeln[1]).

8. Einundzwanzig Homologien; als kanonische Form der Kurven-Gleichung kann man folgende nehmen:

$$x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 + x_1^3 x_2 = 0.$$

Es ist diese die bemerkenswerteste von den nunmehr angeführten Kurven vierter Ordnung, sie heißt die Kleinsche Kurve[2]). F. Brioschi hat bemerkt, daß ihr erstes Glied mit der eigenen Kovariante vierter

---

1) W. Dyck, *Notiz über eine reguläre Riemannsche Fläche vom Geschlechte drei und die zugehörige „Normalkurve" vierter Ordnung* (Das. XVII, 1880).

2) Weil sie in der Abhandlung von F. Klein untersucht ist: *Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen* (Das. XIV, 1879). Vgl. R. Fricke, *F. Kleins Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen* I (Leipzig 1890) S. 701 ff.; ferner die Arbeit von M. W. Haskell, *Über die zu der Kurve $\lambda^3\mu + \mu^3\nu + \nu^3\lambda = 0$ im projektiven Sinne gehörende mehrfache Überdeckung der Ebene* (Amer. Journ. math. XIII, 1891), woselbst auch die duale Kurve untersucht wird.

Ordnung S übereinstimmt[1]); man kann auch nachweisen, daß dies die einzige Kurvenart von dieser Eigenschaft ist[2]).

Zum Schluß wollen wir noch bemerken, daß die Kurven, deren Gleichung auf die Formen

$$x_1^4 + u_4 = 0, \qquad x_1^3 x_2 + u_4 = 0$$

reduzierbar sind, die einzigen Kurven vierter Ordnung sind, die durch nichtharmonische Homologien in sich selbst transformiert werden.

f) Ganz anderen Betrachtungen, wie die vorhergehenden, verdankt ihren Ursprung eine Kurve vierter Ordnung ohne Doppelpunkte, die man von Rechtswegen die Humbertsche Kurve[3]) nennen kann. Dargestellt wird sie durch eine Gleichung von der Form

$$p_1^2 x_1^2 + p_2^2 x_2^2 + p_3^2 x_3^2 - 2p_2 p_3 x_2 x_3 - 2p_3 p_1 x_3 x_1 - 2p_1 p_2 x_1 x_2 = p x_1 x_2 x_3,$$

wo die p_1, p_2, p_3 die ersten Ableitungen nach x_1, x_2, x_3 einer binären quadratischen Form von x_1, x_2, x_3 sind, und p eine beliebige lineare Form derselben Variabelen. Jede Humbertsche Kurve kann vermittels einer „kanonischen Gleichung" von folgender Form dargestellt werden:

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 2x_2^2 x_3^2 - 2x_3^2 x_1^2 - 2x_1^2 x_2^2 = 4u x_1 x_2 x_3,$$

wo u eine neue lineare Form ist. Mannigfach sind die Eigenschaften, deren sich diese Kurve erfreut; wir beschränken uns auf die Bemerkung, daß es eine desmische Fläche vierter Ordnung gibt, deren sämtliche ebenen Schnitte Humbertsche Kurven sind: es ist dies jene Fläche, die man erhält, wenn man eine beliebige reziproke Transformation auf die Fläche der Krümmungsmittelpunkte einer zentrischen Fläche zweiter Ordnung anwendet.

g) A. Wiman[4]) hat das Problem nichtsingulärer Kurven vierter Ordnung mit linearen Transformationen in sich vollständig gelöst; er hat gefunden, daß es davon 12 verschiedene Arten gibt, deren Gleichungen in kanonischer Form die folgenden sind:

---

1) *Sopra una classe di curve del quarto ordine* (Atti Acc. Lincei, 3. Ser. VIII, 1884).

2) E. Ciani, *Un teorema sopra il covariante S della quartica piana* (Rendic. Circolo matem. Palermo XIV, 1900).

3) Weil sie ausführlich untersucht worden ist in einer Abhandlung von G. Humbert, *Sur une classe de courbes planes et sur une surface remarquable du quatrième ordre* (Liouvilles Journ. 4e Série, VI, 1890). F. Schur verdankt man die Bemerkung, daß man eine solche Kurve als spezielle Lürothsche Kurve ansehen kann (Journ. f. Math., XCV, 1883, S. 217).

4) *Über die algebraischen Kurven von den Geschlechtern $p = 2$, 5 und 6, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen* (Stockholm Akad. Bihang, 21, 1895).

G_2 . . . $x_3^4 + x_3^2(bx_1^2 + cx_1x_2 + dx_2^2) + (x_1^4 + ax_1^2x_2^2 + cx_2^4) = 0,$

G_4 . . . $x_3^4 + x_3^2(bx_1^2 + cx_2^2) + (x_1^4 + ax_1^2x_2^2 + cx_2^4) = 0,$

G_3 . . . $x_2x_3^2 + x_1^4 + ax_1^3x_2 + bx_1^2x_2^2 + x_1x_2^3 = 0,$

G_6 . . . $(x_1^2 + x_2^2)^2 + ax_1x_3(x_1^2 - 3x_2^2) + bx_3^2(x_1^2 + x_2^2) + x_3^4 = 0,$

G_8 . . . $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + ax_3^2(x_1^2 + x_2^2) + bx_1^2x_2^2 = 0,$

G'_6 . . . $x_2x_3^3 + x_1^4 + ax_1^2x_2^2 + x_2^4 = 0,$

G_{16} . . . $x_3^4 = x_1^4 + ax_1^2x_2^2 + x_2^4,$

G_{24} . . . $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + a(x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + x_1^2x_2^2) = 0,$

G_9 . . . $x_2x_3^2 = x_1(x_1^3 + x_2^3),$

G_{48} . . . $x_3^4 = x_1^4 + x_1x_2^3,$

G_{96} . . . $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$ (m. s. oben e 7!),

G_{168} . . . $x_2^3x_3 + x_2^3x_1 + x_1^3x_2$ (Kleinsche Kurve),

wo das Symbol G_r durch seinen Index r die Ordnung der zugehörigen Kollineationsgruppe angibt.

Zweites Kapitel.

Rationale Kurven vierter Ordnung im allgemeinen[1]).

54. Unter den spezialisierten Kurven vierter Ordnung können mit verhältnismäßig geringer Mühe untersucht werden solche, die die Maximalzahl singulärer Punkte besitzen. Derartige Kurven lassen sich vor allem mit den Methoden der projektiven Geometrie untersuchen, mit Zugrundelegung folgender Erzeugungsweise[2]): „Ein Strahlenbüschel (mit dem Zentrum O) und eine projektive Involution der Tangenten eines Kegelschnittes **K** erzeugen in der Ebene durch die Schnitte von Paaren entsprechender Elemente eine Kurve Γ“. Untersucht man mit Hilfe des Chaslesschen Korrespondenzprinzips die Zahl der auf einer beliebigen Geraden gelegenen Punkte der Kurve, so findet man, daß die Kurve Γ von der vierten Ordnung ist. Auf jedem Strahle des gegebenen Büschels gibt es außer dem Punkte O

---

1) Vgl. die von der K. Tech. Hochschule München herausgegebenen *Tafeln rationaler Kurven vierter Ordnung nebst einer dazu gehörigen Abh. von* A. v. Brill. — Es sei noch bemerkt, daß A. B. Basset die sextaktischen (sechspunktig berührenden) Punkte der Kurven 4. Ordnung bestimmt hat, welche a) drei Wendeknoten, oder b) einen Doppel- und zwei Rückkehrpunkte, oder c) drei Spitzen haben (*On the sextactic points of a quartic;* Quart. Journ. Math., 35, 1903).

2) A. Ameseder, *Über Kurven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten* (Wiener Ber. LXXIX, 2. Abt. 1879) und *Bemerkung über das Erzeugniss eines eindeutigen Strahlenbüschels und eines zweideutigen Strahlensystems zweiter Klasse* (Archiv Math. Phys. LXIV, 1879).

noch zwei verschiedene Punkte der Kurve; daher ist O ein Doppelpunkt. Außerdem entsteht auf der Involutionsachse der Tangenten eine Projektivität, indem man die Schnitte derselben mit den Strahlen des Büschels betrachtet; ihre Doppelpunkte sind offenbar auch Doppelpunkte der Kurve. Daher ist sie rational; usw.

Eine Kurve vierter Ordnung mit drei Doppel- oder Rückkehrpunkten kann aber noch auf andere Weise von einem Kegelschnitte abgeleitet werden. Man beachte nämlich, daß, wenn man die drei singulären Punkte A_1, A_2, A_3 zu Ecken des Fundamentaldreiecks nimmt, die Gleichung der Kurve folgende Gestalt annimmt:

$$a_{11}x_2^2x_3^2 + a_{22}x_3^2x_1^2 + a_{33}x_1^2x_2^2 + 2a_{23}x_1^2x_2x_3 + 2a_{31}x_2^2x_3x_1 + 2a_{12}x_3^2x_1x_2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Wenn man nun diejenige quadratische Transformation anwendet, die durch die Formel

$$\varrho x_i = \frac{1}{y_i}$$

definiert wird, wo (x_1, x_2, x_3) und (y_1, y_2, y_3) zwei beliebige entsprechende Punkte und ϱ ein Proportionalitätsfaktor ist, so erhält man den Kegelschnitt **K**

$$a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2 + 2a_{23}y_2y_3 + 2a_{31}y_3y_1 + 2a_{12}y_1y_2 = 0.$$

Folglich kann die Kurve (1) durch eine quadratische Transformation aus einem Kegelschnitte abgeleitet werden. Wenn der Kegelschnitt **K** die Seite A_2A_3 des Fundamentaldreiecks in zwei reellen Punkten berührt, so hat die Kurve Γ zwei reelle Tangenten in dem gegenüberliegenden Eckpunkte A_1, mit anderen Worten, dieser ist ein Knotenpunkt; wenn aber die beiden Schnittpunkte zusammenfallen, so ist er eine Spitze, und wenn sie konjugiert imaginär sind, ein isolierter Punkt. Wenn demnach der Kegelschnitt 6 reelle Schnitte mit dem Dreiecke $A_1A_2A_3$ hat, so hat Γ drei Knotenpunkte; sind die 6 Schnitte imaginär, drei isolierte Punkte; hat er drei Berührungen mit demselben, so hat Γ drei Spitzen[1]). Im ersten Falle berühren die 6 Tangenten an die Kurve in den Doppelpunkten denselben Kegelschnitt; dies wird leicht bewiesen, indem man die Kurve vierter Ordnung als von einem Kegelschnitt abgeleitet ansieht. Dieselbe Betrachtung beweist auch, daß die 6 Geraden, die von den Doppelpunkten aus gezogen die Kurve anderswo berühren, Tangenten eines Kegelschnittes sind. Im Falle einer dreispitzigen Kurve vierter Ord-

---

1) Die verschiedenen Gestalten, welche die Kurve Γ darbieten kann, sind auf den Tafeln I und II der *Math. Ann.* XII (Abhandlung von A. v. Brill) angegeben; die Kurven, welche die Gestalt der Fig. 9 haben, tragen zuweilen den Namen Lemnisceros; s. den Artikel *Lemnisceros* (und die zugehörigen Figuren) in der *Encyclopédie méthodique.* Daselbst sind auch die Namen Noeud oder Las d'amour als synonym mit Lemnisceros angeführt.

nung sind die drei Spitzentangenten in einen Punkt zusammenlaufende Geraden.

Eine einfache Transformation der Gleichung (1) läßt erkennen, daß die vier Doppeltangenten der Kurve durch die Gleichungen

$$\sqrt{a_{22}a_{33}}\,x_1 \pm \sqrt{a_{33}a_{11}}\,x_2 \pm \sqrt{a_{11}a_{22}}\,x_3 - (a_{23}x_1 + a_{31}x_2 + a_{12}x_3) = 0$$

dargestellt werden, und daß ihre Berührungspunkte einem neuen Kegelschnitt angehören[1]).

55. Außer diesen beiden geometrischen Methoden zur Untersuchung der rationalen Kurven vierter Ordnung gibt es noch eine dritte rein analytische, der man heutzutage den Vorzug gibt; es ist diejenige, welche die parametrische Darstellung der Kurvenpunkte anwendet und sich dabei der Theorie der binären biquadratischen Formen bedient. Setzt man

$$\varrho x_i = \sum_{k=0}^{k=4} a_{ik}\lambda^{4-k}, \qquad (i = 1, 2, 3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wo x_i die homogenen Koordinaten eines Punktes bedeuten, ϱ ein Proportionalitätsfaktor und λ ein Parameter ist, so erhält man eine parametrische Darstellung, deren alle rationalen Kurven vierter Ordnung fähig sind. Die Schnitte der Kurve (2) mit einer beliebigen Geraden erhält man, wenn man die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{k=4} \lambda^{4-k} \cdot \sum_{i=1}^{i=3} a_{ik}\xi_i = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

nach λ auflöst. Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ die Wurzeln, und setzt man

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = s_1, \qquad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \ldots = s_2,$$
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \ldots = s_3, \qquad \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4 = s_4,$$

so erhält man leicht als Kollinearitätsbedingung für die vier Punkte $(\lambda_1), (\lambda_2), (\lambda_3), (\lambda_4)$ das Verschwinden aller aus folgender Matrix entnommenen Determinanten

$$\left\| \begin{matrix} 1 & a_{10} & a_{20} & a_{30} \\ -s_1 & a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ s_2 & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ -s_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ s_4 & a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{matrix} \right\|$$

Dies verlangt bekanntlich, daß zwei derartige Determinanten gleich Null werden; man kann nun den so sich ergebenden beiden Gleichungen eine bequeme Form geben, indem man folgendermaßen ver-

---

1) Von Salmon angegeben: *Anal. Geom. d. höheren ebenen Kurven*, deutsch von Fiedler (Leipzig, 1873) S. 320.

fährt[1]). Schreibt man der Symmetrie halber s_0 statt 1 und bezeichnet mit d_{123} usw. die Determinanten, die man aus folgender Matrix erhält, mit dem üblichen Vorzeichen

$$\left\| \begin{matrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{matrix} \right\| \qquad \text{(A)},$$

so ist die erste jener Bedingungsgleichungen

$$s_0 d_{123} + s_1 d_{023} + s_2 d_{013} + s_3 d_{012} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Führt man noch zehn neue Konstanten α, β ein, derart, daß

$$\sum_{i=0}^{i=4} \alpha_i a_{ki} = 0, \qquad \sum_{i=0}^{i=4} \beta_i a_{ki} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3) \quad . \; . \; . \quad (5)$$

so sind nach einem bekannten Satze die aus der Matrix (A) entnommenen Determinanten dritter Ordnung proportional den entsprechenden Determinanten $(-1)^{m+n} \cdot \Delta_{mn}$ aus der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{matrix} \right\| \qquad \text{(B)}.$$

Gleichung (4) läßt sich daher schreiben:

$$s_0 \Delta_{40} - s_1 \Delta_{41} + s_2 \Delta_{42} - s_3 \Delta_{43} + s_4 \Delta_{44} = 0.$$

Verallgemeinern wir dieses Resultat, so sieht man, daß die Kollinearitätsbedingungen folgende Form annehmen:

$$\sum_{i=0}^{i=4} (-1)^i s_i \Delta_{ki} = 0;$$

oder, da man diese auch schreiben kann

$$\alpha_k \sum_{i=0}^{i=4} (-1)^i s_i \beta_i - \beta_k \sum_{i=0}^{i=4} (-1)^i s_i \alpha_i = 0,$$

so folgt, daß die beiden Gleichungen

$$\sum_{i=0}^{i=4} (-1)^i s_i \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{i=4} (-1)^i s_i \beta_i = 0 \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

hinreichen, die Kollinearitäts-Bedingung für die vier Punkte (λ_1), (λ_2), (λ_3), (λ_4) auszudrücken. — Zahlreich sind die Anwendungen hiervon. So erhält man durch Elimination von λ_4 die Kollinearitäts-Bedingung der drei Punkte (λ_1), (λ_2), (λ_3). Setzen wir dann $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, so erhält man eine Gleichung (6. Grades), deren Wurzeln die Parameter

1) W. Franz Meyer, *Apolarität und rationale Kurven* (Tübingen, 1883) S. 7.

der Wendepunkte sind; diese sechs Punkte gehören einem Kegelschnitte an[1]). Setzen wir hingegen in (5) $\lambda_2 = \lambda_1$ und $\lambda_4 = \lambda_3$, so erhalten wir zwei Gleichungen, aus denen durch Elimination von λ_3 die Bestimmungsgleichung für die Parameter der Berührungspunkte der (vier) Doppeltangenten entsteht. Ferner: Wenn man die durch Elimination von λ_4 aus den Gleichungen (5) sich ergebende Gleichung als identisch für λ_3 befriedigt voraussetzt, so findet man die für die Bestimmung der drei Doppelpunkte der Kurve geeigneten Gleichungen, indem die einfachen symmetrischen Funktionen $(\lambda_1 + \lambda_2)$ und $(\lambda_1 \cdot \lambda_2)$ zwei Parameter liefern, die einem Doppelpunkte angehören[2]). Setzt man schließlich $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda$, so verwandeln sich die Gleichungen (6) in zwei biquadratische Gleichungen für λ, deren Resultante $= 0$ gesetzt die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Undulationspunktes ausdrückt. U. s. w.

In die kleineren Details dieser algebraischen Entwicklungen können wir hier nicht eingehen; bemerken wollen wir hingegen noch, daß wenn man

$$\sum_{i=1}^{i=3} a_{ik}\xi_i = \alpha_k \qquad (k = 0, 1, 2, 3, 4) \quad . \quad . \quad (7)$$

setzt, die Gleichung (3) wird zu

$$\alpha_0 \lambda^4 + \alpha_1 \lambda^3 + \cdots + \alpha_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

Berechnet man nun die quadratische und kubische Invariante der linken Seite dieser, als biquadratische Funktion von λ betrachteten, Gleichung, so erhält man die beiden Gleichungen

$$12\alpha_0\alpha_4 - 3\alpha_1\alpha_3 + \alpha_2^2 = 0; \qquad \begin{vmatrix} 12\alpha_0 & 3\alpha_1 & 2\alpha_2 \\ 3\alpha_1 & 2\alpha_2 & 3\alpha_3 \\ 2\alpha_2 & 3\alpha_3 & 12\alpha_4 \end{vmatrix} = 0 \quad . \quad . \quad (8)$$

Erinnert man sich der geometrischen Bedeutung der Invarianten einer biquadratischen binären Form und beachtet, daß von den Gleichungen (8) die erste quadratisch und die zweite kubisch in den Koordinaten ξ ist, so sieht man: die erste stellt einen Kegelschnitt dar, der von den Geraden umhüllt wird, welche die Kurve vierter Ordnung in einem Quadrupel äquianharmonischer Punkte schneiden, während die zweite der Gleichungen (8) eine Kurve dritter Klasse darstellt,

---

1) Dieser bemerkenswerte Satz, der erste, welcher die Verteilung der Wendepunkte der Kurven vierter Ordnung betrifft (vgl. Nr. 52), wurde 1875 von J. Graßmann entdeckt (s. die Inaugural-Dissertation *Zur Theorie der Wendepunkte. besonders der C_4*, Berlin) und unabhängig davon, zwei Jahre später von A. Brill (s. die o. a. Abhandlung *Über rationale Kurven vierter Ordnung,* Math. Ann. XII, 1877).

2) Vgl. auch Nagel, *Bestimmung der Doppelpunkte einer rationalen Kurve vierter Ordnung* (Das. XIX, 1882).

umhüllt von den Geraden, die dieselbe Kurve in Quadrupeln harmonischer Punkte schneiden[1]).

56. Zahlreiche Fragen der Geometrie führen, wie wir im Verlaufe dieses Abschnittes sehen werden, zu Kurven vierter Ordnung mit 3 Doppelpunkten[2]). Wir erachten es aber für geeignet an dieser Stelle auf eine hinzuweisen, die sich in der Theorie der Kegelschnitte findet[3]).

Jeder Punkt M der Ellipse E

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

bestimmt mit den beiden Brennpunkten F und F' derselben ein Dreieck, dessen Höhenpunkt M' sein möge; bewegt sich M auf der Ellipse E, so beschreibt M' eine Kurve E', deren Gleichung leicht zu finden ist. Sind nämlich $a \cdot \cos\varphi$ und $b \cdot \sin\varphi$ die Koordinaten von M, so können die von M' folgendermaßen dargestellt werden:

$$x = a \cdot \cos\varphi, \quad y = \frac{a^2 \cdot \sin^2\varphi - b^2}{b \cdot \sin\varphi};$$

durch Elimination von φ erhält man dann

$$a^2(c^2 - x^2)^2 - b^2y^2(a^2 - x^2) = 0, \quad \text{wo} \quad c^2 = a^2 - b^2 \quad . \quad (10)$$

als Gleichung von E'. Diese ist demnach eine Kurve, die zu Doppelpunkten die Brennpunkte F, F' und den unendlich fernen Punkt der kleinen Achse hat; die entsprechenden Asymptoten sind die Geraden $x = \pm a$ und begrenzen einen Streifen der Ebene, innerhalb dessen alle reellen Punkte der Kurve liegen, diese berührt die Ellipse in den Endpunkten der kleinen Achse.

---

1) W. Stahl, *Über rationale ebene Kurven vierter Ordnung* (Crelles Journ. CI, 1887). Viele andere Eigenschaften der in Rede stehenden Kurven finden sich in der Inaugural-Dissertation von W. Bretschneider, *Über Kurven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten* (Erlangen, 1875), während zahlreiche bibliographische Angaben in den *Mitteilungen des math.-naturw. Vereins in Württemberg* 2. Reihe, I, 1899, S. 24 u. 55 gesammelt sind.

2) Die Mechanik führt häufig auch zu Kurven dieser Art. Ein Beispiel davon ist z. B. die sogenannte Seiltänzerkurve; sie ist der Ort der Füße eines Menschen, der auf einem Seile geht, von dessen Enden eines befestigt ist, während das andere Ende mit einem Gewichte beschwert ist, nachdem es um eine Rolle geschlungen ist. J. B. Bérard (*Opuscules mathématiques,* 1811) fand als Gleichung derselben folgende

$$y^2 = \frac{x^2(b-x)^2}{a-(1-x)^2};$$

sie zeigt, daß sie als Doppelpunkte den Anfangspunkt, den unendlich fernen von Oy und den Punkt $x = b$, $y = 0$ hat.

3) Köttgen, *Die geometrischen Örter der ausgezeichneten Punkte des Ellipsen- und Hyperbeldreiecks* (Progr. Duisburg, 1852); Hochheim, *Über geometrische Örter der merkwürdigen Punkte des Dreiecks* (Zeitschr. Math. Phys. XV, 1870).

Würde man an Stelle der Ellipse (9) die Hyperbel H betrachtet haben

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

so würde man eine Kurve H′ erhalten haben mit der Gleichung:

$$a^2(c^2 - x^2)^2 + b^2y^2(a^2 - x^2) = 0, \quad \text{wo aber} \quad c^2 = a^2 + b^2,$$

ganz ähnlich der vorigen, aber von ganz verschiedenem Aussehen, indem, von anderem abgesehen, alle ihre reellen Punkte außerhalb des von den Geraden $x = \pm a$ begrenzten Streifens liegen.

Zu denselben Schlüssen gelangt man auch ohne Rechnung durch Betrachtung der Methode, durch welche sich die Kurve E′ und H′ als spezieller Fall folgender allgemeinen Transformation ableiten lassen: Gegeben zwei feste Punkte A_1 und A_2 in einer Ebene Π; man lasse jedem Punkte M von Π den Punkt M' entsprechen, der der Höhenpunkt des Dreiecks MA_1A_2 ist. Dann wird umgekehrt jedem Punkte M' im allgemeinen ein einziger Punkt M entsprechen, nämlich derjenige, in welchem die von A_1 und A_2 bezügl. auf A_2M' und A_1M' gefällten Lote sich schneiden. Durchläuft M eine Gerade r, so beschreiben A_1M und A_2M perspektive und daher projektive Büschel; projektiv werden daher auch die von den Senkrechten aus A_1 und A_2 erzeugten Büschel, der Punkt M' erzeugt daher einen Kegelschnitt, der durch A_1 und A_2 geht. Da nun dem Punkte, in welchem r die Gerade A_1A_2 trifft, als Punkt M betrachtet, als Punkt M' der in der zu A_1A_2 senkrechten Richtung gelegene unendlich ferne Punkt A_∞ entspricht, so geht dieser Kegelschnitt durch A_∞. M und M' entsprechen sich also in einer quadratischen Transformation, deren Fundamentalpunkte $A_1A_2A_\infty$ sind; den Punkten $A_1A_2A_\infty$ entsprechen beziehungsweise die Geraden A_1A_∞, A_2A_∞, A_1A_2; einem Kegelschnitte entspricht eine Kurve vierter Ordnung, die $A_1A_2A_\infty$ zu Doppelpunkten hat; unter der Voraussetzung, daß A_1 und A_2 dessen Brennpunkte seien, findet man die angegebenen Eigenschaften der Kurven E′ und H′.

57. Eine Kurve vierter Ordnung ist nicht nur dann rational, wenn sie drei Doppelpunkte besitzt, sondern auch wenn sie mit einem dreifachen Punkte versehen ist. Nehmen wir diesen als Ecke A_3 des Fundamentaldreiecks, so nimmt die Gleichung der Kurve folgende Gestalt an:

$$x_3u_3 - u_4 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

wo u_3, u_4 binäre Formen in x_1, x_2 sind, die erste kubisch, die zweite biquadratisch; setzt man darin $\frac{x_1}{\lambda_1} = \frac{x_2}{\lambda_2}$, so gelangt man zu folgender parametrischen Darstellung der Kurve

$$\varrho x_1 = \lambda_1 u_3(\lambda_1, \lambda_2), \quad \varrho x_2 = \lambda_2 u_3(\lambda_1, \lambda_2), \quad \varrho x_3 = u_4(\lambda_1, \lambda_2). \quad (13)$$

Wir überlassen es dem Leser, auf diese Gleichung die Betrachtungen und Berechnungen anzuwenden, die wir oben bei der Gleichung (2) angegeben haben, und wollen sogleich noch eine in diese Kategorie gehörende Kurve anführen, nämlich die in kartesischen Koordinaten durch folgende Gleichung dargestellte:

$$x^2(x^2+y^2)=ay(x^2-y^2). \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Der Anfang ist ein dreifacher Punkt und die entsprechenden Tangenten sind die x-Achse und die Halbierungslinien der Achsenwinkel; die Kurve besteht aus zwei zu einander in bezug auf die y-Achse symmetrischen Blättern und einem dritten unendlichen, das symmetrisch in bezug auf die Ordinatenachse und gelegen am unteren Teile der Abszissenachse. Diese Eigenschaften rechtfertigen den Namen parabolisches Trifolium, den man der Kurve gegeben hat[1]). Sie geht durch die unendlich-fernen imaginären Kreispunkte, hat als außerordentlichen Brennpunkt den Punkt $(0, a)$, als Doppeltangente die Gerade

$$y=a(3-\sqrt{2}), \quad \text{usw.}$$

Eine Kurve vierter Ordnung ist auch rational, wenn sie eine Spitze zweiter Art und einen Doppel- oder Rückkehrpunkt besitzt. Rational ist z. B. die durch die folgende Gleichung dargestellte Kurve:

$$-(3x^3+x^2)+y(72x^2+205x+125)$$
$$-y^2(29x+17)-y^3(x+9)+2y^4=0;$$

sie besitzt eine Spitze I. und eine II. Art und die folgende Parameterdarstellung:

$$x=-\frac{(\lambda+2)(\lambda^3-\lambda^2+2\lambda-4)}{\lambda^3(\lambda+1)}, \quad y=\frac{(\lambda+2)^2(\lambda-3)}{\lambda^2(\lambda+1)}.$$

Für analytische Zwecke wurde sie durch J. Sylvester[2]) in die Wissenschaft eingeführt und durch den Namen Bicorne bezeichnet; später wurde sie durch A. Cayley[3]) ausführlich untersucht.

Drittes Kapitel.

Elliptische, insbesondere bizirkulare, Kurven vierter Ordnung im allgemeinen.

58. Die Kurven vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten (Knoten, Spitzen oder isolierten Punkten) können durch Projektion

---

1) G. de Longchamps, Journ. Math. spéc. 3e Ser., II 1888, S. 255 u. 285.

2) *On the real and imaginary roots of algebraic equations* (Phil. Trans. 154, London 1864, S. 579—666).

3) *An eight memoir upon quartics* (Id. 157, London 1867; oder The collected papers VI, S 162—164).

von Raumkurven vierter Ordnung erster Spezies von einem außerhalb liegenden Punkte erhalten werden. Man bekommt so nicht nur eine geometrische Methode, die sehr bequem ist, um ihre Eigenschaften aufzustellen, sondern auch die Mittel, die Koordinaten vermittelst elliptischer Funktionen eines Parameters darzustellen; es genügt nämlich hierfür die Ausdrücke der homogenen Koordinaten einer Kurve vierter Ordnung erster Spezies durch Jacobische[1]) oder Weierstraßsche[2]) Funktionen anzuwenden.

Dieselben Kurven lassen sich geometrisch auch erzeugen, wenn man auf eine Kurve dritter Ordnung ohne vielfachen Punkt eine quadratische Transformation anwendet, die zu Fundamentalpunkten zwei Punkte der Kurve selbst hat. So gelangt man außer zu einem Verfahren, geometrisch die auf eine elliptische Kurve vierter Ordnung bezüglichen Sätze aufzustellen, auch in den Besitz eines Mittels, die Koordinaten durch elliptische Funktionen auszudrücken; hierfür genügt es, sich auf die in Nr. **13** aufgestellten Formeln zu stützen.

Zu derselben parametrischen Darstellung gelangt man auch durch eine von A. Clebsch in seiner klassischen Abhandlung *Über diejenigen Kurven, deren Koordinaten sich als elliptische Funktionen eines Parameters darstellen lassen* (Crelles Journ. LXIV, 1865) angewandte Methode. Man nehme zu dem Zwecke als Fundamentaldreieck eines Systems homogener Koordinaten ein Dreieck, dessen Ecken

$$x_1 = 0 \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

die Doppelpunkte der Kurve sind; ihre Gleichung nimmt dann folgende Gestalt an

$$x_2^2 x_3^2 + 2x_1 x_2 x_3 (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3) + x_1^2 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) \cdot (c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3) = 0 . \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Greift man auf der Kurve zwei beliebige Punkte heraus, so kann man diese im Verein mit den beiden Doppelpunkten als die Grundpunkte eines Büschels von Kegelschnitten ansehen, welches auf der Kurve vierter Ordnung eine lineare Reihe von unendlich vielen Punktepaaren ausschneidet, die auf ∞^1 Geraden liegen, die einen Kegelschnitt einhüllen. Wenn z. B. das Büschel durch die Gleichung

$$x_1 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) + \lambda x_2 x_3 = 0$$

dargestellt wird, so hat der eingehüllte Kegelschnitt die Gleichung:

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)(c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3) - (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)^2 = 0 .$$

---

1) G. Loria, *Sull' applicazione delle funzioni Jacobiane allo studio delle linee sghembe di quarto ordine e prima specie* (Rend. Acc. Lincei 4. Ser. VI, 2. Sem. 1890).

2) G. Loria, *Le curve di genere* 1 *e le funzioni* σ *di Weierstraß* (Giorn. di Matem. XXXI, 1893).

Man gelangt so zu Ausdrücken für x_1, x_2, x_3 in rationalen Funktionen eines Parameters und Quadrat-Wurzeln einer biquadratischen Funktion desselben; führt man nun an Stelle dieses Parameters eine geeignete elliptische Funktion eines neuen Parameters ν ein, so gelangt man zu Formeln von folgendem Typus:

$$\left.\begin{aligned} \varrho x_1 &= c_1\left[sn^2\left(\nu - \frac{\xi+\sigma}{2}\right) - sn^2\,\delta_2\right]\left[sn^2\left(\nu + \frac{\xi+\sigma}{2}\right) - sn^2\delta_3\right] \\ \varrho x_2 &= c_2\left[sn^2\left(\nu + \frac{\xi+\sigma}{2}\right) - sn^2\delta_3\right]\left[sn\left(\nu - \frac{\xi+\sigma}{2}\right) - sn^2\left(\varepsilon - \frac{\xi-\sigma}{2}\right)\right] \\ \varrho x_3 &= c_3\left[sn^2\left(\nu - \frac{\xi+\sigma}{2}\right) - sn^2\,\delta_2\right]\left[sn\left(\nu + \frac{\xi+\sigma}{2}\right) - sn^2\left(\varepsilon + \frac{\xi-\sigma}{2}\right)\right] \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Die beiden Parameter des Doppelpunktes $x_1 = x_3 = 0$ sind $\frac{\xi+\sigma}{2} \pm \delta_2$, die des anderen $-\frac{\xi+\sigma}{2} \pm \delta_3$. Zwischen den Parametern $\nu_1, \nu_2, \ldots$ der Punkte, in denen die betrachtete Kurve vierter Ordnung von einer Kurve m^{ter} Ordnung geschnitten wird, besteht eine lineare Kongruenz, die, je nachdem die schneidende Kurve nicht durch einen Doppelpunkt geht oder einen oder beide Doppelpunkte enthält, verschiedene Form annimmt; entsprechend diesen drei Fällen haben wir folgende Kongruenzen (wo K und K' die gewöhnliche Bedeutung haben):

$$\left.\begin{aligned} &\nu_1+\nu_2+\cdots\,\nu_{4m-4}+\nu_{4m-3}+\nu_{4m-2}+\nu_{4m-1}+\nu_{4m} \equiv 0 && (3)\\ &\nu_1+\nu_2+\cdots\,\nu_{4m-4}+\nu_{4m-3}+\nu_{4m-2} \equiv \pm(\xi+\sigma) && (4)\\ &\nu_1+\nu_2+\cdots\,\nu_{4m-4} \equiv 0 && (5) \end{aligned}\right\} \text{modd. } 2K, 2iK'.$$

Zeigen wir an einigen Beispielen, wie leicht man mit deren Hilfe Eigenschaften der Kurve auffindet. Ist (ν) ein Punkt, dessen entsprechende Tangente durch einen Doppelpunkt geht, so hat man

$$2\nu \equiv \pm(\xi + \sigma),$$

daher hat man für ν die folgenden beiden Quadrupel von inkongruenten Werten

$$\frac{\xi+\sigma}{2}, \quad \frac{\xi+\sigma}{2} + K, \quad \frac{\xi+\sigma}{2} + iK', \quad \frac{\xi+\sigma}{2} + K + iK',$$

$$-\frac{\xi+\sigma}{2}, \quad -\frac{\xi+\sigma}{2} + K, \quad -\frac{\xi+\sigma}{2} + iK', \quad -\frac{\xi+\sigma}{2} + K + iK'.$$

Von jedem Doppelpunkte kann man also vier Tangenten ziehen und die beiden so gebildeten Gruppen sind projektiv. Da man die Korrespondenz in vier verschiedenen Weisen aufstellen kann, so sind wir zu folgendem Schlusse berechtigt:

Satz: **Die beiden Tangentenquadrupel, die man an eine elliptische Kurve vierter Ordnung von ihren Doppelpunkten aus ziehen kann, schneiden sich in 16 Punkten, die zu je vieren auf vier Kegelschnitten liegen, die durch die Doppelpunkte selbst gehen.**

Ähnlich hat man: wenn (ν) ein Punkt ist, in welchem die betrachtete Kurve eine Berührung dritter Ordnung mit einem durch die Doppelpunkte gehenden Kegelschnitt zuläßt,

$$4\nu \equiv 0,$$

und daher

$$\nu = \frac{pK + qiK'}{2}.$$

Es ist notwendig und hinreichend, den ganzzahligen p und q die Werte 0, 1, 2, 3 zu erteilen; man erhält so im ganzen 16 Kegelschnitte, von denen jeder durch ein p und q angegeben werden kann. Man kann sie in folgenden vier Gruppen anordnen:

0,0	0,2	2,0	2,2
0,1	0,3	2,1	2,3
1,0	1,2	3,0	3,2
1,1	1,3	3,1	3,3;

und so ersieht man, unter Benutzung von Gleichung (5), **daß in den Berührungspunkten zweier beliebigen Kegelschnitte derselben Gruppe mit der Kurve vierter Ordnung diese selbst von einem selben Kegelschnitt berührt wird, der durch die Doppelpunkte geht**; derartiger Kegelschnitte gibt es im ganzen $4 \cdot 16 = 64$. **Außerdem liegen auf einem Kegelschnitte, der durch die Doppelpunkte geht, auch die Berührungspunkte der vier Kegelschnitte aus einer selbigen Gruppe**; man erhält so vier andere mit der Kurve vierter Ordnung in Beziehung stehende Kegelschnitte. Andere $4 \cdot 16 = 64$ erhält man durch Betrachtung der Berührungspunkte von vier Kegelschnitten, von denen man einen aus jeder Gruppe gewählt hat; usw.[1])

59. In dem Falle, daß die Doppelpunkte der Kurve mit den beiden zyklischen Punkten der Ebene zusammenfallen, nennt man die Kurve eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung[2]). Eine solche kann als stereographische Projektion der Kurve, in welcher eine Kugel

1) Andere Eigenschaften sind in einer Note von G. Humbert angegeben *Sur la courbe du quatrième degré à deux points doubles* (Comptes rendus XCVII, 1888) wo die Koordinaten eines Kurvenpunktes mittels Θ-Funktionen ausgedrückt sind.

2) Vgl. J. Casey, *On bicircular Quartics* (Trans. Irish Acad. XXIV, 1869); G. Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Paris 1873); F. Franklin, *On confocal bicircular Quartics* (Amer. Journ. Math. XII, 1890); usw. Ein Verfahren, eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung vermittelst eines Gelenkmechanismus zu zeichnen, wurde von A. Mannheim (Proc. London Math. Soc., Bd. VI, 1874—75, S. 35—36) entdeckt; ein anderes wurde von W. Woolsey Johnson in Mess. of Math. Bd. V, S. 159 angegeben und beschrieben von Carr (*A synopsis of elementary results in pure and applied Mathematics* I, 2. Teil, London 1886, S. 738).

von einer Fläche zweiter Ordnung, die nicht durch das Projektionszentrum geht, geschnitten wird, angesehen werden. Man kann sie aber auch sich entstanden denken durch Transformation einer zirkularen Kurve dritter Ordnung vermittelst reziproker Radien. Da nun bei einer solchen Transformation den vier auf einem Kreise gelegenen Punkten wiederum vier ebensolche entsprechen und überdies den Brennpunkten der ursprünglichen Kurve die Brennpunkte der transformierten entsprechen, so führt der Hartsche Satz (s. Nr. **21**) alsbald zu folgendem Schlusse: **Eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung läßt 16 Brennpunkte zu, die zu je vieren auf einem Kreise gelegen sind.** Übrigens ist dieser Fall nur ein Spezialfall des ersten Satzes, den wir in der vorigen Nummer mit Hilfe der parametrischen Darstellung aufgestellt haben.

In rechtwinkligen kartesischen Koordinaten kann man die Gleichung einer bizirkularen Kurve immer in folgender Form schreiben:

$$(x^2 + y^2)^2 + (\alpha x + \beta y)(x^2 + y^2) + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (6)$$

Verlegt man nun den Anfang in den Punkt $\left(-\frac{\alpha}{4}, -\frac{\beta}{4}\right)$, so vereinfacht sie sich und erhält folgende Form:

$$(x^2 + y^2)^2 + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (7)$$

Jener Punkt heißt der Fundamentalpunkt der Kurve vierter Ordnung und besitzt eine bemerkenswerte Eigenschaft[1]). Gehen wir nämlich zu Polarkoordinaten über, so wird Gleichung (7)

$$\varrho^4 + (a_{11}\cos^2\omega + 2a_{12}\cos\omega \cdot \sin\omega + a_{22}\sin^2\omega)\varrho^3 + 2(a_{11}\cos\omega + a_{23}\sin\omega)\varrho + a_{33} = 0.$$

Sind daher M_1, M_2, M_3, M_4 die Schnitte einer durch den Fundamentalpunkt gehenden Geraden mit der Kurve, so ist immer

$$OM_1 + OM_2 + OM_3 + OM_4 = 0;$$

ist daher M_{ih} der Mittelpunkt der Strecke M_iM_h, so kann man schreiben

$$OM_{ih} + OM_{jk} = 0 \quad \text{(wo } ihjk \text{ eine Permutation von 1 2 3 4 ist).}$$

O ist also der Mittelpunkt der Strecke $M_{ih}M_{jk}$. Es ist leicht, hieraus zu schließen: **In der Ebene jeder bizirkularen Kurve vierter Ordnung gibt es einen Punkt** (den Fundamentalpunkt), **der gleichen Abstand hat von den beiden Mittelpunkten zweier Schnittpunktepaare**

1) Auf diesen Punkt wird in der Abhandlung von G. Humbert, *Sur les surfaces cyclides* (Journ. de l'Éc. polyt. LV, Cahier 1885) hingewiesen.

der Kurve mit einer beliebigen Geraden, auch wenn diese jenen Punkt nicht enthält[1]).

Mit Hilfe der allgemeinen Gleichung (6) kann man auch zeigen, **daß jede bizirkulare Kurve vierter Ordnung die Hüllkurve eines beweglichen Kreises ist, der einen festen rechtwinklig schneidet, und dessen Mittelpunkt sich auf einem gegebenen Kegelschnitte** (dem Deferent-Kegelschnitte) **bewegt.** Seien nämlich

$$C_i \equiv (x-\alpha_i)^2 + (y-\beta_i)^2 - r_i^2 = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad . \quad . \quad (8)$$

die Gleichungen dreier zum gegebenen rechtwinkligen Kreise, so repräsentiert die Gleichung

$$\lambda_0 C_0 + \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

welches auch die Konstanten λ_0, λ_1, λ_2 sein mögen, einen anderen Kreis, der dieselbe Eigenschaft hat. Die λ sind proportional den baryzentrischen Koordinaten des Mittelpunktes O dieses Kreises in bezug auf das Dreieck, das die Mittelpunkte der drei ersteren zu Ecken hat. Da nun der Annahme gemäß O einem Kegelschnitte angehört, so sind die λ durch eine Beziehung folgender Art miteinander verknüpft,

$$\sum_{ik} a_{ik}\lambda_i\lambda_k = 0 \qquad (i, k = 0, 1, 2;\ a_{ik} = a_{ki}) \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Um die Enveloppe des Kreises (9) unter der Bedingung (10) zu finden, setzen wir $\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = p$, $\frac{\lambda_2}{\lambda_0} = q$, und haben dann an Stelle von (9) und (10) die Gleichungen

$$C_0 + pC_1 + qC_2 = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9')$$

$$a_{11}p^2 + 2a_{12}pq + a_{22}q^2 + 2a_{01}p + 2a_{02}q + a_{00} = 0. \quad . \quad (10')$$

Diese müssen wir einer allgemeinen Vorschrift folgend mit den Ableitungen nach p und q von folgender Gleichung kombinieren

$$a_{11}p^2 + 2a_{12}pq + a_{22}q^2 + 2a_{01}p + 2a_{02}q + a_{00} + 2\varrho(C_0 + pC_1 + qC_2) = 0,$$

wo ϱ eine Hilfsgröße ist. Diese abgeleiteten Gleichungen sind nun

$$a_{01} + a_{11}p + a_{21}q + \varrho C_1 = 0,$$
$$a_{02} + a_{12}p + a_{22}q + \varrho C_2 = 0.$$

Multiplizieren wir sie bezügl. mit p und q, ziehen sie dann von der vorigen ab und berücksichtigen auch Gleichung (9'), so erhalten wir:

$$a_{00} + a_{10}q + a_{20}q + \varrho C_0 = 0.$$

Diese mit den beiden vorhergehenden und (9') bilden ein lineares

1) Elgé, *Sur les quartiques bicirculaires* (Journ. math. spéc., 4e Ser. V, 1896).

System in p, q, ϱ; die Elimination dieser Größen liefert die Gleichung der Enveloppe in folgender Form:

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & C_0 \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & C_1 \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & C_2 \\ C_0 & C_1 & C_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder auch, wenn wir mit α_{ik} die in der Diskriminante von (10) zu a_{ik} adjungierte Unterdeterminante bezeichnen,

$$\sum_{ik} \alpha_{ik} C_i C_k = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

Erinnern wir uns nun der Bedeutung von C_i, so ist es klar, daß die Gleichung die Gestalt von (6) hat, womit der ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Betrachten wir zwei aufeinander folgende einhüllende Kreise; sie schneiden sich in zwei Punkten, die der oben erhaltenen Kurve angehören, **also sind alle einhüllenden Kreise doppelt berührend.** Im besonderen sind die vier Schnittpunkte des Deferentkegelschnittes mit dem gegebenen Kreise die Mittelpunkte verschwindender, die Kurve doppelt berührender Kreise, also Brennpunkte derselben. Den vier Quadrupeln konzyklischer Brennpunkte der Kurve (s. o.) entsprechen vier Arten, die Kurve als Enveloppe zu erzeugen und ebenso viele Scharen von einfach unendlich vielen doppelt berührenden Kreisen.

Nehmen wir eine Transformation durch reziproke Radien vor, deren Zentrum der Mittelpunkt des Kreises ist, um den es sich im oben bewiesenen Satze handelte, und deren Potenz das Quadrat seines Radius ist, so wird jeder einhüllende Kreis in sich selbst verwandelt, und dasselbe trifft also für die eingehüllte Kurve zu. Indem wir nun oben die Möglichkeit angeführt haben, daß eine solche Kurve auf vier verschiedene Weisen als Enveloppe von Kreisen erzeugt werden kann, so erhalten wir jetzt, **daß im allgemeinen vier Inversionen existieren, durch welche eine beliebige bizirkulare Kurve vierter Ordnung in sich selbst transformiert werden kann**[1]).

60. Eine neue Methode zur Untersuchung der bizirkularen Kurven vierter Ordnung erhält man, wenn man sie mit der Gesamtheit der ∞^3 Kreise einer Ebene in Beziehung setzt[2]). Man gelangt dazu, wenn man in folgender Weise ein homogenes Koordinatensystem für

1) Im allgemeinen transformiert jede Inversion eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung in eine andere Kurve derselben Art.

2) G. Loria, *Remarques sur la géometrie analytique des cercles du plan et sur son application à la théorie des courbes bicirculaires du 4me ordre* (Quart. Journ. Math. XXII, 1886, S. 44—73).

den (dreidimensionalen) Raum aufstellt, welches als Grundgebilde die Kreise einer Ebene hat.

Seien

$$C_i \equiv (x-\alpha_i)^2 + (y-\beta_i)^2 - r_i^2 = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

die Gleichungen von vier Kreisen einer Ebene, die nicht zu demselben Kreise rechtwinklig sind. Dann stellt, wenn man die x_i variiert, die Gleichung

$$C \equiv x_0 C_0 + x_1 C_1 + x_2 C_2 + x_3 C_3 = 0$$

die ∞^3 Kreise der Ebene dar; zu jedem System der Verhältniswerte $x_0 : x_1 : x_2 : x_3$ gehört ein bestimmter Kreis und umgekehrt; es ist daher gestattet, die x als homogene Koordinaten des beliebigen Kreises C in bezug auf die als Fundamentalkreise betrachteten C_i zu nehmen. Bezeichnen wir mit $d_{ij} = d_{ji}$ den Abstand der Mittelpunkte der Kreise C_i und C_j und setzen

$$r_{ij} = r_{ji} = \frac{r_i^2 + r_i^2 - d_{ij}}{2}, \qquad r_{xx} = \sum_{ij} r_{ij} x_i x_j \quad (i, j = 0, 1, 2, 3)$$

so finden wir nach kurzer Rechnung, daß der Radius r des Kreises C' durch die Gleichung bestimmt ist:

$$r^2 = \frac{r_{xx}}{(\Sigma x_i)^2}.$$

Es bezeichnet daher die Gleichung $r_{xx} = 0$ die Punkte (Kreise vom Radius 0 oder Punktkreise) und die Gleichung $\Sigma x_i = 0$ die Geraden (Kreise von unendlich großem Radius); somit ist unser Koordinatensystem fähig, die Kreise, die Punkte und die Geraden der Ebene zu bestimmen.

Es ist leicht zu beweisen, daß 1. die Anwendung einer linearen Substitution auf die homogenen Koordinaten eines Kreises der Ausführung einer Transformation der Koordinaten selbst äquivalent ist; die Fundamentalkreise des neuen Systems haben zu Koordinaten in bezug auf die alten die Koeffizienten der linearen Substitution, welche in bezug auf jene transponiert ist. 2. Eine Transformation durch reziproke Radien wird durch eine spezielle lineare Substitution der homogenen Koordinaten der Kreise ausgeführt.

Eine homogene Gleichung $f = 0$, zwischen den Koordinaten x, scheidet aus der Gesamtheit aller Kreise eine Gruppe von ∞^2 aus. Wenn die algebraische Gleichung vom Grade n ist, so heißt eine solche Gruppe Kreiskomplex vom Grade n; z. B. bilden alle die Punkte und die Geraden zwei besondere Komplexe, der erste ist quadratisch, der zweite linear. Man beweist leicht, daß ein linearer Kreiskomplex aus allen den Kreisen besteht, die zu einem festen rechtwinklig sind. Dieser ist der Ort der Punktkreise des Komplexes. Ausnahmsweise kann es eintreten, daß dieser eine Gerade ist; dann be-

steht der Komplex aus allen den Kreisen, die ihren Mittelpunkt auf dieser Geraden haben. Zwei homogene Gleichungen $f=0$, $g=0$ stellen zwischen den Koordinaten x eine Kreiskongruenz dar, die ∞^1 Elemente enthält. Im Besonderen stellen die Gleichungen $f=0$, $r_{xx}=0$ die Kurve Γ, den Ort der Punktkreise des Komplexes $f=0$ dar, während die Gleichungen $f=0$, $\Sigma x_i=0$ die von den ∞^1 diesem Komplexe angehörenden Geraden eingehüllte Kurve darstellen. Um die Eigenschaften von Γ zu bestimmen, wenn f algebraisch vom Grade n ist, kombinieren wir die beiden Gleichungen $f=0$, $r_{xx}=0$ mit der Gleichung $\Sigma \xi_i x_i=0$ eines beliebigen linearen Komplexes; wir erhalten so diejenigen Punkte der Kurve Γ, die auf dem orthogonalen Kreise des Komplexes liegen. Da die Zahl dieser Punkte $2n$ beträgt, **so wird die Kurve Γ von jedem Kreise der Ebene in $2n$ Punkten geschnitten.** Da man $2n$ Punkte auch erhält, wenn der Hilfskomplex $\Sigma \xi_i x_i=0$ aus allen den Kreisen besteht, deren Punkte in einer Geraden liegen, **so wird die Kurve Γ auch von jeder Geraden der Ebene in $2n$ Punkten geschnitten.** Dies beweist, daß, wenn f reelle Koeffizienten hat, **die Kurve Γ von der Ordnung $2n$ ist mit den zyklischen Punkten der Ebene als n-fachen Punkten.** Im Besonderen stellen die beiden Gleichungen

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0, \quad r_{xx} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

eine bizirkulare Kurve vierter Ordnung dar; eine solche Kurve kann daher immer als Ort der Punktkreise eines quadratischen Kreiskomplexes angesehen werden.

Die Betrachtung führt die Klassifikation der hier behandelten Kurven auf die der Paare von quaternären quadratischen Formen zurück. Und wenn man ferner die x als homogene Koordinaten eines Punktes im Raume interpretiert, so stellt jene eine eindeutige Beziehung zwischen den Punkten einer bizirkularen Kurve vierter Ordnung und jener einer Raumkurve vierter Ordnung I. Spezies her; es ist im Grunde dieselbe Beziehung, auf die wir schon zu Anfang von Nr. 59 hinwiesen.

Zum Schlusse bemerken wir noch, 1. daß man mit bizirkularen Kurven vierter Ordnung ein zweifach orthogonales Systems bilden kann[1]), 2. daß ihre Rektifikation von elliptischen Integralen abhängt[2]) und 3. daß man die bizirkularen rationalen Kurven vierter Ordnung als Kissoiden (vgl. S. 47) zweier, reeller oder imaginärer, Kreise erzeugen

1) Darboux a. a. O.

2) G. Darboux, *Sur la rectification d'une classe de courbes du quatrième ordre* (Comptes rendus LXXXVII, 1878).

3) J. Gomes Teixeira, *Sur le théorie des cubiques circulaires et des quartiques bicirculaires* (Ann. di Matem. 3. Ser., XI, 1905); E. Malo, *Sur la génération cissoidale des quartiques unicursales bicirculaires* (Arch. Math. Phys., 3. Ser., XII, 1907).

kann.[3]) Weiteres über die in Rede stehenden Kurven findet man in einer neueren Abhandlung von J. Gomes Teixeira.[1])

Es sei bemerkt, daß dieser Kurvenart die Halphensche Kurve nicht angehört, so genannt, weil G. H. Halphen auf sie die geometrische Definition der elliptischen Funktionen gründete, die er in seinem *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications* (Paris, 1886) bearbeitet hat. Man denke sich einen Kreis mit dem Zentrum O und dem Radius R und einen Punkt C in seiner Ebene; MM' sei eine Sehne desselben, die durch C hindurchgeht; man trage auf ihr die beiden Strecken $CN = CN'$ ab, so, daß $CN\sqrt{MM'} = l\sqrt{2(R+\delta)}$, wo δ der Abstand CO, und l eine beliebig gegebene Strecke ist. Der Ort der Punkte N, N' ist eine Halphensche Kurve. Nimmt man C zum Anfang und CO als x-Achse so findet man leicht ihre Gleichung als

$$(x^2+y^2)^2 - \frac{\delta^2}{R^2}(x^2+y^2)\,y^2 = l^4\left(\frac{R+\delta}{2R}\right)^2,$$

woraus folgt, daß sie nur einfach durch die Kreispunkte geht.

In die Kategorie der in diesem Kapitel untersuchten elliptischen Kurven gehören auch noch andere mit besonderen Eigenschaften ausgestattete Linien, die wir erwähnen wollen.

1. Stellen wir uns eine Kurve vierter Ordnung mit zwei Spitzen vor.[2]) Nehmen wir als Fundamentaldreieck eines homogenen Koordinatensystems das von den beiden Spitzentangenten und der Verbindungslinie der beiden Spitzen S_1S_2 (die immer reell sein sollen) gebildete, so läßt sich die Kurve durch eine Gleichung von folgender Form darstellen:

$$(x_1x_2 + x_3{}^2)^2 + 2(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)\,x_3{}^2 = 0,$$

aus der man sofort erkennt, daß die Gleichung

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$$

die Doppeltangente d der Kurve darstellt. Sucht man die erste Polare eines Punktes von d, so erhält man ein Resultat, das in Worte gekleidet lautet: **Die Berührungspunkte der vier Tangenten, die man von einem Punkte der Doppeltangente an die Kurve ziehen kann, liegen auf einem Kegelschnitte, der durch die beiden Spitzen geht.**

Berechnen wir hingegen die Hessesche der Kurve, so erkennen wir, **daß die acht Wendepunkte auf einer Kurve dritter Ordnung**

---

1) *Sobre costrucças do circulo osculador das cubicas e des quarticas bicirculares* (Porto Annaes, II, 1907).

2) J. de Vries, *On bicuspidals curves of order four* (Proc. Acad. Amsterdam 1909). Einige der dort gefundenen Resultate und andere ähnliche wurden mit Hilfe darstellend-geometrischer Methoden wieder gefunden von H. de Vries, *The plane curve with 2 or 3 cusps and 0 or 1 nodes as a projection of the twisted curve of order 4 and of the 1st species* (Das.).

liegen, die die Spitzen und den Schnitt der Geraden $S_1 S_2$ und d enthält. U. s. w.

2. Ein anderer bemerkenswerter Spezialfall ist der, daß von den Wendepunkten einer in den einen, der andere auf den anderen Doppelpunkt der Kurve fällt.[1]) Die kanonische Form der Gleichung ist alsdann

$$x_1^2 x_2^2 + x_2^4 + 2(b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3) x_1 x_2 x_3 = 0,$$

aus der sich u. a. ableiten läßt, **daß zwei der Doppeltangenten sich auf der Verbindungslinie der Doppelpunkte schneiden müssen.**

3. Noch spezieller ist der Fall, daß jeder Doppelpunkt zugleich ein Wendepunkt für jeden der beiden durch ihn gehenden Zweige ist[1]). Die kanonische Gleichung ist alsdann

$$x_1^2 x_2^2 - a_1 x_2^2 x_3^2 - a_2 x_1^2 x_3^2 + b_0 x_1 x_2 x_3^2 + b_1 x_1 x_3^3 \\ + b_2 x_2 x_3^3 + c^2 x_3^4 = 0.$$

Von den Fundamentalpunkten sind zwei die beiden singulären Punkte, während in dem vierten vier Doppeltangenten zusammenlaufen, deren Berührungspunkte einem Kegelschnitte angehören. Die übrigen vier Doppeltangenten bilden ein vollständiges Vierseit, das zum Fundamentaldreieck das Bezugsdreieck hat. Berechnen wir die Hessesche, so finden wir: **Die acht, von den Doppelpunkten verschiedenen Wendepunkte der Kurve liegen auf einem Kegelschnitt.** U. s. w.

Viertes Kapitel.

Die spirischen Linien des Perseus.

61. Die alten Geometer — z. B. Heron und Proklus[2]) — bezeichneten mit dem Namen Spira (σπεῖρα) oder Annulus (κρίκος), die durch vollständige Rotation eines Kreises um eine beliebig in seiner Ebene gezeichnete Gerade erzeugte Oberfläche[3]); sie unterschieden drei Arten von Spiren, die offenen, die geschlossenen und die sich durchschneidenden Spiren, je nachdem der Radius des erzeugenden Kreises kleiner, gleich oder größer ist, als der Abstand seines Mittelpunktes von der Rotationsachse. Es war natürlich, daß die Griechen, die durch Schneiden mit einer Ebene an dem Rotationskegel so bemerkenswerte Kurven wie die Kegelschnitte erhielten,

---

1) J. de Vries, *On curves of order four with two flecnodal points or with two biflecnodal points* (Proc. Acad. Amsterdam 1909).

2) Vgl. z. B. G. Loria, *Le scienze esatte nell' antica Grecia.* Buch II, Nr. 74 (Mem. Acc. Modena, 2. Ser. XI, 1893).

3) Die Spire unterscheidet sich daher nicht von der gewöhnlich Kreisring genannten Fläche.

daran dachten, dieselbe Operation an den Spiren auszuführen. Indem nun Schnitte einer Ebene durch die Achse oder senkrecht zu dieser schon bekannte Kurven nämlich Kreise lieferten, mußte man, um etwas Neues zu erhalten, zu anderen Schnitten greifen. Zunächst nun bieten sich diejenigen dar, die man durch Ebenen parallel zur Achse der Spire erzeugen kann; und so hat denn ein wenig bekannter Geometer der griechisch-alexandrinischen Periode — Perseus — das Verdienst, sie zuerst betrachtet zu haben, und von Proklus sind uns zwei Verse erhalten, in denen obige Entdeckung gefeiert wird.

Um die hervorstechendsten Eigenschaften der Kurven des Perseus oder spirischen Linien zu finden, nehmen wir (vgl. Taf. III, Fig. 25) ein System von drei zueinander senkrechten kartesischen Achsen $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$, deren dritte die Achse der Spire sein möge; nehmen wir außerdem an, daß der erzeugende Kreis in der Ebene $\xi\zeta$ liege und zum Mittelpunkte einen Punkt C auf der Achse $\Omega\xi$ habe; sei ferner $\Omega C = d$, und R der Radius des gegebenen Kreises. Die Gleichung desselben in der Ebene $\xi\zeta$ ist daher $(\xi - d)^2 + \zeta^2 = R^2$ und daher wird die der Spire sein

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + d^2 - R^2)^2 = 4d^2(\xi^2 + \eta^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Die schneidende Ebene σ — der Annahme gemäß parallel zu $\Omega\zeta$ — habe die Gleichung

$$\xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha - p = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Es sei O der Fußpunkt des von Ω auf σ gefällten Lotes. Wir nehmen nun in der Ebene σ als x-Achse deren Schnitt mit der $\xi\eta$-Ebene und als y-Achse die durch O zu $\Omega\zeta$ gezogene Parallele. p ist dann die Länge von ΩO und α der Winkel, den sie mit $\Omega\xi$ bildet. Nimmt man nun einen beliebigen Punkt P der Ebene σ, so werden dessen Koordinaten $ON = x$, $NP = y$ mit den ξ, η, ζ desselben Punktes durch folgende Relation verbunden sein

$$x = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 - p^2}, \qquad y = \zeta.$$

Eliminieren wir mit deren Hilfe ξ, η, ζ aus (1), so erhält man die Gleichung der spirischen Linie in folgender Form:

$$(x^2 + y^2 + p^2 + d^2 - R^2)^2 = 4d^2(x^2 + p^2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

die man auch schreiben kann:

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2)^2 + 2(p^2 + d^2 - R^2)(x^2 + y^2) - 4d^2x^2 \\ + (p + d + R)(p + d - R)(p - d + R)(p - d - R) = 0. \quad (4)\end{aligned}$$

Eine einfache Untersuchung dieser Gleichung zeigt, daß die spirischen Linien bizirkulare Kurven vierter Ordnung sind, symmetrisch in bezug auf die x-Achse. Die vier Tangenten in den zyklischen Punkten an die Kurve (4) haben die Gleichungen $x + iy = \pm d$, und dem-

nach hat die Kurve die Punkte $x = \pm d$, $y = 0$ als außerordentliche Brennpunkte[1]).

Die Tangenten in den zyklischen Punkten sind verschieden, ausgenommen wenn $d = 0$; in diesem Falle wird die Spire eine Kugel und die spirische Kurve ein doppelt gezogener Kreis. Daraus ergibt sich, wenn wir schon jetzt einen Satz anwenden, den wir später (Nr. 78) beweisen werden, **daß unter den spirischen Linien sich die Cartesischen Ovale nicht befinden.** Ähnlich, wenn wir schon jetzt die allgemeine Gleichung der Cassinischen Ovale (Nr. **90**) herbeiziehen

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(x^2 + y^2) - 4a^2x^2 + a^4 - c^4 = 0, \quad . \quad . \quad (5)$$

so sehen wir, daß, wenn die spirische Kurve (4) mit dieser Kurve zusammenfallen soll, nötig ist, daß

$$p^2 + d^2 - R^2 = a^2, \quad d = a, \quad (p^2 + d^2 - R^2)^2 - 4p^2d^2 = a^4 - c^4.$$

Eliminieren wir aus diesen Gleichungen a und c, so ergibt sich, daß $p = R$ sein muß, und **demnach sind die Cassinischen Ovale spezielle spirische Kurven**[2]). Beschreibt man einen geraden Kreiszylinder mit der Achse $\Omega\zeta$ und dem Radius R, so wird jede seiner Tangential-Ebenen die Spire (1) in einem Cassinischen Oval schneiden, wenn $c = a$, so stellt (5) eine Bernoullische Lemniskate dar (vgl. Nr. **92**). In diesem Falle ergeben die drei zuletzt geschriebenen Beziehungs-Gleichungen $d = 2R$ und **daher gibt es nur bei den Spiren, bei welchen $d = 2R$, zur Achse parallele Schnitte, die die Gestalt der Bernoullischen Lemniskate haben.**

Die durch Gleichung (4) dargestellte spirische Linie schneidet die Koordinatenachse in zwei Quadrupeln von Punkten; die Abszissen des ersten Quadrupels sind durch die Gleichung gegeben

$$x^2 = (d \pm R + p)(d \pm R - p), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

die Ordinaten der Punkte des zweiten durch folgende Gleichung

$$y^2 = (R + p \pm d)(R - p \mp d). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

1) Will man die gewöhnlichen Brennpunkte haben, so ist zu berücksichtigen, daß die acht von den zyklischen Punkten gezogenen Tangenten die Gleichungen haben:

$$x \pm iy = \pm\sqrt{(d + p - R)(d - p + R)}$$
$$x \pm iy = \pm\sqrt{(d + p + R)(d - p + R)}.$$

Näheres hierüber findet man in dem Aufsatze von F. Gomes Teixeira, *Sobre los focos de las espíricas de Perseo* (El Progreso mathematico, 2. Reihe, II, 1900).

2) A. Comte hat also mit Unrecht behauptet (*Traité élémentaire de géométrie analytique*, Paris 1843, S. 72), daß wenn eine Ebene parallel bleibend zur Achse einer Ringfläche sich bewegt, sie diese Fläche immer in Cassinischen Ellipsen schneide; daher kann die dort für die Cassinischen Ovale angewandte Bezeichnung „Kreisringschnitte“ (*sections toriques*) nicht für alle spirischen Linien angewendet werden.

Daraus ergibt sich: 1) Wenn die Spire offen ist ($d > R$), sind reell entweder alle Punkte des ersten Quadrupels und keiner des zweiten, oder zwei des ersten und zwei des zweiten; im ersten Falle ist $p < d - R$, im zweiten $d - R < p < d + R$; im ersten Falle besteht die spirische Kurve aus zwei auseinander liegenden Ovalen, im andern aus einem einzigen. Im Grenzfalle $p = d - R$ oder $p = d + R$ hat die Kurve einen Doppelpunkt. 2) Wenn die Spire sich selbst durchschneidet ($d < R$), sind reell entweder alle Punkte eines jeden Quadrupels, oder zwei Punkte des ersten und zwei des zweiten; im ersten Falle ist $p < R - d$, im zweiten $R - d < p < R + d$; im ersten Falle besteht die Kurve aus Ovalen, von denen das eine vom andern umschlossen wird, im andern aus einem einzigen. Hier aber hat man, wenn $p = R \mp d$, eine Kurve mit einem Doppelpunkte. 3) Wenn endlich die Spire geschlossen ist ($d = R$), so hat man für $p < 2R$ eine aus einem Oval gebildete Kurve; in dem Grenzfalle $p = 2R$ hat die erhaltene Kurve einen Doppelpunkt. — Beachten wir auch noch, daß die Gleichung (3) erkennen läßt, daß die beiden Geraden mit der Gleichung $y = \pm R$ Doppeltangenten der Kurve sind; die Abszissen der zugehörigen Berührungspunkte sind durch die Gleichung gegeben: $x^2 + p^2 = d^2$, demnach sind die Punkte selbst reell oder konjugiert imaginär, je nachdem $d \gtrless p$. Im ersten Falle hat man eine wirkliche Doppeltangente, im zweiten Falle eine Gerade, die mit der spirischen Kurve eine ideelle doppelte Berührung hat.

Eine noch detailliertere Einteilung der spirischen Kurven, in bezug auf ihre Gestalt, erhält man durch Betrachtung ihrer reellen Wendepunkte; daß diese den Alten nicht entgangen ist, wird von Proklus bezeugt; sie jedoch auseinanderzusetzen, mangelt es uns an Raum[1]).

62. Die Definition der spirischen Linien, von der wir ausgegangen sind, liefert nur eine stereometrische Erzeugung derselben. R. de Sluse hat vor zwei Jahrhunderten[2]) eine angegeben, die den Vorzug hat, nur Konstruktionen in einer Ebene zu benutzen und aus diesem Grunde angeführt zu werden verdient: „Es sei DBE eine gleichseitige

---

1) Der Leser findet weitere Details in der Abhandlung von Pagani im V. B. der *Mém. cour. par l'Académie de Belgique* (in 4°), die folgendes Thema, das als Preisfrage von der Akademie im Jahre 1824 gestellt war, beantwortete: „On sait, que les lignes spiriques ou sections annulaires sont des courbes formées par l'intersection d'un plan avec la surface engendrée par la circonvolution d'un cercle autour d'un axe donné de position; on demande l'équation générale de ces courbes et une discussion complète de cette équation." M. s. ferner F. Gomes Teixeira, *Sobre as espiricas de Perseo* (Porto Annaes, II, 1907).

2) S. zwei Briefe an Huygens datiert vom 4. Sept. und 19. Okt. 1657, abgedruckt im B. II der *Œuvres de Huygens* (La Haye 1889) S. 52 und 69; vgl. F. Gomes Teixeira, *Sur deux manières de construire les spiriques de Perseus* (Arch. Math. Phys., 3e Ser., XI. 1906).

Hyperbel (s. Taf. III, Fig. 26) mit den Achsen $\Omega\xi$ und $\Omega\eta$, HC und DE seien zwei fest angenommene Parallelen zur Querachse $\Omega\eta$; eine variable Parallele zur andern Achse schneide jene beiden Parallelen und die Kurve bzw. in H, F, G; man nehme auf dieser zwei Punkte I symmetrisch in bezug auf H und so, daß $FG \cdot GH = \overline{HI}^2$; der Ort der Punkte I ist eine spirische Linie.“ Zum Beweise nehmen wir an, daß

$$\xi^2 - \eta^2 = k^2, \quad \xi = a, \quad \xi = b$$

die Gleichungen der Hyperbel und der beiden festen Parallelen seien. Nennen wir die Koordinaten von I x', y' und die von G ξ, η, so haben wir offenbar: $y' = \eta$, $\pm\overline{HI} = x' - a$, $\overline{FG} = b - \xi$, $\overline{GH} = \xi - a$, und daher wegen der Bedingung der Konstruktion

$$(x' - a)^2 = (b - \xi)(\xi - a).$$

Die Gleichung des Ortes von I erhält man durch Elimination von ξ und η aus dieser Gleichung und den beiden $y' = \eta$, $\xi^2 - \eta^2 = k^2$, und diese ist daher

$$[(x' - a)^2 + y'^2 + k^2 + ab]^2 - (a + b)^2(y'^2 + k^2) = 0.$$

Setzt man nun

$$x' - a = y, \quad y' = x, \quad k^2 + ab = p^2 + d^2 - R^2, \quad \frac{a + b}{2} = d, \quad k = p,$$

so identifiziert sich diese Gleichung mit (3). Somit ist der Slusesche Satz bewiesen; zu gleicher Zeit sieht man, daß die zugehörige Kurve aus dem Kreisringe entsteht, für welchen $R = \frac{a - b}{2}$, $d = \frac{a + b}{2}$ ist, wenn er durch eine Ebene im Abstande k von der Achse des Ringes geschnitten wird.

63. Zu dieser planimetrischen Erzeugung, die kaum nur historisch bemerkenswert ist, fügte Siebeck vor etwa 50 Jahren[1]) eine weitere hinzu, die noch bemerkenswerter ist wegen den Folgerungen, zu denen sie führt, und die der von de Sluse vorzuziehen ist, weil sie noch elementarer ist. Mit dieser wollen wir uns nun beschäftigen, so weit es der zur Verfügung stehende Raum gestattet.

Gegeben zwei Punkte A und B im Abstande $2e$; ist P ein beliebiger Punkt, so setzen wir

$$PA + PB = s, \quad PA - PB = d$$

und suchen nun in einer durch die Gerade AB gehenden Ebene den Ort der Punkte P, so daß, wenn m und n gegebene Zahlen sind,

$$ms^2 + nd^2 = 4e^2. \quad \ldots \ldots \quad (81)$$

---

1) S. die wichtige Abhandlung *Über eine Gattung von Curven vierten Grades, welche mit den elliptischen Funktionen zusammenhängen* (Crelles Journ. LVII, 1860 und LIX, 1861).

Zu dem Zwecke nehmen wir als x-Achse die Gerade AB, zum Anfang den Mittelpunkt O der Strecke AB. Man findet dann mit aller Leichtigkeit, daß die Polar- bezw. kartesische Gleichung der betreffenden Kurve sind:

$$[m\varrho^2 - (1-m)e^2][n\varrho^2 - (1-n)e^2] + (m-n)^2 e^2 \varrho^2 \cdot \cos^2 \omega = 0. \quad (9)$$

$$[m(x^2+y^2) - (1-m)e^2] \cdot [n(x^2+y^2) - (1-n)e^2] + (m-n)e^2 x^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Führt man in (10) die angedeutete Multiplikation aus, so findet man, daß die linke Seite die Gestalt der linken Seiten von Gleichung (4) hat und mit dieser identisch wird, wenn man setzt:

$$p^2 = \frac{e^4}{4mn}, \quad d^2 = -\frac{(m-n)^2 e^2}{4mn}, \quad R^2 = \frac{(m+n-2mn)e^2}{2mn}.$$

Diese Beziehungen zeigen, daß wenigstens eine der Größen d, p, R imaginär ist; daher kann die aus dem oben angegebenen Ortsproblem resultierende Kurve nicht durch Schnitt eines Kreisringes mit einer reellen Ebene erhalten werden. Dennoch ist es zweckmäßig, sie noch als spirische Kurve zu betrachten, so daß dieser Name allen durch die Gleichungen (3) oder (4) dargestellten Kurven beigelegt wird, auch wenn eine oder mehrere der Konstanten d, R, p rein imaginär sind; in den letzteren Fällen ist die Erzeugungsweise des Perseus auf reellem Gebiete nicht anwendbar, während die von Siebeck angewendet werden kann[1]).

Die Symmetrie der Gleichung (10) in bezug auf m und n zeigt, daß die von ihr dargestellte Kurve auch die durch folgende Gleichung ausgedrückte Eigenschaft besitzt:

$$ns^2 + md^2 = 4e^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\text{II})$$

die aus (8I) durch Vertauschung jener beiden Zahlen entsteht. Sie hat jedoch noch weitere. Die Gleichung (10) wird nicht geändert, wenn wir bezüglich m, n, e^2 ersetzen durch $1-n$, $1-m$, $\frac{(1-m)(1-n)}{mn}e^2$; nehmen wir nun auf der Geraden AB zwei Punkte A', B', so daß $\overline{OA'} = \overline{OB'} = e\sqrt{\frac{(1-m)(1-n)}{mn}}$ und setzen

1) Die Bezeichnung spirische Linien ist in einem noch weiteren Sinne angewendet worden von J. de la Gournerie (*Mémoires sur les lignes spiriques*, Liouvilles Journ. 2. Ser. XIV, 1869), der, wie Laguerre (*Sur quelques propriétés des lignes spiriques;* Bull. Soc. philom. 1869 oder *Œuvres*, II, Paris 1905, S. 73ff.) mit diesem Namen jede bizirkulare in bezug auf eine Achse symmetrische Kurve vierter Ordnung bezeichnete. Nehmen wir diese Nomenklatur an, so läßt sich zeigen, daß, wenn zwei Strecken auf derselben Geraden gegeben sind, der Ort der Punkte, von denen sie unter zwei Winkeln gesehen werden, deren Summe konstant ist, eine spirische Linie ist. (S. *El progréso matemático* III, 1893, Question 75, S. 187—89.)

$$\overline{PA'} + \overline{PB'} = s', \quad \overline{PA'} - \overline{PB'} = d', \quad \overline{A'B'} = 2e',$$

so entstehen die folgenden, den (8I) und (8II) ähnlichen Relationen:

$$(1-n)s'^2 + (1-m)d'^2 = 4e'^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\text{III})$$

$$(1-m)s'^2 + (1-n)d'^2 = 4e'^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8\text{IV})$$

Somit haben wir im ganzen vier Arten, eine spirische Kurve nach der Siebeckschen Methode zu erzeugen. Es gibt jedoch noch vier andere. Setzt man zur Abkürzung

$$L = \left(\frac{1-n}{n} + \frac{1-m}{m}\right)e^2, \quad M = \frac{(1-m)(1-n)}{mn}e^4, \quad N = \frac{(m-n)^2}{mn}e^2, \quad (11)$$

so wird die Gleichung (6) zu

$$(x^2+y^2)^2 - L(x^2+y^2) + M + Nx^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (10')$$

Schreiben wir sie nun in folgender Weise:

$$(x^2+y^2)^2 - (L-N)(x^2+y^2) + M - Ny^2 = 0,$$

so haben wir eine Gleichung, die aus der vorigen entsteht, durch Wechsel der Variabeln und Vertauschung der Konstanten L und M mit $L - N$ und $-N$. Es gibt daher auf der y-Achse noch zwei andere Punktepaare C, D und C', D' mit dem gemeinsamen Mittelpunkte O, die in bezug auf die spirische Linie dieselbe Eigenschaft besitzen wie die Paare A, B und A', B'. Der Kürze wegen wollen wir die zu je zweien zusammengehörenden Punkte A, B; A', B'; C, D; C', D' die Stützpunkte der spirischen Linie nennen[1]). Um die Realität derselben zu untersuchen, bemerken wir, daß durch Elimination der Konstanten m und n aus (7) eine Gleichung erhalten wird, die zu Wurzeln die Abszissen der vier zur x-Achse gehörenden Stützpunkte hat, diese Gleichung ist

$$e^4 + Ce^2 + M = 0, \quad \text{wo} \quad C = L - \frac{L^2 - 4M}{N}. \quad . \quad . \quad (12)$$

Vertauschen wir in dieser L und N bzw. mit $L - N$ und $-N$, so erhalten wir die Gleichung, welche als Wurzeln die Ordinaten der vier anderen Stützpunkte enthält; diese lautet:

$$f^4 - Cf^2 + M = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Eine der Wurzeln e^2 von (12) ist reell und positiv, da sie das Quadrat der halben Strecke AB ist, die von den Punkten A und B begrenzt wird, von denen wir ausgegangen sind; die andere ist daher immer reell, aber positiv oder negativ, je nachdem $M \gtrless 0$. Demnach sind die beiden Stützpunkte A' und B' reell oder konjugiert imaginär, je nachdem $M = \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{n}\right)e^4 \gtrless 0$ ist, d. h. je nachdem m und n

1) Siebeck zog den Namen Brennpunkte vor.

beide größer, oder beide kleiner als 1 sind, oder das eine größer und das andere kleiner ist. Da nun (12) in (13) übergeht, wenn man e^2 durch $-f^2$ ersetzt, so entsprechen den beiden reellen Stützpunkten A, B immer zwei konjugiert imaginäre. Was nun die beiden letzten C', D' angeht, so sind diese imaginär oder reell, je nachdem $M \gtrless 0$. Hieraus ergibt sich, daß auf Grund der Realität der Stützpunkte alle durch die Gleichung (10') dargestellten Kurven sich in zwei Kategorien scheiden:

Kurven I. Art, $M > 0$; vier reelle Stützpunkte, in einer geraden Linie und zwei Paare konjugiert imaginäre auf der anderen.

„ II. „ , $M < 0$; vier reelle Stützpunkte, zwei auf einer Geraden und zwei auf einer anderen; und analog vier imaginäre zu Paaren konjugiert.

Eine dritte Art ist dadurch charakterisiert, daß $M = 0$, und daß sie in der Mitte einen Doppelpunkt besitzen.

64. Auf die Kurven, mit denen wir uns hier beschäftigen, trifft man bei geometrischen Fragen, die nicht ohne Wichtigkeit sind. Folgendes Beispiel möge dies zeigen[1]): Gegeben ein zentrischer Kegelschnitt Γ

$$\alpha x^2 + \beta y^2 = 1; \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

man betrachte den Ort eines Punktes, so beschaffen, daß die von ihm an die Kurve Γ gezogenen Tangenten einen gegebenen Winkel μ bilden; dieser wird die isoptische Kurve (vgl. Abschn. VII, Kap. 9) des gegebenen Kegelschnittes vom Winkel μ genannt. Um deren Gleichung zu finden, beachte man, daß die an Γ vom Punkte (x', y') gezogenen Tangenten zusammen durch die Gleichung:

$$\alpha\beta(xy' - x'y)^2 - \alpha(x - x')^2 - \beta(y - y')^2 = 0$$

dargestellt werden. Wenn wir daher die einzelnen Tangenten durch

$$y - y' = a'(x - x'), \qquad y - y' = a''(x - x'),$$

darstellen, so wird man haben:

$$a' + a'' = \frac{2\alpha x' y'}{1 - \alpha x'^2}, \quad a' \cdot a'' = \frac{\alpha}{\beta} \frac{\beta y'^2 - 1}{\alpha x'^2 - 1}.$$

Ziehen wir nun die im Problem angegebene Bedingung hinzu, so ist

$$\mathrm{tg}^2 \mu = \left(\frac{a' - a''}{1 + a'a''}\right)^2 = \frac{4\alpha\beta(\alpha x'^2 + \beta y'^2 - 1)}{[\alpha + \beta - \alpha\beta(x'^2 + y'^2)]^2}.$$

Schreiben wir statt x', y' jetzt x, y, so ist

$$[\alpha + \beta - \alpha\beta(x^2 + y^2)]^2 \,\mathrm{tg}^2 \mu - 4\alpha\beta(\alpha x^2 + \beta y^2 - 1) = 0 \quad (15)$$

1) S. den zweiten Teil der angeführten Arbeit von Siebeck.

die gesuchte Gleichung der isoptischen Kurve. Führen wir die angedeutete Quadrierung aus und setzen

$$L = \frac{4}{\alpha \operatorname{tg}^2 \mu} + \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta}; \quad M = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{4}{(\beta - \alpha)\sin^2 \mu}\right);$$

$$N = \frac{4}{\operatorname{tg}^2 \mu}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right), \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

so stimmt (15) mit (10′) überein; **die isoptischen Kurven der Kegelschnitte sind also spirische Linien.** Vermöge der Gleichung (12) werden die Stützpunkte von (15), die auf der x-Achse gelegen sind durch folgende Relationen bestimmt:

$$\overline{OA}^2 = \overline{OB}^2 = e^2 = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta},$$

$$\overline{OA'}^2 = \overline{OB'}^2 = e'^2 = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{4}{(\beta - \alpha)\sin^2 \mu}; \quad \ldots \quad (17)$$

daher fallen zwei derselben mit den beiden (reellen oder imaginären) auf dieser Achse gelegenen Brennpunkten zusammen. Die Existenz der vier andern Stützpunkte auf der y-Achse von (15) führt zu der Vermutung, daß dieselbe Kurve auch aufgefaßt werden könne als die isoptische Kurve eines anderen Kegelschnittes $\bar{\Gamma}$

$$\bar{\alpha} x^2 + \bar{\beta} y^2 = 1. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

Man findet in der Tat

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha + \beta}{\beta e'^2}, \quad \bar{\beta} = -\frac{\alpha + \beta}{\alpha e'^2}, \quad \ldots \ldots \quad (19)$$

und als konstanten Winkel $\bar{\mu}$ einen solchen, daß

$$\frac{\operatorname{tg} \bar{\mu}}{\operatorname{tg} \mu} = \frac{e'}{e}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

Jede isoptische Kurve eines Kegelschnittes Γ ist auch die isoptische eines anderen $\bar{\Gamma}$. Da nun die Gleichungen (19) ergeben, daß

$$\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} + \frac{\bar{\beta}}{\beta} = 0,$$

so ist, wenn Γ eine Ellipse, $\bar{\Gamma}$ eine Hyperbel und umgekehrt; überdies sind die gleichnamigen Achsen derselben Kurven proportional.

Heben wir schließlich noch das Auftreten der spirischen Linien in der geometrischen Darstellung der komplexen Variabeln und ihrer Funktionen hervor[1]). Stellen wir in üblicher Weise in zwei Ebenen π und σ die Variabeln $z = x + iy$ und $w = u + iv$ dar und nehmen an, daß zwischen den Variabeln selbst die Relation bestehe:

$$w = sn\, z \quad \text{oder} \quad u + iv = sn\,(x + iy).$$

1) Außer der o. a. Abh. von Siebeck siehe G. Holzmüller, *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildungen* (Leipzig, 1882) S. 256 ff.

P sei der Punkt (der Ebene σ) mit den Koordinaten u, v; F und F' seien die Punkte der u-Achse, die vom Anfang den Abstand ± 1 haben. Dann haben wir

$$\overline{PF}^2 = [1 - sn(x + iy)][1 - sn(x - iy)],$$
$$\overline{PF'}^2 = [1 + sn(x + iy)][1 + sn(x - iy)],$$

oder auch mit Anwendung bekannter Formeln

$$\overline{PF} = \frac{sn\,x\,dn\,iy - cn\,iy}{\sqrt{1 - k^2 sn^2 x\, sn^2 iy}}, \quad \overline{PF'} = \frac{sn\,x\,dn\,iy + cn\,iy}{\sqrt{1 - k^2 sn^2 x\, sn^2 iy}},$$

und infolgedessen

$$\left.\begin{aligned} s = \overline{PF} + \overline{PF'} &= \frac{2\,sn\,x\,dn\,iy}{\sqrt{1 - k^2 sn^2 x\, sn^2 iy}} \\ d = \overline{PF} - \overline{PF'} &= \frac{2\,cn\,iy}{\sqrt{1 - k^2 sn^2 x\, sn^2 iy}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (21)$$

Durch Elimination von x aus diesen erhält man

$$\frac{d^2}{cn^2 iy} - \frac{k^2 sn^2 iy}{dn^2 iy} \cdot s^2 = 4,$$

oder auch

$$cn^2(y, k')\, d^2 - k^2 \frac{sn^2(y, k')}{dn^2(y, k')} s^2 = 4 . \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

Dies ist die Gleichung derjenigen Kurven in der Ebene σ, die den Geraden $y = const.$ der Ebene π entsprechen; wegen der Gleichung (8) sind diese spirische Linien.

Wenn man dagegen y aus (21) eliminiert, so erhält man

$$\frac{dn^2 x}{k'^2 sn\, x} s^2 - \frac{k^2 cn^2 x}{k'^2} d^2 = 4, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

welche Gleichung die ∞^1 spirischen Linien der Ebene σ darstellt, die den Geraden $x = const.$ der Ebene π entsprechen. Benutzen wir nun die charakteristische Eigenschaft der isogonalen Transformationen und beachten, daß die Linien $y = const.$, $x = const.$ in der ersten Ebene π ein doppeltes orthogonales System bilden, so können wir folgern, daß die Gleichungen (22), (23) ein doppeltes orthogonales System von spirischen Linien bilden.

Zu ähnlichen Resultaten führt die Betrachtung der anderen elliptischen Funktionen $cn\,z$ und $dn\,z$.

65. Die spirischen Linien mit einem Doppelpunkte, die wir von unserer vorhergehenden Betrachtung mit Absicht fast gänzlich ausgeschlossen haben, wurden neuerdings von einem besonderen Gesichtspunkte aus betrachtet, welchen wir nicht gut übergehen können.

Gegeben zwei Punkte F_1 und F_2 im Abstande $2c$ mit dem Mittelpunkt O, außerdem eine Konstante f; der Ort der Punkte M so beschaffen, daß

$$\overline{MF_1}^2 \cdot \overline{MF_2}^2 = c^4 \pm f^2 \cdot \overline{OM}^2$$

ist eine Kurve, die J. Booth untersucht hat[1]), und der ihr den Namen Lemniskate gegeben hat; um sie von anderen Kurven, die denselben Namen erhalten haben, zu unterscheiden, nennen wir sie die Lemniskate von Booth. Aus der angegebenen Definition ergibt sich sogleich, daß die Kurve folgende Gleichung in kartesischen Koordinaten hat

$$(x^2 + y^2)^2 = (\pm f^2 + 2c^2)x^2 + (\pm f^2 - 2c^2)y^2 \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

Sie ist daher eine spirische Linie, die in O einen doppelten Inflexionspunkt hat und verschiedene Gestalten darbietet je nach dem Vorzeichen von f^2 und nach der relativen Größe der Konstanten f und c, wie wir jetzt ausführen wollen.

I. Wir geben f^2 das Vorzeichen $+$; dann wird, wenn $f > c\sqrt{2}$, und $f^2 + 2c^2 = a^2$, $f^2 - 2c^2 = b^2$ gesetzt wird, die Gleichung (24) zu

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2, \quad \text{wo} \quad a^2 > b^2 \quad . \quad . \quad . \quad (24\text{I})$$

und stellt dann eine elliptische Lemniskate von Booth dar. Wenn aber $f = c\sqrt{2}$, so stellt (24) die beiden Kreise $x^2 + y^2 \pm 2c = 0$ dar. Wenn endlich $f < c\sqrt{2}$, so geht, wenn man $f^2 + 2c^2 = a^2$, $2c^2 - f^2 = b^2$ setzt, (24) über in

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2, \quad \text{wo} \quad a^2 < b^2 \quad . \quad . \quad . \quad (24\text{II})$$

und diese gehört einer hyperbolischen Lemniskate von Booth an[2]).

II. Im Falle $f = 0$, wird (24) zu $(x^2 + y^2)^2 = 2c^2(x^2 - y^2)$, und wir werden (in Nr. **93**) sehen, daß sie eine Bernoullische Lemniskate darstellt.

III. Geben wir schließlich dem f das — Vorzeichen, so müssen wir, um eine reelle Kurve zu erhalten, annehmen, daß $2c^2 > f^2$; setzen wir zufolge dessen $2c^2 - f^2 = a^2$ und $2c^2 + f^2 = b^2$, so wird (24) zu

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2, \quad \text{wo} \quad a^2 > b^2, \quad . \quad . \quad (24\text{III})$$

die auch eine hyperbolische Lemniskate darstellt.

Überhaupt kann Gleichung (24) immer auf eine der Formen

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 \pm b^2y^2$$

gebracht werden; ihnen entsprechen folgende Polargleichungen

$$\varrho^2 = a^2 \cos^2 \omega \pm b^2 \sin^2 \omega,^{3)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

1) *A treatise on some new geometrical methods* I (London, 1877) S. 162ff.

2) J. Neuberg zog den Namen Lemniskatoide vor (*Sur quelques systèmes de tiges articulées*, Liège 1886, S. 36).

3) Diese Gleichung zeigt, daß die Boothschen Lemniskaten zur Klasse der

und diese zeigen, daß die fraglichen Kurven auch erhalten werden durch eine Transformation vermittelst reziproker Radien mit dem Zentrum O und der Potenz k^2 aus Kegelschnitten, deren Gleichung $a^2x^2 \pm b^2y^2 = k^4$. Es ist dann leicht einzusehen (und wir werden dies Nr. 270 beweisen), daß die Boothschen Lemniskaten auch Fußpunktkurven von Ellipsen oder Hyperbeln in bezug auf den Mittelpunkt sind. Für die wirkliche Zeichnung der hier betrachteten Kurven erweist sich jedoch nützlicher ein Verfahren, welches aus folgendem Satze hervorgeht: „Gegeben ein Kreis (Taf. III, Fig. 27, a, b, c) mit dem Zentrum C und dem Radius R und ein Punkt seiner Ebene O im Abstande d von C; auf jeder durch O gezogenen Geraden trage man eine Strecke OP gleich der auf dieser Geraden vom gegebenen Kreise ausgeschnittenen Sehne MN ab; der Ort des Punktes P ist eine Lemniskate von Booth, elliptisch oder hyperbolisch, je nachdem O innerhalb oder außerhalb des Kreises liegt.“ Aus der obigen Definition ergibt sich, daß $\varrho = R\sqrt{R^2 - d^2 \sin^2 \omega}$ die Polargleichung und $(x^2 + y^2)^2 = 4[R^2x^2 + (r^2 - d^2)y^2]$ die kartesische Gleichung des Ortes von P ist. Man sieht hieraus, daß dieser im allgemeinen wirklich eine Boothsche Lemniskate ist, aber im Spezialfalle $d = R\sqrt{2}$ (Fig. b) ist die resultierende Kurve eine Bernoullische Lemniskate und die angegebene Konstruktion geht auf eine andere zurück, die man Maclaurin zuschreibt[1]).

Beachtet man ferner noch, daß die Gleichungen (24 I, II, III) auch durch Elimination von z aus den beiden Gleichungen

$$a^2x^2 \pm b^2y^2 = k^2z^2, \qquad x^2 + y^2 = kz$$

erhalten werden, so wird man mit Booth schließen, **daß die behandelten Kurven auch als Orthogonal-Projektionen der Schnittlinien eines Paraboloids mit einem Rotationskegel mit gemeinsamer Achse und Scheitel betrachtet werden können, wenn die Projektion auf eine zu dieser Achse senkrechte Ebene geschieht.** Vergleicht man schließlich die Gleichungen (24 I, II, III) mit (4), so sieht man: **Die elliptische Lemniskate erhält man aus der sich durchschneidenden Spire, die durch Rotation eines Kreises mit dem Radius** $\frac{a^2}{2\sqrt{a^2 - b^2}}$ **um eine Achse entstanden ist, die von seinem Mittelpunkte die Entfernung** $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}$ **hat, wenn man sie mit einer Ebene schneidet, die**

von Tortolini in dem Aufsatze *Alcune proprietà delle curve algebriche rappresentate dall' equazione polare* $r^{2n} = A \cos^n \Theta + B \sin^n \Theta$ (Ann. di Matem. VI, 1864) untersuchten Kurven gehören.

1) Vgl. Aubry, Journ. math. spéc. 4e Ser. V, 1896, S. 155.

von der Rotationsachse die Entfernung $\frac{b^2}{2\sqrt{a^2-b^2}}$ hat. Die hyperbolischen Lemniskaten (24 II, III) hingegen kann man aus der offenen Spire ableiten, die durch Rotation eines Kreises mit dem Radius $\frac{a^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$ um eine Achse, die von seinem Mittelpunkte die Entfernung $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ hat, entstanden ist, wenn man sie mit einer Ebene schneidet, die von der Rotationsachse die Entfernung $\frac{b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$ hat.

Die Rektifikation der Lemniskate von Booth hängt ab von elliptischen Integralen erster und dritter Gattung. Man kann wohl sagen, daß sie eben wegen dieser Eigentümlichkeit sowohl die Aufmerksamkeit des genannten englischen Geometers, als auch die von B. Tortolini auf sich gezogen hat[1]), der unabhängig von jenem die hyperbolische Lemniskate untersuchte und die Halbierung und die Dreiteilung eines Quadranten derselben ausführte und zeigte, daß es auf ihr Paare von Bogen gibt, deren Differenz gleich einem Kreisbogen ist.

Fünftes Kapitel.

Die Konchoide des Nikomedes.

66. Ungefähr ein Zeitgenosse des Erfinders der spirischen Linien ist Nikomedes, ein Geometer, der wenig bekannt ist und zwischen 250 und 150 v. Chr. gelebt haben soll. Ihm verdankt man die Idee, die Untersuchung und zwei wichtige Anwendungen (auf die Würfelverdoppelung und die Dreiteilung des Winkels) einer interessanten Kurve vierter Ordnung, Konchoide oder Kochloide (von κόγκη, Muschel) oder Muschellinie genannt, wegen der Gestalt, die sie zeigt[2]). Ihre Definition ist folgende: „Gegeben ein fester Punkt O, der Pol, eine feste Gerade r, die Basis und eine Strecke l, das Zwischenstück; man ziehe einen beliebigen Strahl durch O, der r in M schneidet (s. Taf. IV, Fig. 28, a, b, c), von M aus trage man auf ihm $MP = l$ in der Richtung OM ab; der Ort aller Punkte P ist jene Kurve, welche die Alten erste Konchoide nannten, die Roberval chonchoide de dessus nannte[3]), und die im *Dictionnaire des sciences mathématiques*

---

1) S. zwei Aufsätze im *Giornale arcadico* (Rom, 1844) und *Rivista scientifica* (Rom, 1845) zusammengefaßt und erweitert in der Abhandlung *Sulla divisione degli archi di una curva di quart' ordine rappresentata dall' equazione* $(x^2+y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$. (Mem. Soc. Ital. Scienze, 2. Serie I, 1862).

2) Die hauptsächlichsten Stellen bei den alten Schriftstellern über die Konchoide finden sich gesammelt in dem schon zitierten Buche des Verfassers, *Le scienze esatte nell' antica Grecia*, II. Buch, Nr. 71—72.

3) Siehe die früher zitierten *Observations sur la compos. des mouv.*

von Montferrier mit dem Namem conchoide citérieure bezeichnet, ist[1]).“ Wenn man dagegen die Strecke $MP = l$ nach der anderen Seite hin abträgt, so wird eine andere Kurve erzeugt, die wahrscheinlich von den Alten auch betrachtet ist, der Roberval und Montferrier bezüglich die Namen conchoide de dessous oder conchoide ultérieure gaben. Die beiden eben definierten Kurven bilden nach unserer Anschauung eine einzige Kurve. Nehmen wir O als Pol, die von O auf r gefällte Senkrechte, deren Länge $= a$ sein möge, als Polarachse, so wird eine solche Kurve in Polarkoordinaten dargestellt durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{a}{\cos\omega} + l. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Gehen wir zu kartesischen Koordinaten über, so wird sie

$$(x-a)^2(x^2+y^2) - l^2x^2 = 0.^{2)} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

1) Bd. I (Bruxelles 1838) S. 353.

2) Für die Anwendung der Polarkoordinaten auf die Diskussion der Kurven soll ihre gewöhnliche Definition modifiziert und durch folgende ersetzt werden.

Man betrachte in der Ebene einen festen Punkt O und einen festen, von ihm ausgehenden Halbstrahl a und stelle sich vor, daß ein anderer Halbstrahl sich um O von der Lage a aus drehe und in dem als positiv angenommenen Sinne rotiere (oder im entgegengesetzten). Dann haben wir auf jeder seiner Lagen unendlich viele Punkte M und ebensoviele auf dem entgegengesetzten Halbstrahle, die wir mit $\overline{M}$ bezeichnen wollen. Um nun die Lage eines Punktes M festzulegen, nehmen wir die Größen

$$\varrho = + \text{Länge } OM, \qquad \omega = \text{Winkel } (ar),$$

dagegen, um die Lage eines der Punkte $\overline{M}$ zu bestimmen, die Größen

$$\varrho = - \text{Länge } O\overline{M}, \qquad \omega = \text{Winkel } (ar).$$

Infolgedessen haben alle Punkte eines Halbstrahles die erste Koordinate positiv, die des entgegengesetzten Halbstrahls aber negativ; und umgekehrt, wenn ein Punkt die erste Koordinate negativ hat, so liegt er auf dem entgegengesetzten Halbstrahle.

Diese Bestimmungen sind im Texte fortwährend angewendet worden, und hier soll eine nützliche Folgerung angeführt werden, zu der ihre Anwendung führt. Die Konchoide des Nikomedes pflegt man gewöhnlich durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{a}{\cos\omega} \pm l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{I})$$

darzustellen; aber das doppelte Vorzeichen kann man nun unterdrücken, wenn man die Polarkoordinaten in unserem Sinne nimmt. Betrachten wir nämlich die Gleichung

$$\varrho = \frac{a}{\cos\omega} + l \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{II})$$

und erteilen dem ω einen bestimmten Wert α, so folgt $\varrho_\alpha = \frac{a}{\cos\alpha} + l$, welches einen Punkt M_1 bestimmt auf dem Halbstrahle, für welchen $(ar) = \alpha$. Geben wir dem ω den Wert $\pi + \alpha$, so erhalten wir

$$\varrho_{\pi+\alpha} = -\frac{a}{\cos\alpha} + l = -\left(\frac{a}{\cos\alpha} - l\right);$$

Die Konchoide des Nikomedes ist demnach eine Kurve vierter Ordnung, die durch die zyklischen Punkte der Ebene geht; im Unendlichen besitzt sie einen Berührungsknoten (Selbstberührungspunkt) mit der Geraden r als zugehöriger Tangente; damit ist bewiesen, daß die Konchoide sich ihrer Basis asymptotisch nähert, was schon die Alten hervorgehoben hatten. Der Pol ist immer ein Doppelpunkt der Kurve, und genauer gesagt, ein Knoten, eine Spitze oder isolierter Punkt, jenachdem $l \gtreqless a$; daraus geht hervor, daß der zweite Zweig der Kurve drei verschiedene Formen annehmen kann, die wahrscheinlich den Namen zweite, dritte und vierte Konchoide entsprechen, die Pappus erwähnt, ohne deren Bedeutung zu erklären. Im Falle $l > a$ haben die beiden Kurvenzweige in O die durch

$$\frac{a}{l\sqrt{l^2-a^2}}$$

ausgedrückte Krümmung.

Die große Berühmtheit der Konchoide bewirkte, daß man auf sie alle Methoden, Tangenten und Normalen von Kurven zu konstruieren anwandte, die zugleich mit der analytischen Geometrie erfunden wurden. Unter diesen wollen wir vor allen die von Descartes erwähnen[1]), ohne uns mit deren Wiedergabe aufzuhalten, da sie der folgenden, die sich auf die Betrachtung der Polar-Subnormale $\frac{d\varrho}{d\omega}$ stützt, weit nachsteht. Aus Gleichung (1) ergibt sich nämlich folgende

$$\frac{d\varrho}{d\omega} = a\,\frac{\sin\omega}{\cos^2\omega};$$

sie zeigt, daß wenn man in O die Senkrechte zu OP errichtet und in M die Senkrechte auf r, diese sich in einem Punkte N schneiden, derart, daß durch N die Normalen an die Konchoide in den zwei Punkten gehen, die dem Radiusvektor OM angehören; es ist also nichts leichter als diese Normalen und demnach die zugehörigen Tangenten zu konstruieren. Überdies wurde die Aufsuchung der Tangenten an die Konchoide von Fermat dem Roberval aufgegeben in einem Briefe vom 22. Sept. 1636[2]); Roberval antwortete am 11. Oktober desselben Jahres, teilte mit, daß er sich schon mit derartigen Fragen beschäftigt habe, die er mit biquadratischen Gleichungen

---

dementsprechend erhalten wir einen Punkt M_2, der auf dem entgegengesetzten Halbstrahl mit der Anomalie $\pi + \alpha$ liegt, das ist also auf dem ursprünglichen im Abstande $\frac{a}{\cos\omega} - l$. Die Punkte M_1, M_2 sind also dieselben, die man durch Anwendung der gewöhnlichen Gleichung (I) erhält; man kann also an Stelle derselben durchaus (II) anwenden.

1) *La géometrie,* nouvelle édition (Paris, 1886) S. 41.

2) *Œuvres de Fermat* II (Paris, 1894) S. 72.

verknüpfte und bezeichnete zwei Punkte (die Wendepunkte?) „par lesquelles on ne peut mener des tangentes“[1]). Diese Bemerkung erregte nicht mit Unrecht die Verwunderung Fermats, der am 4. Nov. 1636 erwiderte: „j'ai peur que vous aurez équivoqué“[2]) und setzte dann die von ihm erdachte Konstruktion der Tangente auseinander; es ist dieselbe, die man im Anhange seines berühmten *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* findet[3]). Es ist wohl zu beachten, daß Fermat sich daselbst ausschließlich mit der ersten Konchoide beschäftigte — er bemerkt daselbst, Pappus und Eutokius (oder deren Herausgeber?) hätten die Kurve irrtümlicherweise konvex gegen den Pol dargestellt[4]) —; aber auf eine der anderen weist er hin in dem Briefe an Roberval vom 16. Dezember 1636, in welchem die Frage vorgelegt wird: „trouver une tangente à un point donné en la seconde conchoide de Nicomède“[5]). In welcher Weise Roberval diese gelöst hat, ersieht man aus den §§ IV und V seiner *Observations sur la composition des mouvements et sur les touchantes des lignes courbes*[6]), wo die kinematische Methode, die seinen Namen trägt, sowohl auf die obere als auch die untere Konchoide angewendet wird; der Kürze wegen begnügen wir uns damit, auf diese Anwendung hinzuweisen.

67. Holen wir die Gleichung (1) hervor, so können wir daraus ableiten:

$$x = a + l \cdot \cos\omega, \qquad y = a \cdot \operatorname{tg}\omega + l \cdot \sin\omega. \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese Gleichungen zeigen, daß, wenn die drei Punkte (α), (β), (γ) der Konchoide in gerader Linie liegen sollen, man haben muß:

$$\begin{vmatrix} a + l\cos\alpha & a\operatorname{tg}\alpha + l\sin\alpha & 1 \\ a + l\cos\beta & a\operatorname{tg}\beta + l\sin\beta & 1 \\ a + l\cos\gamma & a\operatorname{tg}\gamma + l\sin\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & a\operatorname{tg}\alpha + l\sin\alpha & 1 \\ \cos\beta & a\operatorname{tg}\beta + l\sin\beta & 1 \\ \cos\gamma & a\operatorname{tg}\gamma + l\sin\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder auch

$$a\begin{vmatrix} \cos\alpha & \operatorname{tg}\alpha & 1 \\ \cos\beta & \operatorname{tg}\beta & 1 \\ \cos\gamma & \operatorname{tg}\gamma & 1 \end{vmatrix} + l\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 1 \\ \cos\beta & \sin\beta & 1 \\ \cos\gamma & \sin\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinanten haben nun bzw. die Werte[7]):

1) Das. S. 82.
2) Das. S. 86.
3) Das. I. (Paris, 1891) S. 160 und III. (Paris, 1896) S. 142.
4) Das. Bd. II, S. 87.
5) Das. S. 94.
6) *Mémoires de l'Académie des sciences* VI (Paris, 1730).
7) Für die Berechnung dieser sowie ähnlicher Determinanten siehe die

$$\frac{2\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\cdot\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\cdot\sin\frac{1}{2}(\alpha-\gamma)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}\left\{\cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma+\alpha)+\cos(\alpha+\beta)-1\right\},$$

$$4\sin\tfrac{1}{2}(\beta-\gamma)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)\cdot\sin\tfrac{1}{2}(\alpha-\beta),$$

daher wird die vorhergehende Gleichung, befreit von dem nicht verschwindenden Faktor $2\sin\frac{1}{2}(\beta-\gamma)\cdot\sin\frac{1}{2}(\gamma-\alpha)\cdot\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, lauten:

$$a[\cos(\beta+\gamma)+\cos(\gamma+\alpha)+\cos(\alpha+\beta)-1] + 2l\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Setzen wir hierin $\alpha=\beta=\gamma=\lambda$, so erhält man

$$a(3\cos 2\lambda - 1) + 2l\cos^3\lambda = 0,$$

oder auch

$$l\cos^3\lambda + 3a\cos^2\lambda - 2a = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Setzen wir $\cos\lambda = \frac{1}{u}$, so wird diese $2au^3 - 3au - l = 0$; demnach hat diese Gleichung: I. für $a > l$ drei reelle Wurzeln, aber eine ist davon auszuschließen, da sie nicht zwischen -1 und $+1$ liegen darf; II. für $a < l$ nur eine reelle Wurzel. Demnach hat die Konchoide mit Knotenpunkt zwei reelle Wendepunkte, die mit isoliertem Punkte vier, und die mit Spitze nur noch zwei. Eine geometrische Konstruktion der Wendepunkte, jedoch ohne Beweis, wurde von Huygens in dem Briefe, den er am 23. Okt. 1653 an Fr. van Schooten schrieb, gegeben[1]) und veröffentlicht im zweiten Bande von *Chr. Hugenii Opera varia* (Lugduni Batav., 1724); sie ist so elegant, daß es sich der Mühe lohnt sie darzulegen.

Bezeichnen wir mit x die Abszisse eines Wendepunktes, so haben wir wegen der zweiten von den Gleichungen (3), $\cos\lambda = \frac{x-a}{l}$ und daher wird die Gleichung (5)

$$x^3 - 3a^2x + 2a(a^2 - l^2) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Diese Gleichung bezeugt, daß die Bestimmung der Wendepunkte der Konchoide im allgemeinen ein Problem dritten Grades ist[2]); wenn jedoch $l^2 = 2a^2$, so wird die vorige Gleichung

$$(x+a)(x^2 - ax - 2a^2) = 0,$$

und also wird in diesem Falle — wie Huygens selbst bemerkte — die Aufgabe eine quadratische. Um den allgemeinen Fall graphisch zu lösen, wenden wir die von Descartes zur Lösung jeder Gleichung von der Form:

$$x^3 = \alpha x + \beta$$

Note von G. Loria, *Sopra una classe notevole di alternanti d'ordine qualsivoglia* (Prager Ber. 1897).

1) *Œuvers de Huygens II,* (La Haye, 1888) S. 245—46.

2) Vgl. auch die *Analyse des infiniment petits par le* Marquis de l'Hôpital II. Aufl. (Paris, 1705), S. 65.

angegebene Methode an[1]). Wir setzen daher

$$\alpha = mp, \quad \beta = m^2 q, \quad x^2 = my;$$

die vorige Gleichung wird dann

$$x^2 + y^2 = qx + (p + m)\, y.$$

Somit sind die Abszissen der Wendepunkte, die Abszissen der Punkte, in welchen der durch diese Gleichung dargestellte Kreis von der Parabel $y^2 = mx$ geschnitten wird. Um dies Verfahren auf Gleichung (6) anzuwenden, setzen wir

$$3a^2 = mp, \quad 2a(l^2 - a^2) = m^2 q \quad \text{oder} \quad p = \frac{3a^3}{m}, \quad q = \frac{2a(l^2 - a^2)}{m^2}.$$

Setzen wir außerdem der Einfachheit halber $m = -a$, so werden wir folgende Gleichungen für die beiden Hilfskurven erhalten:

$$x^2 + ay = 0, \qquad \left(x - \frac{a^2 - l^2}{a}\right)^2 + \left(y + 2a\right)^2 = \left(a - \frac{l^2}{a}\right)^2 + 4a^2,$$

oder, wenn wir $y + 2a = y'$ setzen und dann die Strichel weglassen:

$$x^2 + ay = 2a^2, \quad \left[x - \left(a - \frac{l^2}{a}\right)\right]^2 + y^2 = \left(a - \frac{l^2}{a}\right)^2 + 4a^2.$$

Die so dargestellten Kurven können geometrisch ohne Schwierigkeit definiert werden. Es sei nämlich R der Fußpunkt des vom Pole O auf die Basis r gefällten Lotes; man trage auf der durch O zu r gezogenen Parallelen $OV = 2a$ ab. Nun ist die erste jener Kurven eine Parabel, die V zum Scheitel, a zum Parameter und jene Parallele zur Achse hat, und die konkav gegen den Pol hin ist. Die zweite ist dagegen ein Kreis, der zum Mittelpunkte jenen Punkt C des vom Pole auf die Basis gefällten Lotes hat, der von jenem die Entfernung $\left|a - \frac{l^2}{a}\right|$ hat, und durch den Punkt V geht. Da nun diese Definition der Hilfskurven im wesentlichen mit der von Huygens gegebenen identisch ist, so hat man guten Grund anzunehmen, daß dieser zur Konstruktion seiner Wendepunkte gelangte, indem er die Methode des Cartesius, deren wir uns bedient haben, anwandte.

68. Huygens verdankt man auch die Bemerkung, daß die von der ersten Konchoide und ihrer Basis begrenzte Fläche unendlich groß ist[2]); ausgedrückt wird diese nämlich durch das Integral

$$\frac{1}{2}\int\left[\left(\frac{a}{\cos\omega} + l\right)^2 - \frac{a^2}{\cos^2\omega}\right] \cdot d\omega,$$

genommen zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}$. Da nun der Wert

1) S. z. B. Matthiesen, *Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen* (Leipzig, 1878) S. 948.

2) S. die beiden an Schooten gerichteten Briefe von 6. Sept. 1658 und 1. Jan. 1659, veröffentlicht im II. B. S. 212 u. 298—99 der *Œuvres de Huygens*.

dieses Integrales $= al \cdot \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}\right) + l^2\omega$, so nimmt es für jene Grenzen den Wert an $al(\log\infty - \log 0) + \pi l^2$, und ist deswegen ∞. Das zwischen dem vom Pole auf die Basis gefällten Lote, einem Radiusvektor und den beiden entsprechenden Konchoidenbögen gelegene Flächenstück ist

$$\frac{1}{2}\int_0^\omega\left[\left(\frac{a}{\cos\omega}+l\right)^2-\left(\frac{a}{\cos\omega}-l\right)^2\right]d\omega = 2al\int_0^\omega\frac{d\omega}{\cos\omega}$$

$$= 2al\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\omega}{2}\right) = 2al\log\operatorname{tg}\frac{1+\cos\omega}{\sin\omega},$$

ein von Côtes erhaltenes Resultat[1]). Dieser hat außerdem das Volumen berechnet, das diese Fläche durch Rotation um das genannte Lot erzeugt.

Die Fragen betreffend die Quadratur der Konchoide können auch vermittelst kartesischer Koordinaten behandelt werden. Gleichung (2) liefert nämlich

$$\int y\cdot dx = \int\frac{x}{x-a}\sqrt{(l-a+x)(l+a-x)}\,dx;$$

nehmen wir nun eine neue Variable t, die durch die Gleichung $t^2 = \frac{l+a-x}{l-a+x}$ definiert ist, so wird das Integral rational, und man gelangt mit Joh. Bernoulli zu dem Schlusse: „erit itaque spatium conchoidale aequale spatio hyperbolico rectilineo et circulari“[2]).

Besonders wichtiger geometrischer Eigenschaften erfreut sich die Konchoide nicht[3]), aber die Leichtigkeit, mit der man sie vermittelst eines einfachen Instrumentes zeichnen kann, bewirkt, daß man sie in der Praxis nützlich verwenden kann; als Beispiel führen wir ihre Anwendung in der Achitektur an bei der Zeichnung der Säulenschäfte.[4]) Außerdem kann sie zur Lösung der Probleme der Würfelverdoppelung und der Dreiteilung des Winkels dienen, und da man auf das eine oder andere dieser Probleme jede Aufgabe dritten oder vierten Grades zurückführen kann, so schlug Newton vor, sie zugleich mit der Geraden und dem Kreise (s. Nr. **3** und **5**) unter die Linien zu rechnen, deren Anwendung dem Geometer bei jeder Gelegenheit gestattet sein solle[5]).

---

1) *Harmonia mensurarum* (Cambridge, 1722) S. 125.

2) S. die dritte der *Lectiones mathematicae* (Joh. Bernoulli Opera III, S. 400—401).

3) Einige metrische Sätze findet man in der *Note sur le conchoïde de Nicomède* von A. H. Couvert (Mathésis, 3e Ser., IV, 1904).

4) Poppe, *Ausführliche Geschichte der Anwendungen aller krummen Linien* usw. (Nürnberg, 1802) S. 209.

5) *Arithmétique universelle,* übers. v. Beaudeux II (Paris, 1802) S. 52.

Sechstes Kapitel.

Verallgemeinerungen der Konchoide, insbesondere die Konchoide mit der Kreisbasis.

69. Der Begriff der Konchoide, wie er von Nikomedes aufgestellt wurde, bietet sich verschiedenen Verallgemeinerungen dar. Eine der allerneuesten ist folgende: „Gegeben ein Winkel mit dem Scheitel O und der Größe 2α und ein fester Punkt A seiner Ebene, sei C der Mittelpunkt eines der Kreise, die beide Schenkel des Winkels berühren, und M der Endpunkt eines durch A gehenden Durchmessers, dann ist der Ort der Punkte M die betreffende Kurve.[1] Wenn O im Unendlichen liegt, wird sie eine Konchoide des Nikomedes mit A als Pol und der Mittellinie des Streifens (der die Stelle des Winkels im allgemeinen Falle einnimmt) als Basis und mit der halben Breite desselben als Zwischenstück."

Nehmen wir im allgemeinen Falle die Halbierungslinien des gegebenen Winkels als Achsen, so findet man leicht als Gleichung des Ortes (wenn x_0 und y_0 die Koordinaten von A sind)

$$y^2[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]=\sin^2\alpha\,(xy_0-x_0y)^2. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Dieser ist also eine Kurve vierter Ordnung, die noch eine andere Erzeugungsart besitzt, die ein bemerkenswerter Umstand klar legen wird: Es sei nämlich ein Kreis gegeben, mit dem Zentrum C und dem Radius r, und zwei Punkte A und O seiner Ebene; man verbinde einen beliebigen Punkt P des Kreises mit C und O, dann wird die Gerade OP von der durch A zum Radius CP gezogenen Parallelen in einem Punkte M geschnitten; um nun die Gleichung des Ortes der Punkte M zu finden, nehme man O zum Anfangspunkt und OC zur x-Achse, bezeichne mit a den Abstand OC und mit x_0, y_0 die Koordinaten von A, so wird man folgende Beziehung zwischen den Koordinaten x und y von M erhalten:

$$y^2[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]=\left(\frac{r}{a}\right)^2(y_0x-x_0y)^2, \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

welche dieselbe Form hat wie Gleichung (1) und mit ihr identifiziert werden kann, allemal wenn der Punkt O nicht innerhalb des gegebenen Kreises liegt. Im Grenzfalle, wenn $r=a$, scheidet sich aus (2) der Faktor $y-y_0$ ab; nach Hebung desselben bleibt:

$$y(x^2+y^2)+x_0x^2-2x_0xy-y_0y^2=0,$$

die Gleichung einer Strophoide (s. Nr. 37), woraus sich ergibt, daß die Kurve, um die es sich hier handelt, auch als Verallgemeinerung dieser Linie angesehen werden kann.

---

1) S. Jeřabek, *Sur une quartique* (Mathésis, 2ᵉ Ser., IX, 1899).

Natürlicher und älter, weitergehend und wichtiger sind die Erweiterungen des Begriffes der Konchoide, die von der Basis ausgehen, indem man diese statt geradlinig sich beliebig denkt. Eine derartige Verallgemeinerung bietet sich so sehr von selbst dar, daß wir glauben, von der Wahrheit nicht zu weit entfernt zu sein mit der Annahme, daß sie auch den Alten bekannt gewesen, wenigstens in dem Falle, daß die Basis ein Kreis ist und den Pol enthält[1]); in ihrer ganzen Ausdehnung findet sie sich in den schon zitierten *Observations sur la composition des mouvements* von Roberval[2]) und dann in der ausgezeichneten Abhandlung von De la Hire *Des conchoides en général* in den Mém. de l'Académie des Sciences, MDCVIII (Paris, 1730)[3]). Auf diese Verallgemeinerung haben sich die Geometer jedoch nicht beschränkt. G. de Longchamps[4]) betrachtete nämlich die auf folgende Weise erzeugten Kurven: „Gegeben in einer Ebene drei Kurven $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$; man ziehe die Tangente t in einem beliebigen Punkte M der erstern und bestimme die Schnitte M_1 und M_2 mit den beiden anderen, auf t trage man dann die Strecke $MP = M_1M_2$ ab; der Ort des Punktes P ist eine konchoidale Kurve.“ Bemerkenswert sind die Fälle, in denen Γ sich auf einen Punkt O reduziert[5]), ebenso der, in welchem überdies Γ_1 ein Kreis, mit dem Zentrum O ist[6]); zulässig ist auch die Annahme, daß Γ_1 und Γ_2 zusammenfallen[7]). Bemerkenswert ist ferner die Tatsache, daß eine große Zahl von Kurven (wie die Kissoide, die Strophoide und die Bernoullische Lemniskate) sich wiederfinden unter der Gruppe der konchoidalen Kurven.

Wir begnügen uns mit diesem Hinweis auf die konchoidalen Kurven und kehren zu den Konchoiden mit beliebiger Basis zurück, um vor allem den Satz zu beweisen, daß, **wenn man die Normale der Basis Γ zu konstruieren weiß, es leicht ist, die der Konchoide Γ_1 zu**

---

1) M. Curtze, *Reliquiae Copernicanae* (Zeitschr. Math. Phys. XX, 1875).

2) *Mém. de l'Acad. Royale des Sciences* VI. (Paris, 1730) S. 32.

3) Ihm verdanken wir auch den Begriff der schiefen Konchoide, die man in folgender Weise erhält: Gegeben in der Ebene eine Kurve Γ, ein fester Punkt O, ein Winkel α und eine Strecke l. Wir verbinden O mit einem beliebigen Punkte P der Kurve und ziehen von P aus eine Strecke $PQ = l$ die mit OP den Winkel α bildet; der Ort der Punkte Q ist die schiefe Konchoide von Γ.

4) *Sur les conchoïdales* (Nouv. Corr. mathém. V, 1879).

5) Schontjes, *Sur une mode de génération des conchoïdes* (Mathésis IV, 1884).

6) Wickersheimer, *Sur les conchoïdes* (Journ. math., spéc. 4e Ser. V, 1896). Zu dieser Klasse von Kurven gehörten auch die von E. N. Barisien im ersten Teile des Artikels *Sur deux courbes généralisation du limaçon de Pascal* betrachtete Kurve 6. Grades (Bullet. de math. spéc. V, 1898—99).

7) Wenn Γ sich auf einen Punkt reduziert und Γ_1 und Γ_2 in einen Kreis zusammenfallen, so ist (wie wir Nr. 29 und 65 sahen) die Konchoide eine Lemniskate von Booth.

konstruieren[1]). Ist nämlich $\varrho = f(\omega)$ die Polargleichung von Γ (vorausgesetzt, daß man den festen Punkt als Pol nimmt) und l das Zwischenstück, so wird $\varrho = f(\omega) \pm l$ die entsprechende Gleichung von Γ_1 sein; da nun im allgemeinen $\frac{d\varrho}{d\omega}$ der Ausdruck für die polare Subnormale ist, so wird im vorliegenden Falle $f'(\omega)$ die Länge der polaren Subnormalen in entsprechenden Punkten von Γ und Γ_1 sein. Nehmen wir also einen Punkt M von Γ und bezeichnen die entsprechenden Punkte der Konchoide Γ_1 mit P_1 und P_2, so werden, wenn N der Schnittpunkt der Normalen in M mit der in O zum Radiusvektor OM errichteten Senkrechten ist, NP_1 und NP_2 die Normalen zur Konchoide in P_1 und P_2 sein. Ist die Basis geradlinig, so erhält man die in Nr. **66** angegebene Methode wieder; wenn sie ein Kreis ist, erhält man eine nicht weniger elegante Konstruktion, deren Ausdruck in Worten mit Hilfe der Figuren 29 *a*, *b*, *c* (Taf. IV) wir dem Leser überlassen wollen.

Wenn die Basis Γ eine algebraische Kurve $f(x, y) = 0$ ist, so wird auch Γ_1 algebraisch, und ihre Ordnung n_1 läßt sich wie folgt finden. Sind (x, y) und (x_1, y_1) zwei entsprechende Punkte von Γ und Γ_1, und nehmen wir immer an, daß der Pol in den Koordinatenanfang falle, so bestehen zugleich folgende Gleichungen

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = l^2, \qquad \frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}, \qquad f(x, y) = 0.$$

Nun erhält man die Gleichung von Γ_1, wenn man x und y aus diesen drei Gleichungen eliminiert. Wollen wir nur die Ordnung n_1 von Γ_1 haben, so genügt die Aufsuchung der Zahl ihrer Punkte, die sie mit einer beliebigen Geraden

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$$

gemeinsam hat, also die Zahl der Lösungen des Systems der drei vorigen Gleichungen und der folgenden

$$x_1 \cos\alpha + y_1 \sin\alpha - p = 0.$$

Eliminiert man x_1 und y_1, so erhält man

$$(x \cos\alpha + y \sin\alpha - p)^2 (x^2 + y^2) = a^2 (x \cos\alpha + y \sin\alpha)^2,$$

daher ist n_1 die Zahl der beweglichen Punkte, die diese so dargestellte Kurve Δ mit Γ gemeinsam hat. Gehen wir jedoch zu Polarkoordinaten über, so sehen wir, daß Δ durch die Gleichung

$$\varrho = \frac{p}{\cos(\omega - \alpha)} + l,$$

dargestellt wird; demnach ist Δ (vgl. Nr. 66) eine Konchoide des

1) *L. Euleri Opera posthuma mathematica et physica* I. (Petersburg, 1862) S. 370—71.

Nikomedes. Da nun diese eine zirkulare Kurve 4. Ordnung ist mit dem Pol als Doppelpunkt, so ergibt sich folgender Satz: **Die Konchoide einer Kurve von der Ordnung n, die r mal durch den Pol und s mal durch die zyklischen Punkte geht, ist im allgemeinen von der Ordnung $n_1 = 4n - 2(r + s)$.**[1])

Die Kurve Γ_1 zerfällt aber in zwei von der Ordnung $2n - (r + s)$, wenn die Basis durch eine Gleichung dargestellt wird[2]), die von der Form ist

$$(x^2 + y^2) \cdot \varphi(x, y) - \psi(x, y) = 0,$$

wo φ und ψ rationale Funktionen der Koordinaten sind, d. h. wenn die Basis der I. Kategorie der Kurven angehört, die von Halphen in seiner berühmten *Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes* (Paris, 1883) betrachtet worden sind.

Die Berechnung der Fläche von Γ_1 liefert Resultate, die nicht weniger interessant sind[3]). Bezeichnen wir mit A die vom Radiusvektor $\varrho + l$ beschriebene Fläche eines Konchoidenzweiges, so haben wir:

$$A = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\Omega} (\varrho + l)^2 d\omega = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\Omega} \varrho^2 d\omega + l\int_{\omega_0}^{\Omega} \varrho\, d\omega + \frac{l^2}{2}(\Omega - \omega_0).$$

Das erste Integral mißt die vom Radiusvektor der Basis beschriebene Fläche, kann also als bekannt angesehen werden; die Berechnung von A ist also zurückgeführt auf die Auswertung des Integrals $\int \varrho \cdot d\omega$. Wenn dies bekannt ist, findet man auch alsbald die vom Radiusvektor $\varrho - l$ des anderen Zweiges von Γ_1 beschriebene Fläche.

70. Nach der Konchoide mit geradliniger Basis bietet sich uns zunächst die mit Kreis als Basis dar[4]). Setzen wir außerdem noch

1) G. Loria, *Intermédiaire* VIII, 1901, S. 297 u. f.

2) E. Köstlin, *Über die ebenen algebraischen Kurven, insbesondere die dritter Ordnung, deren Konchoiden zerfallen* (Württemb. Mitteilungen II. Ser., X, 1908). Unter den vielen Resultaten dieser interessanten Abhandlung beschränken wir uns, wegen Mangel an Raum auf die Anführung des folgenden: Die „Strophoide ist die einzige zirkulare Kurve 3. Ordnung, deren Konchoiden in bezug auf den außerordentlichen Brennpunkt zerfallen".

3) G. Peano, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Torino, 1887) S. 201.

4) Des weiteren bieten sich solche mit Kegelschnitt als Basis dar; den Fall, daß dieser eine Parabel ist, hat De la Hire in der S. 144 erwähnten Abhandlung behandelt; den der Ellipse oder Hyperbel Réaumur in der Schrift betitelt *Manière générale de trouver une infinité de courbes nouvelles en faisant parcourir une ligne quelconque donnée par une extremité d'une ligne droite donnée aussi et toujours placé sur un même point* (Mém. Acad. Sciences, Paris 1708).

Ist die Basis ein beliebiger Kegelschnitt und der Pol ein Brennpunkt oder ein Scheitel desselben, so erhält man Kurven resp. der Ordnung 4 und 6, welche F. Gomes Teixeira (*Tratado*, S. 242—253: *Obras*, IV, S. 312), J. Cardinaal (*Le conchoïde elliptique et les courbes qui en dérivent;* Arch. Teyler, 2. Ser., VIII, 1902) und H. Wieleitner (*Die Scheitel-Konchoiden der Kegelschnitte;* Arch. Math. Phys., 3. Ser., XII, 1907) erforscht haben.

voraus, daß der Pol auf der Basis liege, so erhalten wir eine Kurve, die Roberval in seinen schon oft zitierten *Observations* betrachtet hat[1]), wo er sie „limaçon de M. P.“ nennt, einige Eigenschaften derselben darlegt und ihre Entdeckung Pascal zuschreibt. Daher pflegt man sie als Pascalsche Schnecke zu bezeichnen[2]). Aus der Definition ergibt sich, daß man dieselbe Kurve als schiefe Kreiskonchoide ansehen kann und ferner ein neuer Gesichtspunkt, von dem aus man sie betrachten kann. Es sei (Taf. IV, Fig. 29, a, b, c) C der Mittelpunkt des Basiskreises der Konchoide, O der Pol und A der andere Endpunkt des Durchmessers OC. Man ziehe durch O eine beliebige Sehne OM der Basis, mache $MP_1 = MP_2 = l$; dann werden P_1 und P_2 Punkte der Schnecke sein. Beschreibt man nun einen Kreis um A als Mittelpunkt mit dem Radius l und zieht den Durchmesser N_1N_2 parallel zu OM, so wird die Figur $N_1N_2P_2P_1$ ein Rechteck sein und P_1N_1 sowie P_2N_2 zwei Tangenten des Kreises; also gehören die Punkte P_1 und P_2 der Fußpunktkurve des Kreises um A mit dem Radius l an, in bezug auf den Punkt O. **Folglich ist die Pascalsche Schnecke die Fußpunktkurve eines Kreises in bezug auf einen beliebigen Punkt seiner Ebene**[3]). Weiter, ist S ein Punkt des Raumes, dessen Orthogonalprojektion O ist, so sind nach einem elementaren stereometrischen Satze auch die Geraden SP_1 und SP_2 senkrecht zu den Tangenten in N_1 und N_2 an jenen Kreis; dies zeigt uns — wie auch Roberval bemerkte[4]), daß in dem letzten Satze die Worte „seiner Ebene“ gestrichen werden können.

Nehmen wir, wie üblich, ein Polar-Koordinatensystem mit O als Pol, OC als Polarachse, so ist, wenn a der Radius des Basis ist (siehe S. 137, Fußnote 2)

$$\varrho = 2a\cos\omega + l \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

die Polargleichung, und daher

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = l^2(x^2 + y^2) \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

die kartesische Gleichung der Schnecke. Sie ist also eine Kurve vierter Ordnung, von der die zyklischen Punkte Spitzen sind; die entsprechenden Tangenten haben die Gleichungen $x \pm iy = a$; der Mittelpunkt der Basis ist folglich ein singulärer vielfacher Brennpunkt der Kurve. Ferner ist O ein Doppelpunkt; da die bezüglichen Tangenten die Gleichung

---

1) A. a. O. S. 35.

2) Wir bemerken mit P. Tannery (vgl. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II B. 2. Aufl., Leipzig, 1900. S. 882), daß der Pascal, um den es sich hier handelt, unzweifelhaft Stephan ist, Vater des Blaise P.

3) Von diesem Gesichtspunkte aus sind die Pascalschen Schnecken in der Abhandlung von O. Richter, *Über Kreisfußpunktkurven* (Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 1892) betrachtet worden.

4) A. a. O. S. 38—39.

$\sqrt{4a^2-l^2}x \pm ly = 0$ haben, so ist O ein Knoten oder isolierter Punkt, je nachdem $l \lesseqgtr 2a$ ist; mit dem Zwischenfalle $l = 2a$, in welchem O eine Spitze ist, werden wir uns im folgenden Kapitel beschäftigen[1]). Hier bemerken wir noch, daß, weil die Pascalsche Schnecke eine Kurve vierter Ordnung mit zwei Spitzen und einem Doppelpunkt ist, sie von der vierten Klasse ist und eine Doppeltangente und zwei Wendepunkte besitzt; sie ist also eine rationale, zu sich selbst korrelative Kurve. Im Falle $l < 2a$ wird die Krümmung der Kurve in O durch $\frac{1}{\sqrt{4a^2-l^2}}$ ausgedrückt.

Die Gleichung (4) zeigt, daß die Doppeltangente der Schnecke die Gleichung hat: $x + \frac{l^2}{8a} = 0$, und daß die Koordinaten der zugehörigen Berührungspunkte $y = \frac{\pm l\sqrt{16a^2-l^2}}{8a}$ sind; die Berührungspunkte sind demnach reell oder imaginär, je nachdem $l \lesseqgtr 4a$; insbesondere erkennt man, daß sie sicher reell sind, wenn die Kurve einen Doppelpunkt hat.

Um die Wendepunkte zu bestimmen, entnehmen wir aus (3)

$$x = 2a\cos^2\omega + l\cos\omega, \qquad y = 2a\cos\omega\cdot\sin\omega + l\sin\omega \quad . \quad (5)$$

oder auch

$$x = a + a\cos 2\omega + l\cos\omega, \qquad y = a\sin 2\omega + l\sin\omega \quad . \quad . \quad (5')$$

Danach ist die Bedingung für die Kollinearität der drei Punkte $(\alpha), (\beta), (\gamma)$

$$\begin{vmatrix} a + a\cos 2\alpha + l\cos\alpha & a\sin 2\alpha + l\sin\alpha & 1 \\ a + a\cos 2\beta + l\cos\beta & a\sin 2\beta + l\sin\beta & 1 \\ a + a\cos 2\gamma + l\cos\gamma & a\sin 2\gamma + l\sin\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$a^2\begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 1 \\ \cos 2\beta & \sin 2\beta & 1 \\ \cos 2\gamma & \sin 2\gamma & 1 \end{vmatrix} + al\begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \sin\alpha & 1 \\ \cos 2\beta & \sin\beta & 1 \\ \cos 2\gamma & \sin\gamma & 1 \end{vmatrix}$$

$$+ al\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin 2\alpha & 1 \\ \cos\beta & \sin 2\beta & 1 \\ \cos\gamma & \sin 2\gamma & 1 \end{vmatrix} + l^2\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 1 \\ \cos\beta & \sin\beta & 1 \\ \cos\gamma & \sin\gamma & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese vier Determinanten haben nun die Werte bezüglich

$$8\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \quad 4\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma - \cos(\alpha+\beta+\gamma), \quad 1,$$

1) Ist l rein imaginär, so ist auch die Konchoide ganz imaginär, nur O ist reell; eine solche Kurve wurde, bei einer analytischen Untersuchung, von E. Eckardt (Arch. Math. Phys., 3. Ser. XI, 1906, S. 53) betrachtet.

multipliziert mit $4\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ [1]); daher wird die vorige Gleichung, nachdem sie von diesem Faktor befreit ist, sein:

$$8a^2\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+al\left\{4\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right.$$
$$\left.+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta+\gamma)\right\}+l^2=0.$$

Machen wir $\alpha=\beta=\gamma=\lambda$, so erhalten wir

$$8a^2+al(4\cos^3\lambda+3\cos\lambda-\cos 3\lambda)+l^2=0,$$

oder auch

$$8a^2+l^2+6al\cos\lambda=0.$$

Die Besonderheit eines Wendepunktes ist also durch folgende Gleichung charakterisiert:

$$\cos\lambda=-\frac{8a^2+l^2}{6al},$$

womit endlich die Existenz der beiden Wendepunkte der Schnecke bestätigt wird und ferner gezeigt ist, daß diese nur dann reell sind, wenn $2a<l<4a$; wenn z. B. die Schnecke einen Knotenpunkt hat, sind sie imaginär, aber in jedem Falle befinden sie sich auf der reellen Geraden $x-\frac{(8a^2+l^2)(4a^2-l^2)}{9al^2}=0$.

Wir bemerken noch, daß die Gleichung (3) für die durch vollständige Rotation des Radiusvektor $2a\cos\omega+l$ erzeugte Fläche den folgenden Ausdruck liefert:

$$2\int_0^\pi(2a\cos\omega+l)^2d\omega=4\pi a^2+2\pi l^2,$$

ein Resultat, das schon von Roberval erhalten wurde[2]) und welches leicht in Worte zu kleiden ist. Im Spezialfalle $l=a$, wird dieser Ausdruck $6\pi a^2$, stellt also das Sechsfache der Fläche des Basiskreises dar. — Die Rektifikation der Pascalschen Schnecke hängt von elliptischen Integralen ab.[3])

71. Da die Schnecke eine rationale Kurve ist, so können die Koordinaten ihrer Punkte durch rationale Funktionen eines Parameters dargestellt werden. In der Tat, setzt man in Gleichung (5′) $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=t$, so findet man

$$x=\frac{(1-t^2)[(l+2a)+(l-2a)t^2]}{(1+t^2)^2},\quad y=\frac{2t[(l+2a)+(l-2a)t^2]}{(1+t^2)^2},\qquad(6)$$

welche Darstelluug sich für mannigfache Anwendungen gut eignet[4]).

1) Vgl. den in Nr. **67** schon angeführten Aufsatz des Verfassers.

2) A. a. O. S. 40.

3) J. Gomes Teixeira, *Nota sull'applicazione del teorema di Fagnano agli archi della lumaca di Pascal e della sinusoide* (Period. matem., XIX, 1903).

4) G. Pittarelli, *Le lumache di Pascal* (Giorn. Matem. XXI, 1883).

Nicht weniger nützlich ist für den Geometer folgende Bemerkung: Wendet man auf die Kurve (3) die Transformation durch reziproke Radien an, mit O als Pol und k^2 als Potenz, so erhält man die Kurve

$$\varrho = \frac{k^2}{2a\cos\omega + l};$$

da diese Kurve in kartesischen Koordinaten durch die Gleichung dargestellt wird:

$$(l^2 - 4a^2)x^2 + l^2y^2 + 4ak^2x - k^4 = 0,$$

so ist es klar, daß sie ein Kegelschnitt ist, genauer eine Ellipse, Parabel, Hyperbel, je nachdem $l \gtreqless 2a$, d. h. je nachdem die Schnecke einen isolierten, einen Rückkehr- oder einen Knotenpunkt hat. Umgekehrt: **die Transformierte durch reziproke Radienvektoren (die Inverse) eines Kegelschnittes ist eine Pascalsche Schnecke, wenn der Transformationspol in einem Brennpunkte liegt**[1]).

Diese Kurve kann auch als Enveloppe erhalten werden. Ein Kreis nämlich, der zum Durchmesser die Strecke hat, die einen festen Punkt mit dem beweglichen Punkte eines festen Kreises verbindet, umhüllt eine Pascalsche Schnecke; eine kurze Rechnung genügt, um die Richtigkeit dieser Behauptung zu erweisen. Sie ist ferner die Hüllkurve aller Kreise, deren Mittelpunkte auf einem festen Kreise liegen und durch einen festen Punkt der Ebene gehen[2]). — Später werden wir sehen, daß dieselbe Kurve ein Spezialfall der Cartesischen Ovale (Nr. **76**), sowie eine spezielle Epizykloide ist (Nr. **210**); man trifft sie ferner in der Theorie der konformen Abbildungen[3]). Die Pascalsche Schnecke gehört im Falle $l = a$[4]) auch zur Klasse derjenigen Kurven, die zur Lösung der Aufgabe der Dreiteilung des Winkels dienen[5]); es ist dies eine Bemerkung, die zuerst Pascal machte —

---

1) C. Taylor, *Ancient and modern Geometry of conics* (Cambridge, 1881) S. 356.

2) O. Losehand, *Über Kurven 16. Ordnung und 12. Klasse* usw. (Dissert. Göttingen 1904) S. 8.

3) Aus der Funktion $w = 2mz - z^2$, wo m eine reelle Größe ist, erhält man nämlich, indem man setzt $w = x + iy$, $z = \varrho e^{i\omega}$ die beiden Gleichungen:

$$x = \varrho(2m\cos\omega - \varrho\cos 2\omega), \quad y = \varrho(2m\sin\omega - \varrho\sin 2\omega),$$

welche, wenn $\varrho = const.$, eine Pascalsche Schnecke darstellen. S. Amstein, *Quelques exemples de representation conforme avec leur application à un problème d'hydrodynamique* (Bull. Soc. Vaudoise Sc. nat., XVI, 1882).

4) Ein Fall, dem man bei A. Sucharda (*Über die Pascalsche Spirale*, Arch. Math. Phys., 2. Ser., IV, 1886) begegnet.

5) Um sich davon zu überzeugen, beachte man, daß in diesem Falle die Gleichung der Kurve sich folgendermaßen schreiben läßt:

$$\frac{\varrho}{a} = 2\cos\omega - 1 = 4\cos^2\frac{\omega}{2} - 3,$$

wie Roberval bezeugt[1]) — und die dann viele andere wiederholten oder umgestalteten[2]). Dieselbe Kurve tritt auf bei einer Frage aus der Mechanik, die man mit dem Namen „Sauveurs und de l'Hopitals Zugbrücke"[3]) belegte, weil sie eben eine solche Vorrichtung betrifft; sie wurde von Sauveur vorgelegt und zuerst vom Marquis de Hôpital gelöst[4]), darauf von anderen[5]). Sie ist ferner, insofern sie eine Kurve vierter Ordnung mit zwei Spitzen und einem Doppelpunkt ist, von projektivischem Standpunkt aus identisch mit einer Linie viel jüngeren Datums, die an dieser Stelle wenigstens einen Hinweis verdient.

Gegeben seien (s. Taf. IV, Fig. 30) zwei Kreise Γ und Γ', einander gleich und sich berührend; man betrachte einen beliebigen Punkt M' von Γ' und seine Polare m in bezug auf Γ, diese wird in einem Punkte P geschnitten von der Geraden p, die durch M parallel zur Verbindungslinie der Mittelpunkte O und O' der gegebenen Kreise gezogen ist. Der Ort des Punktes P ist eine Kurve, die von den Engländern „the cocked hat", d. h. der aufgekrempte Hut, genannt

---

oder auch

$$\frac{\varrho}{a} = \frac{\cos\frac{3\omega}{2}}{\cos\frac{\omega}{2}};$$

wenn daher der Winkel $\frac{3\omega}{2} = \alpha$ bekannt ist, so wird man daraus

$$\cos\frac{\alpha}{3} = \cos\frac{\omega}{2}$$

ableiten und danach $\frac{\alpha}{3}$.

1) Man s. die zitierten *Observations.*

2) Azémar, *Trisection de l'angle, suivie de Recherches analytiques sur le même sujet de Garnier* (Paris 1809); Fusinieri, *Trisezione geometria degli archi di cerchio e descrizione di curve algebriche col mezzo della base variabile di un triangolo* (Mem. Società Ital. Scienze XXIII, 1846); Jouanne. *Trisection de l'angle au moyen du limaçon de Pascal* (Nouv. Ann. math. 2e Ser., IX, 1870); Brocard, *Note sur un compas trisecteur* (Bull. Soc. math. France III, 1875; das daselbst untersuchte Instrument ist eine Erfindung von Laisant); u. a.

3) Vgl. W. Schell, *Theorie der Bewegung und der Kräfte* Bd. II (Leipzig, 1880) S. 67.

4) S. den Aufsatz *Illustris Marchionis Hospitalii Solutio problematis physico-mathematici ab erudito quodam geometra propositi* (Acta Eruditorum, Febr. 1695).

5) S. *Joh. Bernoulli Opera* I. und *Jac. Bernoulli Opera* I. (Genevae, 1744).

Das einfache Aussehen der Polargleichung der Schnecke führt zur Betrachtung der ähnlich durch die Gleichung $\varrho = 2a\cos\omega + 2b\sin\omega + l$ dargestellten Kurve. Setzt man aber

$$a = m\cos\mu, \quad b = m\sin\mu, \quad \omega - \mu = \theta,$$

so wird diese Gleichung

$$\varrho = 2m\cos\theta + l$$

die augenscheinlich einer Pascalschen Schnecke gehört. Daraus folgt, daß die durch M. Mühlenbruch (*Über die cardioidenförmige Kurven, welche durch die Polargleichung* $r = a + b\sin t + c\cos t$ *gegeben sind.* Diss. Jena 1867) untersuchten Linien keine Neuheit bieten.

wird. Sie heißt auch Bicorne, in Deutschland Kremphut oder Zweihorn. Die oben angeführte Konstruktion — von Miss C. A. Scott erdacht[1]) — eignet sich zur Auffindung der Gleichung sowie der Eigenschaften der Kurve. Nehmen wir OO' als y-Achse und O als Anfang eines rechtwinkligen kartesischen Systems, so kann man als allgemeine Ausdrücke für die Koordinaten des Punktes M folgende nehmen

$$x = a \cdot \cos \omega, \qquad y = 2a + a \cdot \sin \omega,$$

wenn a der Radius von Γ und Γ'. Die Geraden m und p haben daher die Gleichungen

$$x \cos \varphi + (2 + \sin \varphi)\, y = a \quad \text{bzw.} \quad x = a \cos \varphi.$$

Daher erhält man folgende parametrische Darstellung der Kurve:

$$x = a \cos \varphi, \qquad y = \frac{a \sin^2 \varphi}{2 + \sin \varphi}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

die damit beweist, daß der „Kremphut" eine rationale Kurve ist. Durch Elimination von φ aus (7) erhält man als Gleichung der Kurve

$$(x^2 + 2ay - a^2)^2 - y^2(a^2 - x^2) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

oder, wenn man will,

$$x^4 + 2a^2y^2 + a^4 + 4ax^2y - 2a^2x^2 - 4a^3y + x^2y^2 = 0.$$

Aus derselben ergibt sich, daß die Kurve vollständig innerhalb des Streifens der Ebene liegt, der begrenzt wird von den beiden gemeinsamen Tangenten, die zu OO' parallel laufen; die x-Achse schneidet die Kurve in zwei Punkten D, D', die Spitzen sind und als zugehörige Tangenten die Geraden haben, die diese Punkte mit dem Berührungspunkte C von Γ und Γ_1 verbinden. Ferner ist die Kurve zirkular und hat den unendlich fernen Punkt von Oy zum isolierten Punkte. C ist der Punkt der größten Ordinate; die Punkte mit den Abszissen $\pm \frac{a\sqrt{5}}{3}$ sind Wendepunkte. Für die Konstruktion der Tangente sind verschiedene Methoden angegeben[2]), die auseinanderzusetzen es uns hier an Raum gebricht.

Siebentes Kapitel.

Die dreispitzigen Kurven vierter Ordnung.

72. Bei der Behandlung der Konchoiden mit Kreisbasis im vorigen Kapitel haben wir den Fall, daß das konstante Zwischenstück l gleich dem Durchmesser $2a$ des Basiskreises ist, ausgeschlossen. In diesem bemerkenswerten Falle (s. Taf. IV, Fig. 29 b) haben wir eine

1) *Educational Times*, Januar 1896, Question 12978.

2) G. de Longchamps, *Note sur le bicorne* (Journ. math. spéc. 4e Ser. VI, 1877).

Kurve vierter Ordnung mit drei Spitzen, mit der wir uns nun beschäftigen wollen. Carré[1]) schrieb die Auffindung derselben dem holländischen Mathematiker J. Koërsma[2]) zu; Ozanam erwähnt sie in seinem *Dictionnaire mathématique* (Amsterdam 1691, S. 102), indem er sie geometrische Cykloide nennt; Castillon endlich schlug wegen der herzförmigen Gestalt, die die Kurve hat, vor, sie Kardioide[3]) zu nennen, und dieser vernünftige Vorschlag wurde allgemein angenommen[4]).

Erinnern wir uns der Darlegungen des vorigen Kapitels, so erkennen wir, daß die kartesische sowie die Polargleichung der Kardioide sein werden

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2) \quad . \; . \quad (1) \qquad \varrho = 2a(1 + \cos\omega) \quad . \quad (2)$$

und daß die Koordinaten ihrer Punkte als Funktionen eines Parameters so ausgedrückt werden können:

$$x = \frac{4a(1-\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^2}, \quad y = \frac{8a\lambda}{(1+\lambda^2)^2} \; {}^{5)} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Die Kardioide hat keine Wendepunkte, besitzt aber die Doppeltangente $x + \frac{a}{2} = 0$. Aus (3) ergibt sich folgende Gleichung der Tangente im Punkte (λ):

$$(3\lambda^2 - 1)x + \lambda(\lambda^2 - 3)y + 4a = 0, \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

welche, da sie kubisch in λ ist, bestätigt, daß die Kardioide eine Kurve dritter Klasse ist. Die durch Gleichung (4) dargestellte Tangente trifft die Doppeltangente im Punkte $\left(-\frac{a}{2}, \frac{3a}{2\lambda}\right)$, der vom singulären Brennpunkte $(a, 0)$ durch die Gerade $x + \lambda y = a$ projiziert wird. Nennen wir den Winkel, den sie mit der x-Achse bildet ω, so haben wir

$$\operatorname{tg}\omega = -\frac{1}{\lambda}.$$

Dies führt zu einem interessanten Schlusse; betrachten wir die drei Tangenten der Kardioide, die mit Ox den Winkel α bilden, so sind

1) *Examen d'une courbe formée par le moyen du cercle* (Mém. Acad. Sciences MDCCV, Paris).

2) Vgl. *Intermédiaire* V. 1898. S. 200.

3) *De curva cardioide* (Phil. Trans. London, 1741).

4) Die wichtigsten Eigenschaften dieser Kurve nebst der bezüglichen Bibliographie wurden neuerdings von Raymond Clare Archibald in der Inaugural-Dissertation *The Cardioide and some of its related curves* (Straßburg, 1900) dargelegt.

5) Diese Darstellung, in weitem Maße angewendet, findet sich in folgenden Schriften von K. Zahradnik: *Theorie der Cardioide* (Prager Ber. 1875), *Über die Cardioide* (Das. 1877), *Beitrag zur Theorie der Cardioide* (Arch. Math. Phys. LXIII, 1879).

die Parameter ihrer Berührungspunkte — infolge von (4) — durch die Gleichung bestimmt

$$\operatorname{tg} \alpha = - \frac{3\lambda^2 - 1}{\lambda^3 - 3\lambda};$$

die entsprechenden Werte von ω werden durch Elimination von λ aus den beiden zuletzt geschriebenen Gleichungen erhalten; sie sind daher durch die Gleichung bestimmt

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg}^3 \omega}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \omega} = \operatorname{tg} 3\omega;$$

daraus ergeben sich für ω die folgenden drei Werte: α, $\alpha + \frac{\pi}{3}$ $\alpha + \frac{2\pi}{3}$. Folglich: **Die Tripel einander paralleler Tangenten der Kardioide schneiden die Doppeltangente derselben in Tripeln von Punkten, die vom singulären Brennpunkte aus unter Winkeln gleich $\frac{\pi}{3}$ gesehen werden.**[1]) Daraus läßt sich ein neues Verfahren der Dreiteilung eines Winkels entnehmen, womit sich ergibt, **daß die Kardioide, als Enveloppe ihrer Tangenten betrachtet, eine Trisektrix-Kurve ist.**

Es möge die Gleichung

$$(3\mu^2 - 1)\, x + \mu\, (\mu^2 - 3)\, y + 4a = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

diejenige Tangente der Kardioide darstellen, die senkrecht zu der durch (4) dargestellten ist. Die Bedingung des Senkrechtstehens der beiden Geraden (4) und (4′) läßt sich dann folgendermaßen schreiben:

$$(\lambda\mu + 1)\,[\lambda^2\mu^2 - 3\,(\lambda^2 + \mu^2) + 8\,\mu\lambda + 1] = 0.$$

Sie zerfällt also in zwei Bedingungen. Dies beweist uns: **Der Ort der Punkte, von denen man an eine Kardioide Paare zueinander senkrechter Tangenten ziehen kann, ist eine zerfallende Kurve.**[2])

Die Bedingung der Kollinearität der drei Punkte (α), (β), (γ) ist

$$\alpha\beta\gamma\,(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta + 3 = 0. \quad (5)$$

Davon machen wir sogleich eine einfache Anwendung, indem wir den Ort der Punkte einer Kardioide aufsuchen, die die Eigenschaft haben, daß die Berührungspunkte der an die Kurve von einem beliebigen derselben gezogenen Tangenten in gerader Linie liegen. Wenn nun x, y die Koordinaten eines Punktes dieses Ortes sind und (λ_1), (λ_2), (λ_3) die Berührungspunkte der entsprechenden Tangenten, so hat man vermöge Gleichung (4)

---

1) Em. Weyr, *Sopra una proprietà metrica delle cardioide* (Rend. del R. Istituto Lombardo, 2. Ser. V, 1872).

2) C. Juel, Tidsskrift Math. 1880. — Ein genaueres Resultat wurde von Wholstenholme ausgesprochen. S. den II. Bd., Nr. 275 dieses Werkes.

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{3x}{y}, \quad \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 = -3, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{x-4a}{y};$$

liegen nun diese Punkte in gerader Linie, so hat man wegen (5)

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2,$$

der gesuchte Ort ist also der Basiskreis der Kardioide.[1])

Die Kardioide ist eine Kurve 4ter Ordnung und 3ter Klasse mit drei Spitzen und einer Doppeltangente, ohne Doppelpunkte und Wendepunkte, sie ist also korrelativ zu den Kurven 3ter Ordnung mit einem Doppelpunkt, die 4ter Klasse sind, drei Wendepunkte haben und keine weitere Singularität. Kein Wunder also, wenn sie die Polarreziproke einer speziellen rationalen Kurve dritter Ordnung in bezug auf einen geeigneten Kreis ist, nämlich der Trisektrix von Maclaurin (s. Nr. 47)[2]). Um diesen bemerkenswerten Satz zu beweisen, beachten wir, daß mit einer einfachen Verschiebung der y-Achse die Gleichung der genannten Trisektrix sich in der Form schreiben läßt

$$x(x^2+y^2) = 4R^2 - 3R(x^2+y^2),^{3)}$$

welche dann sogleich folgende parametrische Darstellung der Kurve liefert

$$x = R\frac{1-3\lambda^2}{1+\lambda^2}, \quad y = R\frac{\lambda^3-3\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Die Polare dieses Punktes in bezug auf den Kreis $x^2+y^2=R^2$ hat die Gleichung

$$x(1-3\lambda^2) + y(\lambda^3-3\lambda) = R(1+\lambda^2).$$

Um die Enveloppe dieser Geraden zu finden, kombinieren wir diese Gleichung mit ihrer Abgeleiteten nach λ, nämlich

$$-6\lambda x + 3y(\lambda^2-1) = 2\lambda R.$$

Dann bekommen wir

$$x = -\frac{R}{3}\frac{\lambda^4+6\lambda^2-3}{(\lambda^2+1)^2}, \quad y = -\frac{R}{3}\frac{8\lambda}{(\lambda^2+1)^2},$$

oder auch

$$x + \frac{R}{3} = \frac{R}{3}\frac{4(1-\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^2}, \quad -y = \frac{R}{3}\frac{8\lambda}{(\lambda^2+1)^2}.$$

Da sich diese nun aus den Gleichungen (3) ergeben, wenn man in ihnen x, y, a ersetzt bzw. durch $x+\frac{R}{3}$, $-y$, $\frac{R}{3}$, so ist damit der ausgesprochene Satz bewiesen.[4])

---

1) Educational Times, LVIII, 1893, Question 11247.

2) G. de Longchamps, *Rapprochement entre la trisectrice de Maclaurin et la cardioïde* (Prager Ber. 1897).

3) Diese Gleichung entsteht aus der in Nr. 47 gefundenen kartesischen Gleichung (2) durch Verwandlung von a in R und x in $-(x+2R)$.

4) Andere wichtigere Eigenschaften der Kurve bewies E. Laguerre in seinem schönen Aufsatze *Sur la cardioïde* (Nouv. Ann. Math., 2. Sér. XVII, 1878; *Œuvres de Laguerre*, II. Paris 1905, S. 480ff).

Aus der Gleichung (2) ergeben sich leicht folgende Ausdrücke für den Bogen s der Kardioide, gemessen von der Spitze ab, und für den Krümmungsradius R

$$s = 8a \sin\frac{\omega}{2}\text{[1]}, \qquad R = \frac{8a}{3}\cos\frac{\omega}{3} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Eliminiert man aus diesen ω, so findet man

$$s^2 + 9R^2 = (8a)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

welches die **natürliche Gleichung** der Kardioide ist. Die Gestalt derselben führt zu der Idee von allgemeineren Kurven, deren natürliche Gleichung folgende ist

$$s^2 + (2n+1)^2 R^2 = b^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

wo n eine ganze Zahl, und b eine beliebige Strecke ist. E. Cesàro, der sie zuerst betrachtet hat, nannte sie **sternförmige Kardioiden**[2]. Um ihre gewöhnliche analytische Darstellung zu finden, kann man die allgemeine Methode zur Bestimmung der kartesischen Gleichung einer durch ihre natürliche Gleichung bestimmten Kurve anwenden.[3]

---

1) Diese Rektifikationsformel findet sich im wesentlichen in der im vorigen Kapitel zitierten Schrift von De la Hire. Über die Schwerpunktsbestimmung einer Fläche siehe Saint-Germain *Recueil d'exercises sur la mécanique rationelle* (II. éd., Paris 1895) S. 38.

2) *Vorl. über natürliche Geometrie*, S. 10.

3) Dieses Problem ist zuerst von J. Riccati in folgender Weise gelöst worden (m. s. die Abh. *Data in qualsivoglia modo per la curva, che deve descriversi, la espressione del raggio combaciante, determinare la curva medesima*; Opere del Conte Jacopo Riccati, III, Lucca 1764; vgl. Boole *Differential Equations*, 4. Aufl., London, 1882, S. 264). Es sei $R = f(s)$ die gegebene Gleichung, so kann man setzen

$$\frac{ds^3}{dx \cdot d^2y - dy \cdot d^2x} = f(s)\,.$$

Man nehme nun s als unabhängige Variable; dann folgt aus $ds^2 = dx^2 + dy^2$, daß $d^2x = -\frac{dy \cdot d^2y}{dx}$, und daher wird die vorige Gleichung zu

$$\frac{dx \cdot ds}{d^2y} = f(s)\,;$$

oder, da $dy = \sqrt{ds^2 - dy^2}$,

$$\frac{\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}{\frac{d^2y}{ds^2}} = f(s).$$

Man setze nun $\frac{dy}{ds} = p$; dann verwandelt sich diese Gleichung in

$$\frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} = \frac{ds}{f(s)}\,,$$

daher ist

$$\text{arc} \sin p = \int \frac{ds}{f(s)}\,.$$

Setzt man nämlich zur Abkürzung $2n+1=\mu$, so hat man zunächst $R=\frac{1}{\mu}\sqrt{b^2-s^2}$, daher

$$\varphi=\mu\int\frac{ds}{\sqrt{b^2-s^2}}=\mu\arcsin\frac{s}{b}$$

unter der Voraussetzung, daß $\varphi=0$ für $s=0$ sei. Daraus folgert man, daß $s=b\sin\frac{\varphi}{\mu}$, und

$$x=\frac{b}{\mu}\int\cos\varphi\cos\frac{\varphi}{\mu}\,d\varphi,\quad y=\int\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{\mu}\,d\varphi,$$

oder

$$\frac{2\mu x}{b}=\int\left(\cos\frac{\mu+1}{\mu}\varphi+\cos\frac{\mu-1}{\mu}\varphi\right)d\varphi,$$

$$\frac{2\mu y}{b}=\int\left(\sin\frac{\mu+1}{\mu}\varphi+\sin\frac{\mu-1}{\mu}\varphi\right)d\varphi.$$

Führt man die angegebene Integration aus, so ergibt sich durch Elimination von μ

$$\left.\begin{aligned}\frac{4(x+x_0)}{b}&=\frac{1}{n+1}\sin\frac{2(n+1)\varphi}{2n+1}+\frac{1}{n}\sin\frac{2n\varphi}{2n+1},\\ -\frac{4(y+y_0)}{b}&=\frac{1}{n+1}\cos\frac{2(n+1)\varphi}{2n+1}+\frac{1}{n}\cos\frac{2n\varphi}{2n+1}\end{aligned}\right\}\quad .\ .\quad (9)$$

als parametrische Darstellung der sternförmigen Kardioiden.

73. Wir werden später der Kardioide wiederum begegnen als einem Spezialfall der Sinusspiralen (Nr. **171**) und der Epizykloiden (Nr. **210**). Unterdessen wollen wir uns mit einer Kurve beschäftigen, die von projektivischem Standpunkte aus sich von der Kardioide nicht unterscheidet, jedoch durch ihre Definition und ihre metrischen Eigenschaften völlig von ihr verschieden ist; es war J. Steiner, der die Aufmerksamkeit der Geometer auf sie lenkte, und viele derselben haben sie zum Gegenstande eifriger und erfolgreicher Studien gemacht[1]).

Setzt man demnach

$$\varphi=\int\frac{ds}{f(s)},\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad (I)$$

so hat man $p=\sin\varphi$, $\sqrt{1-p^2}=\cos\varphi$; infolgedessen ist

$$dx=\sqrt{ds^2-dy^2}=ds\sqrt{1-p^2}=ds\cdot\cos\varphi,\quad dy=p\cdot ds=ds\cdot\sin\varphi$$

und daher

$$x=\int\cos\varphi\cdot ds,\quad y=\int\sin\varphi\cdot ds\quad .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad (II)$$

Die Gleichungen (I), (II) lösen das Problem. Wenn $f(s)$ sich auf eine Konstante reduziert, so ist die Kurve von konstanter Krümmung (d. h. eine Gerade oder ein Kreis) und wird von Krause (*Nova Theoria linearum curvarum*, München, 1835, S. 24) Unicurva genannt; in allen anderen Fällen hat man eine Versicurva.

1) Für die bezügliche Literatur sei auf des Verf. Werk *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche* (III. Aufl., Turin 1907) S. 74—76 und 375—378 verwiesen; außer den dort zitierten Arbeiten sind noch die folgenden

Bei unserer Darlegung wollen wir von der durch Steiner selbst gegebenen Definition ausgehen: „Wenn man von einem Punkte P des einem Dreiecke ABC umbeschriebenen Kreises die Lote auf die Seiten fällt, so sind deren Fußpunkte A', B', C' auf einer Geraden p belegen, die man die Simonsche oder richtiger die Wallecesche Gerade des Punktes P in bezug auf das Dreieck nennt. Die Enveloppe aller dieser Geraden p, die den Punkten P jenes Kreises entsprechen, ist die Steiner'sche Kurve[1]).“ Nach einem bekannten Satze ist p die Scheiteltangente einer dem Dreiecke ABC einbeschriebenen Parabel, die P zum Brennpunkte hat, daher kann die Kurve als Enveloppe der Scheiteltangenten der einem gegebenen Dreiecke eingeschriebenen Parabeln definiert werden[2]).

Um die Gleichung der Steinerschen Kurve zu finden, bedienen wir uns der ersten Definition und nehmen den Mittelpunkt O des dem Dreiecke ABC umbeschriebenen Kreises als Anfangspunkt; als Koordinaten der Ecken können wir dann nehmen die Ausdrücke $r\cos\alpha$, $r\sin\alpha$; $r\cos\beta$, $r\sin\beta$; $r\cos\gamma$, $r\sin\gamma$. Dann sind die Gleichungen der Seiten

$$x\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+y\sin\frac{\beta+\gamma}{2}=r\cos\frac{\beta-\gamma}{2},$$

$$x\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}+y\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}=r\cos\frac{\gamma-\alpha}{2},$$

$$x\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+y\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=r\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Wenn nun $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$ die Koordinaten des Punktes P sind, so werden

$$x\sin\frac{\beta+\gamma}{2}-y\cos\frac{\beta+\gamma}{2}=r\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}-\varphi\right),$$

$$x\sin\frac{\gamma+\alpha}{2}-y\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}=r\sin\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}-\varphi\right),$$

$$x\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-y\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=r\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\varphi\right)$$

die Gleichungen der von P auf die Seiten gefällten Senkrechten sein, und daher sind die Koordinaten ihrer Fußpunkte A', B', C'

---

zu bemerken: C. Wirtz, *Die Steinersche Hypocykloide* (Diss. Straßburg, 1900); F. P. Ruffini, *Della ipocicloide tricuspide* (Rend. Accad. Bologna 1900—1901); M. Roegner, *Die Steinersche Hypocykloide* (Diss. Jena, 1908). Die zahlreichen Beziehungen zwischen dieser Kurve und der Kardioide wurden von R. C. Archibald (*The cardioid and the quartics with three cusps.*; Ann. of Mathem., 2 Ser., IV, 1903) eingehend untersucht und ausführlich dargestellt.

1) *Über eine besondere Kurve dritter Klasse (und vierter Ordnung)* (Crelle's Journ. LIII, 1856).

2) Man könnte sie auch definieren als Enveloppe der Asymptoten der einem Dreiecke ABC umbeschriebenen Hyperbeln.

$$\frac{r}{2}\Big[\cos\beta + \cos\gamma + \cos\varphi - \cos(\beta+\gamma-\varphi)\Big],$$
$$\frac{r}{2}\Big[\sin\beta + \sin\gamma + \sin\varphi - \sin(\beta+\gamma-\varphi)\Big];$$

$$\frac{r}{2}\Big[\cos\gamma + \cos\alpha + \cos\varphi - \cos(\gamma+\alpha-\varphi)\Big],$$
$$\frac{r}{2}\Big[\sin\gamma + \sin\alpha + \sin\varphi - \sin(\gamma+\alpha-\varphi)\Big];$$

$$\frac{r}{2}\Big[\cos\alpha + \cos\beta + \cos\varphi - \cos(\alpha+\beta-\varphi)\Big],$$
$$\frac{r}{2}\Big[\sin\alpha + \sin\beta + \sin\varphi - \sin(\alpha+\beta-\varphi)\Big].$$

Daraus läßt sich ableiten, daß die Gleichung der Geraden $B'C'$ sein wird:

$$x\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma-\varphi}{2} - y\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma-\varphi}{2} =$$
$$+ r\Big\{\sin\frac{\varphi-\alpha}{2}\cos\frac{\varphi-\beta}{2}\cos\frac{\varphi-\gamma}{2} + \cos\frac{\varphi-\alpha}{2}\sin\frac{\varphi-\beta}{2}\cos\frac{\varphi-\gamma}{2}$$
$$+ \cos\frac{\varphi-\alpha}{2}\cos\frac{\varphi-\beta}{2}\sin\frac{\varphi-\gamma}{2} + \sin\frac{\varphi-\alpha}{2}\sin\frac{\varphi-\beta}{2}\sin\frac{\varphi-\gamma}{2}\Big\},$$

oder auch

$$x\sin\frac{\varphi-(\alpha+\beta+\gamma)}{2} + y\cos\frac{\varphi-(\alpha+\beta+\gamma)}{2} = \frac{r}{2}\Big\{\sin\frac{3\varphi-(\alpha+\beta+\gamma)}{2}\cdots$$
$$+ \sin\frac{\varphi+\alpha-\beta-\gamma}{2} + \sin\frac{\varphi-\alpha+\beta-\gamma}{2} + \sin\frac{\varphi-\alpha-\beta+\gamma}{2}\Big\}. \quad (10)$$

Die Symmetrie dieser Gleichung in α, β, γ zeigt, daß die Gerade $B'C'$ auch durch den Punkt A' geht, somit ist schließlich die Existenz der Wallaceschen Geraden bewiesen. Bemerken wir auch noch, daß durch Vertauschung von φ mit $\varphi + \pi$ die Gleichung (10) in die Gleichung einer zu der durch (10) dargestellten senkrechten Geraden übergeht; daher **verteilen sich die Tangenten der Kurve in zueinander rechtwinklige Paare, entsprechend den Paaren gegenüberliegender Punkte des gegebenen Kreises.**

Um die Enveloppe der Geraden (10) zu finden, setzen wir der Kürze wegen:

$$\varphi = 2\psi,\ \alpha+\beta+\gamma = 2s,\ -\alpha+\beta+\gamma = 2a,\ \alpha-\beta+\gamma = 2b,$$
$$\alpha+\beta-\gamma = 2c.$$

Die Gleichung (10) nimmt dann folgendes Aussehen an:

$$x\sin(\psi - s) + y\cos(\psi - s)$$
$$= \frac{r}{2}\Big\{\sin(3\psi - s) + \sin(\psi + a) + \sin(\psi + b) + \sin(\psi + c)\Big\}.$$

Differenzieren wir nach ψ, so ergibt sich:

$$x \cos(\psi - s) - y \sin(\psi - s)$$
$$= \frac{r}{2}\left\{3\cos(3\psi - s) + \cos(\psi + \alpha) + \cos(\psi + b) + \cos(\psi + c)\right\},$$

welche Gleichung mit der vorigen kombiniert ergibt

$$\frac{2x}{r} = \sin(3\psi - s)\sin(\psi - s) + 3\cos(3\psi - s)\cos(\psi - s)$$
$$+ \sin(a + s) + \sin(b + s) + \sin(c + s),$$
$$\frac{2y}{r} = \sin(3\psi - s)\cos(\psi - s) - 3\cos(3\psi - s)\sin(\psi - s)$$
$$+ \cos(a + s) + \cos(b + s) + \cos(c + s).$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\sin(a + s) + \sin(b + s) + \sin(c + s)$$
$$\text{d. h. } \sin(\beta + \gamma) + \sin(\gamma + \alpha) + \sin(\alpha + \beta) = \frac{2x_0}{r},$$
$$\cos(a + s) + \cos(b + s) + \cos(c + s)$$
$$\text{d. h. } \cos(\beta + \gamma) + \cos(\gamma + \alpha) + \cos(\alpha + \beta) = \frac{2y_0}{r},$$

und außerdem
$$x - x_0 = x', \qquad y - y_0 = y',$$

so kann man die vorigen Gleichungen in folgende anderen umgestalten

$$\frac{2x'}{r} = 2\cos\varphi + \cos(2\varphi - 2s) \qquad \frac{2y'}{r} = 2\sin\varphi - \sin(2\varphi - 2s)$$

oder auch

$$\frac{2(x'\cos 2s + y'\sin 2s)}{r} = 2\cos(\varphi - 2s) + \cos 2(\varphi - 2s),$$
$$\frac{2(x'\sin 2s - y'\cos 2s)}{r} = 2\sin(\varphi - 2s) - \sin 2(\varphi - 2s).$$

Wenn man dann $\varphi - 2s = \frac{\omega}{3}$ setzt und die Koordinatenvertauschung ausführt, die durch

$$\xi = x'\cos 2s + y'\sin 2s, \qquad \eta = x'\sin 2s - y'\cos 2s$$

charakterisiert ist, so erhalten wir schließlich die Gleichungen:

$$\xi = \frac{r}{2}\left(2\cos\frac{\omega}{3} + \cos\frac{2\omega}{3}\right), \quad \eta = \frac{r}{2}\left(2\sin\frac{\omega}{3} - \sin\frac{2\omega}{3}\right) \cdot \quad . \quad (11)$$

Da nun diese (s. Abschn. VI, Kap. 10) der Kurve angehören, die durch einen Punkt der Peripherie des Kreises mit dem Radius $\frac{r}{2}$ erzeugt wird, wenn dieser innerhalb eines festen Kreises mit dem Radius $\frac{3r}{2}$ rollt, so ist die gewiß von Schläfli[1]) und wahrscheinlich

1) J. H. Graf, *Der Briefwechsel zwischen J. Steiner und L. Schläfli* (Bern, 1896) S. 206—208. Nichtsdestoweniger wird die behandelte Kurve immer die Steinersche Hypozykloide genannt.

auch von Steiner gemachte Bemerkung bewiesen, daß die Steinersche Kurve eine dreispitzige Hypozykloide ist. Die drei Spitzen liegen auf dem Kreise mit dem Zentrum O und dem Radius $\frac{3r}{2}$, während der konzentrische Kreis mit dem Radius $\frac{r}{2}$ die Kurve dreimal berührt.

Eliminiert man ω aus den Gleichungen (11), so findet man die kartesische Gleichung der Kurve als

$$(x^2 + y^2)^2 + 4rx(3y^2 - x^2) + \frac{3^2 r^2}{2}(x^2 + y^2) - \frac{3^3}{2^4} r^4 = 0. \quad (12)$$

Die dreispitzige Hypozykloide ist also eine Kurve vierter Ordnung, die von der unendlich fernen Geraden in den zyklischen Punkten berührt wird. Umgekekrt: Jede Kurve vierter Ordnung und dritter Klasse, die von der unendlich fernen Geraden in den zyklischen Punkten berührt wird, ist eine dreispitzige Hypozykloide. Diese wichtige Bemerkung L. Cremonas[1]) kann durch folgende von A. Clebsch[2]) herrührende Überlegung bewiesen werden. Die Gleichung

$$\xi_1 \xi_2 \xi_3 = \xi_1^{\,3} + \xi_2^{\,3}$$

zwischen den homogenen Koordinaten ξ_i einer Geraden stellt eine Kurve dritter Klasse dar, welche die dritte Seite des Fundamentaldreiecks als Doppeltangente hat, indem die Berührungspunkte die bezüglichen Ecken des Dreiecks selbst sind. Die vorige Gleichung führt alsbald zu folgender parametrischer Darstellung

$$r\xi_1 = \lambda^2, \quad r\xi_2 = \lambda, \quad r\xi_3 = 1 + \lambda^3;$$

mit anderen Worten, es ist

$$\lambda^2 x_1 + \lambda x_2 + (1 + \lambda^3) x_3 = 0$$

die allgemeine Gleichung der Tangenten an jene Kurve. Kombinieren wir sie mit ihrer Abgeleiteten nach λ, so ersieht man, daß die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Kurve proportional mit $1 - 2\lambda^3$, $\lambda^4 - 2\lambda$, λ^2 sind; setzt man $\lambda = \frac{\mu}{\nu}$, so kann man schreiben

$$\frac{x_1}{\nu^4 - 2\mu^3\nu} = \frac{x_2}{\mu^4 - 2\nu^3\mu} = \frac{x_3}{\mu^2\nu^2}.$$

Nehmen wir $\mu = \varrho e^{\frac{i\varphi}{2}}$, $\nu = \varrho e^{-\frac{i\varphi}{2}}$, $\frac{x_2 + x_1}{2x_3} = \frac{x}{a}$, $\frac{x_2 - x_1}{2ix_3} = \frac{y}{a}$, so folgt daraus

---

1) S. die fundamentale Abhandlung *Sur l'hypocycloide à trois rebroussements* (Crelles Journ. LXIV, 1865).

2) S. die Schlußnote zu der angeführten Abhandlung von Cremona.

$$\frac{x}{a} = \cos 2\varphi + 2\cos\varphi, \quad \frac{y}{a} = \sin 2\varphi - 2\sin\varphi.$$

Da diese nun $\left(\text{für } a = \frac{r}{2}, \varphi = \frac{\omega}{3}\right)$ von der Form der Gleichung (11) ist, ist der Satz von Cremona bewiesen.

74. Indem wir der Bequemlichkeit halber die Bezeichnungen ändern, wollen wir unsere Gleichung (11) folgendermaßen schreiben:

$$x = a(2\cos\lambda + \cos 2\lambda), \quad y = a(2\sin\lambda - \sin 2\lambda) \quad . \quad (11')$$

und erhalten so eine sehr nützliche parametrische Darstellung der dreispitzigen Hypozykloide. Aus dieser entnimmt man eine analoge für die Polar-Koordinaten $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\omega = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$; man findet nämlich die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varrho^2 &= a^2(5 + 4\cos 3\lambda) \\ \operatorname{tg}\omega &= \frac{2\sin\lambda - \sin 2\lambda}{2\cos\lambda + \cos 2\lambda} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (13)$$

von denen die zweite nach einigen geeigneten Umformungen folgendes Aussehen erhält:

$$\operatorname{tg}\left(\omega + \frac{\lambda}{2}\right) = \frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{3\lambda}{2} \cdot \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Gleichung (13) zeigt, daß der Radiusvektor zwischen dem Minimum a und dem Maximum $3a$ variiert; jenes entspricht den Werten $\lambda = \frac{\pi}{3}$, π, $\frac{5\pi}{3}$, dieses den Werten $\lambda = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$; die Punkte der Kurve mit dem größten Radiusvektor sind die Spitzen, jene mit dem kleinsten Vektor sind die Berührungspunkte des (dreifach berührenden) Kreises um O mit dem Radius a. Setzt man in (13) $\lambda = \frac{2k\pi}{3} \pm \alpha$ ein, so bekommt man $\varrho^2 = a^2(5 + 4\cos 3\alpha)$; da nun hierin das doppelte Vorzeichen ($\pm \alpha$) keinen Zeichenwechsel hervorruft, so ist klar, daß (die drei durch den Anfangspunkt gezogenen Geraden, die mit $0x$ die Winkel bzw. $0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ bilden, d. h.) die Spitzentangenten drei Symmetrieachsen der Kurve sind. Aus der Bemerkung, daß die Gleichungen (13), (14) sich auch nicht ändern, wenn man λ in $\lambda + \frac{2k\pi}{3}$ und ω in $\omega + \frac{2k\pi}{3}$ $(k = 1, 2)$ verändert, erkennt man, **daß der dreispitzigen Hypozykloide ∞^1 gleichseitige Dreiecke einbeschrieben werden können.**

Wir nehmen wieder die Gleichung (11′), um daraus abzuleiten, daß die Tangente an die Hypozykloide im Punkte (τ) folgende Gleichung hat

$$x\sin\frac{\tau}{2} + y\cos\frac{\tau}{2} = a\sin\frac{3\tau}{2}; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

sie bildet daher mit der x-Achse den Winkel $\pi - \frac{\tau}{2}\cdot$ Die Plückerschen Koordinaten dieser Tangente sind

$$\xi = -\frac{\sin\frac{\tau}{2}}{a\sin\frac{3\tau}{2}} \qquad \eta = -\frac{\cos\frac{\tau}{2}}{a\sin\frac{3\tau}{2}}\cdot$$

Durch Elimination von τ ergibt sich daraus

$$\xi^2 + \eta^2 = a\,(3\,\xi\eta^2 - \eta^3) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

als Tangentialgleichung der Kurve. — Die durch Gleichung (15) dargestellte Gerade schneidet, wie jede beliebige Gerade der Ebene, die Hypozykloide in vier Punkten, deren Parameter man durch Einsetzen der Werte (11′) für x und y in (15) und Auflösung der resultierenden Gleichung nach λ erhält. Diese Gleichung kann nun als

$$\sin\left(\frac{\tau}{2} + \lambda\right)\cdot\sin^2\frac{\tau - \lambda}{4} = 0$$

geschrieben werden, zerfällt daher in die beiden

$$\sin^2\frac{\tau - \lambda}{4} = 0, \quad \sin\left(\frac{\tau}{2} + \lambda\right) = 0.$$

Die erstere liefert den Ausgangspunkt (τ) doppelt gerechnet, während die zweite zu den beiden Punkten mit den Parametern

$$\lambda_1 = \pi - \frac{\tau}{2}, \quad \lambda_2 = 2\pi - \frac{\tau}{2} \quad \text{führt.}$$

Wir sehen also: **Die Tangente der Hypozykloide im Punkte (τ) schneidet die Kurve ferner in den Punkten $\left(\pi - \frac{\tau}{2}\right)$ und $\left(2\pi - \frac{\tau}{2}\right)$.** Der Kürze wegen wollen wir die beiden letzteren assoziierte Punkte nennen. Die Koordinaten solcher Punkte sind

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a\left(\cos\tau - 2\cos\frac{\tau}{2}\right) \\ y_1 &= a\left(\sin\tau + 2\sin\frac{\tau}{2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_2 &= a\left(\cos\tau + 2\cos\frac{\tau}{2}\right) \\ y_2 &= a\left(\sin\tau - 2\sin\frac{\tau}{2}\right) \end{aligned}\right\};$$

daraus folgt

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = a\cos\tau, \quad \frac{y_1 + y_2}{2} = a\sin\tau,$$

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 = 4a^2;$$

$$\frac{x_1 - x_2}{4a} = -\cos\frac{\tau}{2}, \quad \frac{y_1 - y_2}{4a} = \sin\frac{\tau}{2},$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (4a)^2$$

und also: **Die von zwei beliebigen assoziierten Punkten begrenzte Strecke ist gleich dem Durchmesser des die Hypozykloide dreifach berührenden Kreises und hat einen Punkt der Peripherie dieses**

Kreises zum Mittelpunkte. Die Tangenten in diesen assoziierten Punkten haben die Gleichungen bzw.:

$$x \cos\frac{\tau}{4} + y \sin\frac{\tau}{4} = -a \cos\frac{3\tau}{4}, \quad x \sin\frac{\tau}{4} - y \cos\frac{\tau}{4} = a \sin\frac{3\tau}{4};$$

beachten wir die Gestalt dieser Gleichung und merken uns, daß sie durch die Werte

$$x = -a\cos\tau, \quad y = -a\sin\tau$$

befriedigt wird, so schließen wir: **Die Tangenten in zwei beliebigen assoziierten Punkten sind zueinander senkrecht und schneiden sich in einem Punkte des dreifach berührenden Kreises, der dem Mittelpunkte der von jenem Punkte begrenzten Strecke diametral gegenüber liegt.**

Da die hier untersuchte Kurve dritter Klasse ist — vgl. Gl. (16) — so gehen durch jeden Punkt (x, y) der Ebene drei ihrer Tangenten; die entsprechenden Werte des Parameters τ sind die Wurzeln τ_1, τ_2, τ_3 der Gleichung (15); wir haben daher als Gleichung jener Tangenten

$$x \sin\frac{\tau_k}{2} + y \cos\frac{\tau_k}{2} = a \sin\frac{3\tau_k}{2} \quad (k = 1, 2, 3).$$

Durch Elimination von x und y findet man folgende Beziehung für die Parameter dreier Kurvenpunkte, deren Tangenten durch denselben Punkt gehen:

$$\begin{vmatrix} \sin\frac{\tau_1}{2} & \cos\frac{\tau_1}{2} & \sin\frac{3\tau_1}{2} \\ \sin\frac{\tau_2}{2} & \cos\frac{\tau_2}{2} & \sin\frac{3\tau_2}{2} \\ \sin\frac{\tau_3}{2} & \cos\frac{\tau_3}{2} & \sin\frac{3\tau_3}{2} \end{vmatrix} = 0, \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} \sin\frac{\tau_1}{2} & \cos\frac{\tau_1}{2} & \sin^3\frac{\tau_1}{2} \\ \sin\frac{\tau_2}{2} & \cos\frac{\tau_2}{2} & \sin^3\frac{\tau_2}{2} \\ \sin\frac{\tau_3}{2} & \cos\frac{\tau_3}{2} & \sin^3\frac{\tau_3}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Setzen wir nun zur Abkürzung

$$\xi_k = e^{i\tau_k} \quad (k = 1, 2, 3).$$

so wird diese Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \xi_1^2 & \xi_1 & \xi_1^3 - 1 \\ \xi_2^2 & \xi_2 & \xi_2^3 - 1 \\ \xi_3^2 & \xi_3 & \xi_3^3 - 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{oder } \xi_1\xi_2\xi_3 = 1.$$

Setzen wir nun wieder für die ξ ihre Werte ein, so finden wir

$$e^{i(\tau_1 + \tau_2 + \tau_3)} = 1$$

und daher

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 2\pi.$$

Wir sehen also: **Die Summe der Parameter derjenigen drei Punkte der Kurve, deren entsprechende Tangenten in einen Punkt zusammenlaufen, ist gleich vier Rechten.**

Aus der Gleichung (15), welche die Tangente darstellt, ergibt sich die Gleichung der **Normalen** als

$$x \cos\frac{\tau}{2} - y \sin\frac{\tau}{2} = 3a \cos\frac{3\tau}{2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

setzen wir daher $\tau = \pi + \bar{\tau}$, so geht sie über in

$$x \sin\frac{\bar{\tau}}{2} + y \cos\frac{\bar{\tau}}{2} = 3a \sin\frac{3\bar{\tau}}{2}.$$

Da diese nun der Form nach identisch mit (15) ist, so erkennt man die Enveloppe der Normalen, d. h. **die Evolute der dreispitzigen Hypozykloide ist eine Kurve derselben Art, jedoch von der dreifachen Größe**; die dreispitzige Hypozykloide ist also eine Kurve, die ihrer eigenen Evolute ähnlich ist. Wenn man in Gleichung (17) τ in $\pi - \frac{\tau}{2}$ und dann in $2\pi - \frac{\tau}{2}$ verwandelt, so erhält man die Gleichungen zweier Geraden, die durch den Punkt mit den Koordinaten $3a \cos\tau$, $3a \sin\tau$, der der Geraden (17) selbst angehört, hindurchgehen; und demnach: **die Normalen der dreispitzigen Hypozykloide in den drei Punkten, die derselben Tangente angehören, laufen in einen Punkt des der Kurve umbeschriebenen Kreises zusammen.**

Differenzieren wir (17), so erhalten wir

$$x \sin\frac{\tau}{2} + y \cos\frac{\tau}{2} = 9a \sin\frac{3\tau}{2}$$

und kombinieren wir diese Gleichung mit (17) selbst, so erhalten wir folgende Werte für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$x_0 = 3a(2\cos\tau - \cos 2\tau), \quad y_0 = 3a(2\sin\tau + \sin 2\tau).$$

Ist nun R der Krümmungsradius, so hat man

$$R = 8a \sin\frac{3\tau}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Wenn daher R_1 und R_2 die Krümmungsradien in den beiden assoziierten Punkten $\left(\pi + \frac{\tau}{2}\right)$ und $\left(2\pi - \frac{\tau}{2}\right)$ sind, so hat man

$$R_1 = \mp 8a \cos\frac{3\tau}{4}, \quad R_2 = \pm 8a \sin\frac{3\tau}{4}$$

und daher die bemerkenswerte Beziehung:

$$R_1^2 + R_2^2 = 64a^2.$$

Die Gleichungen (12) geben auch den Ausdruck für das Bogendifferential $ds = 4a \sin\frac{3\tau}{2} d\tau$, und durch Integration von $\tau = 0$

$$s = \frac{8a}{3}\left(1 - \cos\frac{3\tau}{2}\right) = \frac{16a}{3} \sin^2\frac{3\tau}{4}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Machen wir darin $\tau = \frac{2\pi}{3}$, so erhalten wir $\frac{16a}{3}$ als Länge des ganzen

Bogens zwischen zwei aufeinander folgenden Spitzen und daher: **Die Gesamtlänge der Hypozykloide ist gleich dem 16-fachen Radius des einbeschriebenen Kreises.** — Führen wir dagegen die Integration zwischen den Grenzen τ und $\frac{\pi}{3}$ aus, so erhalten wir

$$s = \frac{8a}{3} \cos \frac{3\tau}{2}. \qquad (19')$$

Durch Elimination von τ aus den Gleichungen (19) und (19′) findet man

$$9s^2 + R^2 = 64a^2, \qquad (20)$$

welches die natürliche Gleichung der Hypozykloide ist.

Mit Hilfe derselben Gleichung (12) kann man die Quadratur eines Flächenstückes der Hypozykloide ausführen; im besonderen findet man: **Die ganze Fläche der Hypozykloide ist doppelt so groß als die des einbeschriebenen Kreises.**

Die dreispitzige Hypozykloide erfreut sich noch weiterer schöner Eigenschaften, die man, wie L. Cremona getan hat, durch Anwendung der allgemeinen Theorie der ebenen Kurven auffinden kann. Man kann sie jedoch sowohl durch direkte geometrische Betrachtungen[1]) als auch durch Rechnung[2]) nachweisen. Es ist uns jedoch versagt, noch weiter uns mit dieser Kurve zu beschäftigen[3]). Wir schließen daher dieses Kapitel mit der Bemerkung, daß die Kurven vierter Ordnung mit drei Spitzen (von denen die Kardioide und die Hypozykloide Spezialfälle sind) von F. Padula[4]) und später von Siebeck[5]) untersucht wurden[6]); dieser erzeugte sie (einer Idee von H. Schröter folgend) durch die Schnitte entsprechender Tangenten an zwei Kegel-

---

1) C. Intrigila, *Studio geometrico sull' ipocicloide tricuspide* (Giorn. Matem. XXIII, 1885); C. Wirtz, *Die Steiner'sche Hypocycloide* (Diss. Straßburg, 1900).

2) Painvin, *Note sur l'hypocycloïde à trois rebroussements* (Nouv. Ann. Math. 2ᵉ Sér. IX, 1870); M. Simon, *Analytische Geometrie* (Leipzig, 1900) XIII. Abschnitt.

3) Es sei nur noch bemerkt, daß dieser Kurve K. Weierstraß begegnete, als er die folgende Aufgabe aus der Variationsrechnung löste: „Wie muß die Oberfläche eines auf gegebener kreisförmiger Basis errichteten Rotationskörpers von vorgeschriebenem Volumen gestaltet sein, damit der Widerstand, welchen der Körper, in der Richtung seiner Achse sich bewegend, von der Luft erfährt, ein Minimum sei?" M. s. Abh. zur Gesch. d. Math., XX. Heft, 1905, S. 81—86.

4) *Intorno le curve di 4⁰ grado che hanno tre punti di regresso di prima specie* (Ann. di Sc. matem. fis. III, 1852).

5) *Über die Erzeugung der Curven dritter Klasse und vierter Ordnung durch Bewegung eines Punktes* (Crelles Journ. LXVI, 1866).

6) M. s. auch die Abh. von E. Beltrami, *Su alcuni teoremi di Feuerbach e di Steiner* (Mem. Acc. Bologna, 2. Reihe V, 1875).

schnitte, indem er als entsprechend solche zwei Tangenten ansah, deren Berührungspunkte mit einem Schnittpunkte der beiden Kurven in gerader Linie liegen.

Achtes Kapitel.

Einige Fußpunktkurven vierter Ordnung der dreispitzigen Hypozykloide.

75. Die im vorigen Kapitel untersuchte dreispitzige Hypozykloide ist nicht nur wichtig wegen der großen Anzahl schöner Eigenschaften, die sie darbietet, sondern auch weil sie den Ausgangspunkt für die Entdeckung und Untersuchung anderer bemerkenswerter Kurven bildet. Das vorliegende Kapitel, welchem die Aufgabe zufällt, mit denjenigen von diesen Kurven bekannt zu machen, die von der vierten Ordnung sind, möge dies beweisen.

Wir schicken zunächst folgende Bemerkung voraus: Wenn auf der Peripherie eines Kreises (mit dem Zentrum O und dem Radius r) ein Punkt D gegeben ist (Taf. IV, Fig. 31), und man nimmt nach entgegengesetzten Richtungen von D aus zwei Bogen derart, daß $arc\,DS = 2\,arc\,DS'$, so ist die Enveloppe aller Geraden SS' eine dreispitzige Hypozykloide. — Setzen wir $arc\,DS = \alpha$, so hat die Gerade SS', wenn O der Anfang, OD die x-Achse ist, die Gleichung

$$x \cos\frac{\alpha}{2} + y \sin\frac{\alpha}{2} = x \cos\frac{3\alpha}{2} \cdot \quad \cdots\cdots \quad (1)$$

Da nun diese dieselbe Gestalt hat, wie (15) des vorigen Kapitels, so ist die Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes evident.

Wenn man nun die Sehne SS' nach beiden Seiten verlängert, derart, daß $ST = S'T' = SS'$, so ist der Ort der Punkte T' die dreispitzige Hypozykloide, jedoch der Ort der Punkte T eine neue Kurve, deren analytische Darstellung man folgendermaßen erhält: Sei H (s. dieselbe Figur) der Mittelpunkt der Sehne SS'; da man nun von dem Punkte O nach T, sowohl auf dem geradlinigen Wege OT als auch auf dem gebrochenen OHT gehen kann, so hat man, indem man auf die Achsen projiziert:

$$x = \overline{OH} \cos\frac{\alpha}{2} - \overline{HT} \sin\frac{\alpha}{2}, \quad y = \overline{OH} \sin\frac{\alpha}{2} + \overline{HT} \cos\frac{\alpha}{2};$$

nun ist $\overline{OH} = r \cos\frac{3\alpha}{2}$, $\overline{TH} = 3r \sin\frac{3\alpha}{2}$, daher

$$x = r\left[\cos\frac{3\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2} - 3 \sin\frac{3\alpha}{2} \sin\frac{\alpha}{2}\right],$$

$$y = r\left[\cos\frac{3\alpha}{2} \sin\frac{\alpha}{2} + 3 \sin\frac{3\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}\right],$$

oder einfacher

$$x = r(2\cos 2\alpha - \cos\alpha), \quad y = r(2\sin 2\alpha + \sin\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Setzt man $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = t$, so erhält man für x und y rationale gebrochene Ausdrücke vierter Ordnung, welche zu dem Schlusse berechtigen, daß die Kurve, um die es sich handelt, eine Kurve vierter Ordnung mit drei Knoten und drei einen Winkel von 120^0 miteinander bildenden Symmetrieachsen ist. Wiewohl diese Kurve Stoff zu vielerlei Untersuchungen gegeben hat[1]), so wollen wir uns hier doch nicht mit einer weiteren Untersuchung derselben aufhalten.

Wir gehen vielmehr zur Betrachtung der Fußpunktkurve einer dreispitzigen Hypozykloide in bezug auf einen Punkt des einbeschriebenen Kreises über. Sie ist eine Kurve, die den von G. de Longchamps[2]) ihr gegebenen Namen Trèfle oblique (schiefes Dreiblatt) trägt, der auch von H. Brocard angewendet wird, dem Verfasser einer ausgezeichneten Monographie über dieselbe[3]). Die Gleichung derselben könnte man unschwer vermittels der Gleichung (1) einer Tangente der Hypozykloide erhalten. Wir ziehen es jedoch vor, sie zu erhalten, indem wir von folgender (von de Longchamps angegebenen) Definition, durch die sie allgemein erhalten werden kann, ausgehen: „Gegeben ein Kreis mit dem Zentrum O, ein Punkt P seiner Peripherie und eine feste Gerade r (Taf. IV, Fig. 32a); man ziehe von P eine beliebige Sehne PR; der um R mit dem Radius PR beschriebene Kreis möge die durch R zu r gezogene Parallele in den beiden Punkten M, M' schneiden, deren Ort dann ein „schiefes Dreiblatt" ist[4]).“

Um die Gleichung desselben zu finden, nehmen wir ein Polarsystem mit P als Pol und dem Durchmesser des gegebenen Kreises POD als Polarachse; nennen wir den Winkel desselben mit der Geraden r α, den Radius des genannten Kreises a und ϱ, ω, die Koordinaten eines beliebigen Punktes M, dann ist

$$PR = 2a\cos(\omega - \alpha), \quad \varrho = PM = 2 \cdot PR \cdot \cos(\omega - \alpha),$$

daher ist

$$\varrho = 4a\cos(2\omega - \alpha)\cos(\omega - \alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

oder wenn man lieber will:

$$\varrho = 2a\cos\omega + 2a\cos(3\omega - 2\alpha) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

die gewünschte Gleichung.[5]) Geht man zu kartesischen Koordinaten

---

1) Angegeben in der Abhandlung von H. Brocard, *Le trifolium* (Journ. math. spéc., 1891) S. 17 des Separat-Auszuges.

2) *Sur le trifolium* (Journ. math. spéc. 1887).

3) S. die Fußnote 1 auf dieser S.

4) Es ist leicht einzusehen, daß diese Konstruktion als eine besondere, auf den gegebenen Kreis angewandte Transformation angesehen werden kann.

5) H. Brocard, *Mémoire sur divers problèmes dont la solution dépend de la trisection de l'angle* (Algers, 1874).

über, so wird diese

$$\frac{(x^2+y^2)^2}{2a} = x(x^2+y^2) + x(x^2-3y^2)\cos 2\alpha + y(x^2-3y^2)\sin 2\alpha. \quad (4)$$

Aus derselben ergibt sich: Das schiefe Dreiblatt ist eine Kurve vierter Ordnung mit P als dreifachem Punkte; die zugehörigen Tangenten bilden mit der Polarachse die Winkel $\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}$, $\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\pi}{2}+\alpha$, somit sind zwei derselben zueinander senkrecht, und die dritte ist zur festen Geraden senkrecht. Von der unendlich fernen Geraden wird das Dreiblatt in den zyklischen Punkten der Ebene geschnitten. Aus den Plückerschen Formeln geht hervor, daß die betrachtete Kurve von der sechsten Klasse ist und sechs Wendepunkte sowie vier Doppeltangenten besitzt, eine derselben ist, wie gesagt, die unendlich ferne Gerade, zwei andere sind die parallel zu der festen Geraden gehenden Tangenten an den gegebenen Kreis, die letzte ist reell und im Endlichen gelegen (s. die Figur). Wir überlassen es dem Leser mit Benutzung der vorigen Gleichung zu verifizieren, daß der gegebene Kreis das Dreiblatt außer im Punkte P und in den zyklischen Punkten der Ebene, noch in den Ecken ABC eines gleichseitigen Dreiecks schneidet, daß ferner das Dreiblatt durch die Punkte Q, Q' geht, in denen die von D zur festen Geraden gezogene Parallele von dem Kreise mit dem Zentrum D und dem Radius DP geschnitten wird, und dort von den Senkrechten, die von den genannten Punkten auf den Durchmesser PD gefällt sind, berührt wird. Setzt man:

$$\varrho_1 = 2a\cos\omega, \qquad \varrho_2 = 2a\cos 3\left(\frac{2\alpha}{3}-\omega\right),$$

so wird Gleichung (3′)

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2;$$

nun stellt von den eben genannten Gleichungen die erste den gegebenen Kreis dar, während die zweite jene spezielle „Rosenkurve“ (Nr. 136, III) darstellt, die unter dem Namen „gleichseitiges Kleeblatt“ bekannt ist. Man kann somit das schiefe Dreiblatt konstruieren, indem man die Vektoren eines Kreises zu denen eines gleichseitigen geeignet gelegenen Kleeblattes addiert[1]).

Noch eine andere Entstehungsweise verdanken wir K. Zahradnik[2]): Von dem beweglichen Punkte M eines Kegelschnittes, der durch den

1) Eine andere Erzeugung ist in der Cuestion 32, die von H. Brocard im *Progréso math.* (Bd. I, S. 294) vorgelegt und im Bd. III, S. 241 u. 261, gelöst wurde, enthalten. Sie hat folgenden Wortlaut: „Un hilo de longitud d está fijo á un punto A de una circumferencia de radio a, y lleva en su otro extremo un peso M que lo tiende. El hilo pasa per un pequeño anillo B que se mueve á lo largo de la cricumferenzia OA. Hallar el lugar de los puntos M.“

2) *Über eine birationale kubische Verwandtschaft und deren Anwendung* (Wiener Sitzungsber. CXIV, Abt. II, Mai 1905).

Koordinatenanfang O geht, fällen wir die Lote MA und MB auf die beiden Achsen, verbinden die Fußpunkte A und B miteinander und fällen von O auf AB das Lot OM_1. Der Fußpunkt M_1 beschreibt dann das Dreiblatt.

76. Jedem Werte des Winkels α entspricht ein besonderes Dreiblatt. Besonders erwähnenswert sind diejenigen, die entstehen, wenn $\alpha = 0$ oder $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist. Die Polargleichung des ersteren ist (wenn der Kürze halber $4a = d$ gesetzt wird)

$$\varrho = d \cdot \cos \varphi \cdot \cos 2\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

oder auch

$$\varrho = d \cdot \cos \varphi - 2d \cdot \cos \varphi \sin^2 \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5')$$

während die der zweiten Kurve lautet

$$\varrho = 4a \sin \omega \cdot \sin 2\omega \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Die durch die Gleichungen (5) und (6) dargestellten Kurven wurden von G. de Longchamps gefunden, der sie bzw. Trifolium droit (gerades Dreiblatt)[1]) und Feuille double droite (gerades Zweiblatt)[2]) nannte; er gab auch eine besondere Erzeugungsart für die erstere an, sowie ein Verfahren, welches wir noch darlegen werden, um eine noch allgemeinere Kurve als die zweite zu finden.

I. „Gegeben sei eine Strecke $OO' = d$ (s. Taf. IV, Fig. 32b). Man ziehe durch O einen beliebigen Strahl, auf welchen man das Lot $O'M$ fällt; M' sei symmetrisch zu M in bezug auf OO', und P sei der Fußpunkt des von M' auf OM gefällten Lotes; der Ort der Punkte P ist ein gerades Dreiblatt[3])." Um die Gleichung desselben zu finden, nehmen wir O als Pol und OO' als Polarachse, nennen H den Schnittpunkt von MM' mit OO'; man hat dann sukzessive:

$$OM = d \cos \omega, \qquad MH = OM \cdot \sin \omega = d \sin \omega \cdot \cos \omega,$$
$$MM' = 2d \sin \omega \cdot \cos \omega, \quad PM = MM' \cdot \sin \omega = 2d \sin^2 \omega \cdot \cos \omega,$$

und da nun $\varrho = OP = OM - PM$, ergibt sich

$$\varrho = d \cos \omega - 2d \cos \omega \cdot \sin^2 \omega,$$

welche Gleichung mit (5′) übereinstimmt. Die zugehörige kartesische Gleichung

$$(x^2 + y^2)^2 - dx(x^2 - y^2) = 0$$

1) Eine stereometrische Erzeugung dieser Kurve verdankt man A. Droz-Farny (*Notes géométriques sur le trifolium droit;* Mathésis, 3. Sér., IV, 1904).

2) Es ist wohl zu bemerken, daß die älteste uns bekannte Erwähnung dieser Kurve sich in der *Abhandlung über die Kurve deren Natur durch die Gleichung* $y^4 = (4ax - 2x^2)y^2 - x^4$ *ausgedrückt wird* (Breslau, 1833) von I. K. Jobisch findet.

3) G. de Longchamps, *Essai sur la géometrie de la règle et de l'équerre* (Paris, 1890) S. 125.

läßt erkennen, daß die Kurve aus drei Blättern besteht, von denen zwei zueinander in bezug auf OO' symmetrisch sind, das dritte ist selbst symmetrisch in bezug auf diese Gerade; die Tangenten an die Kurve in dem dreifachen Punkte O sind die y-Achse und die Winkelhalbierer der Achsenwinkel; außer der unendlich fernen Geraden sind Doppeltangenten der Kurve die drei Geraden $x + \frac{d}{8} = 0$, $y \pm \frac{d}{4} = 0$.

Das gerade Dreiblatt hat eine sehr große Ähnlichkeit der Gestalt mit einer rationalen Kurve vierter Ordnung, die vor ca. 160 Jahren von G. Cramer betrachtet wurde, der sie als „une espèce de trèfle" bezeichnete, das auf folgende Weise erzeugt werden könne[1]): „Gegeben ein Kreis mit dem Zentrum C und dem Radius r, sowie ein Punkt O seiner Peripherie; man nehme als Achsen zwei Geraden durch O, die mit OC die Winkel $\frac{\pi}{4}$ bilden; ist nun NP als Ordinate eines beliebigen Punktes des Kreises gezeichnet, so zeichne man den Punkt M derart, daß $\overline{MP}^2 = \overline{ON} \cdot \overline{NP}$ und betrachte dessen geometrischen Ort. Die Gleichung desselben ist ersichtlich

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= x\left\{\sqrt{r^2 - \left(x - \frac{r}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{r}{\sqrt{2}}\right\} \\ \text{oder} \qquad x^4 + y^4 &- 2ax(x^2 - y^2) = 0 \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wenn man zur Vereinfachung $r = a\sqrt{2}$ setzt. Das Cramersche Dreiblatt ist demnach eine Kurve vierter Ordnung mit O als dreifachem Punkte, der Geraden $x + a(\sqrt{2} - 1) = 0$ als Doppeltangente usw.; sie geht aber nicht durch die zyklischen Punkte.

II. „Gegeben ein rechter Winkel AOB, auf dessen Schenkeln die Punkte A und B markiert sind. Auf eine beliebige durch B gezogene Gerade fälle man das Lot AM (Taf. V, Fig. 33); wenn nun MH senkrecht zu OA und HP senkrecht zu AM, so ist der Ort der Punkte P ein schiefes Zweiblatt[2])." Um dessen Gleichung zu finden, bezeichnen wir die Entfernungen OA, OB mit a, b, nehmen A als Pol und AO als Polarachse. Projizieren wir den Linienzug $AOBM$ auf AM, so erhalten wir

$$AM = a\cos\omega + b\sin\omega .$$

Anderseits haben wir

$$\varrho = AP = AH \cdot \cos\omega = AM \cdot \cos^2\omega ,$$

daher schließlich

$$\varrho = a\cos^3\omega + b\sin\omega \cdot \cos^2\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

die gesuchte Gleichung ist. Die entsprechende kartesische lautet

1) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genève 1750) S. 421.

2) G. de Longchamps, *Essai* S. 122.

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2(ax + by) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Das schiefe Zweiblatt hat einen dreifachen Punkt in A; die entsprechenden Tangenten sind die y-Achse, doppelt gezählt, und die Gerade $ax + by = 0$. Im Spezialfalle $a = 0$ werden (8) und (9) zu

$$\varrho = b \cdot \sin\omega \cos^2\omega \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8')$$

$$(x^2 + y^2)^2 = bx^2y \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9')$$

Die erstere verwandelt sich in Gleichung (6), wenn man b in $8a$, ω in $\frac{\pi}{2} - \omega$ verwandelt, während die zweite Gleichung beweist, daß die dargestellte Kurve symmetrisch zur y-Achse ist; daher der Name gerades Zweiblatt, den sie erhalten hat (s. Taf. V, Fig. 34).

Aus (9') kann man ableiten, indem man x und y vertauscht und statt b 4α setzt

$$y = \pm\sqrt{\alpha x} \pm \sqrt{\alpha x - x^2}; \quad \ldots \ldots \quad (9'')$$

daher gehört das gerade Zweiblatt zur Klasse derjenigen Kurven, denen unser Kap. 10 gewidmet ist. Es löst eine von Montucci in den *Nouvelles Ann. de Math.* im Jahre 1857 (S. 449) vorgelegte Frage, und ist identisch mit der Duplikatrix-Kurve, die von demselben Geometer in der Arbeit *Résolution de l'équation du 5e degré* (Paris, 1869) angewendet wird. Wir bemerken noch, daß die Gleichung (9'') für die Untersuchung des geraden Zweiblattes sehr nützlich ist[1]): z. B. führt sie alsbald zur Bestimmung der Fläche der Kurve

$$2\left\{\int_0^\alpha (\sqrt{\alpha x} + \sqrt{\alpha x - x^2})\, dx - \int_0^\alpha (\sqrt{\alpha x} - \sqrt{\alpha x - x^2})\, dx\right\}$$

$$= 4\int_0^\alpha \sqrt{\alpha x - x^2}\, dx = \frac{\pi\alpha^2}{2}.$$

Es soll nicht übergangen werden, daß in der *Introduction* von G. Cramer (S. 413) sich noch eine Kurve findet, deren Gestalt dem geraden Zweiblatt sehr ähnlich ist. Ihre Erzeugung ist folgende: „Gegeben ein Kreis mit dem Zentrum C und dem Radius r, einer seiner Durchmesser OD und die Tangente in dem Endpunkte D; man nehme eine Strecke MN, die parallel zu OD zwischen der Peripherie und der Tangente belegen ist, trage auf der zugehörigen Geraden das Stück $NP = \sqrt{ON \cdot NM}$ ab, und betrachte den Ort des Punktes P." Dieser hat zur Gleichung $x^4 + y^4 = 2axy^2$ und eine einfache Diskussion beweist die Ähnlichkeit in der Gestalt mit dem geraden Zweiblatt.

77. Wir haben in den beiden vorigen Nummern gesehen, daß das allgemeine Dreiblatt oder Trifolium als Spezialfälle das gerade

1) Vg. Elgé, *Sur le folium double* (Journ. de Math. spéc. 1896).

Dreiblatt und das gerade Zweiblatt hat, während das reguläre Dreiblatt, dessen wir beiläufig am Schlusse von Nr. 79 Erwähnung getan haben, nicht dazu gehört. Nun hat H. Brocard bemerkt[1]), daß es noch eine andere Fußpunktkurve der dreispitzigen Hypozykloide gibt, deren Spezialfälle die sämtlichen drei Kurven sind und noch andere. Es ist die Fußpunktkurve in bezug auf einen Punkt A der Spitzentangenten. Um die Gleichung derselben zu bilden, bezeichnen wir mit a die Abszisse des Punktes A und beachten, daß das von A auf die Gerade (1) gefällte Lot die Gleichung hat

$$(x-a)\sin\frac{\alpha}{2} - y\cos\frac{\alpha}{2} = 0 .$$

Die Gleichung der Brocardschen Fußpunktkurve erhalten wir nun durch Elimination von α aus dieser Gleichung und aus (1). Nun gibt diese Gleichung

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{y}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}},$$

so daß, wenn man (1) folgendermaßen schreibt

$$x\cos\frac{\alpha}{2} + y\sin\frac{\alpha}{2} = r\left[\cos^3\frac{\alpha}{2} - 3\cos\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right],$$

sich alsbald folgende analytische Darstellung der fraglichen Kurve ergibt

$$[x(x-a)+y^2][(x-a)^2+y^2] = r(x-a)[(x-a)^2-3y^2]. \quad (10)$$

Verlegen wir den Anfang nach A und gehen dann zu Polarkoordinaten über, so erhalten wir die anderen Gleichungen

$$(x^2+y^2+ax)(x^2+y^2) = rx(x^2-3y^2). \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$\varrho = (r-a)\cos\omega - 4r\cos\omega\sin\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

oder

$$\varrho = -(a+3r)\cos\omega + 4r\cos^3\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12')$$

Gleichung (11) läßt erkennen, daß die Brocardsche Fußpunktkurve eine rationale zirkulare Kurve vierter Ordnung ist mit A als dreifachem Punkte; von den zugehörigen Tangenten ist eine (die y-Achse) immer reell, die anderen (symmetrisch zu Ox) sind es, wenn A innerhalb des mit r um O beschriebenen Kreises liegt; in diesem Falle besteht die Kurve aus drei (reellen) Blättern, die zu je zweien drei gemeinsame Tangenten haben; diese und die unendlich ferne Gerade sind Doppeltangenten der Kurve usw.

Die Gleichungen (12) und (12′) hingegen lassen die hervorragenden Spezialfälle sehr gut erkennen:

---

1) S. die oben zitierte Monographie *Le trifolium* S. 26ff. des Auszuges.

1. Wenn $a + 3r = 0$, so wird (12') $\varrho = 4r \cos^3 \omega$, welche Gleichung, wie wir Abschn. V, Kap. 11 sehen werden, eine sekundäre Proportionatrix darstellt.[1])
2. Wenn $a = r$, wird (12)

$$\varrho = -4r \cos \omega \cdot \sin^2 \omega = -2r \sin \omega \cdot \sin 2\omega,$$

welches, wie wir gesehen haben, die Gleichung eines geraden Zweiblattes ist.
3. Machen wir in (12) $r - a = d$, $2r = d$, so bekommen wir die Gleichung eines geraden Dreiblattes.
4. Setzen wir endlich $a = 0$, so wird (12')

$$\varrho = r(4 \cos^3 \omega - 3 \cos \omega) = r \cos 3\omega,$$

die Gleichung eines regulären Trifoliums.

Somit ist unsere Behauptung am Anfange dieser Nummer bewiesen und zu gleicher Zeit eine gemeinsame Art der Erzeugung für alle vier speziellen Kurven angegeben.

Neuntes Kapitel.

Die Cartesischen Ovale.

78. Werfen wir einen Blick auf die vier vorhergehenden Kapitel, so erkennen wir leicht das sie verknüpfende Band. Nach der Betrachtung der Konchoide des Nikomedes (Kap. 5) beschäftigten wir uns mit den Verallgemeinerungen, die sie erfahren kann, insbesondere mit den Kreis-Konchoiden (Kap. 6); da eine derselben eine dreispitzige Kurve vierter Ordnung ist, so wurden wir veranlaßt, eine andere spezielle Kurve mit derselben Eigenschaft zu betrachten, nämlich die dreispitzige Hypozykloide (Kap. 7), und darauf gewisse Kurven vierter Ordnung, die sich von dieser herleiten (Kap. 8).

Nachdem wir nun diese Gruppe erschöpft haben, nehmen wir die chronologische Anordnung wieder auf, von der wir uns nur dann frei machen, wenn der logische Zusammenhang es erfordert, und knüpfen an eine Bemerkung von Descartes im II. Buche seiner *Géométrie* an. Daselbst teilt er, um an einem neuen Beispiele die von ihm erfundenen neuen Methoden zu illustrieren, die Definition und die Haupteigenschaften mit „de certaines ovales que vous verrez être très-utiles pour la théorie de la catoptrique“[2]). Es sind diejenigen Kurven, die man gewöhnlich die Cartesischen Ovale nennt[3]). Descartes gibt

---

1) Vgl. Jerábek, *Podaire de l'hypocycloïde de Steiner par rapport à un point de rebroussement* (Mathésis, 3e Sér., V, 1905).

2) *La géométrie de René Descartes* Nouv. éd. (Paris, 1886) S. 41 ff.

3) Vallée (*Mémoire sur la vision*, Mém. des Savants étr. XII, 1854) ge-

von ihnen folgende Erzeugung, indem er diejenigen Betrachtungen, die zu ihrer Entdeckung geführt haben, verheimlicht:

„Es seien zwei Punkte F, G gegeben und eine Gerade r, die FG in A schneidet (Taf. V, Fig. 35); man beschreibe um F einen Kreis mit beliebigem Radius, und B sei einer der beiden Schnitte desselben mit der Geraden FG. Man bestimme nun auf r einen Punkt C derart, daß $\frac{AC}{AB} = \lambda$, wo λ eine Konstante (den Brechungsindex) bedeutet; „à savoir celle qui mésure les réfractions, si on veut s'en servir pour la dioptrique". Man nehme auf r auch die Strecke $AR = AG$ und beschreibe um G als Mittelpunkt und mit dem Radius CR einen zweiten Kreis, der den schon beschriebenen in M schneidet. Der Ort der Punkte M ist ein Cartesisches Oval."

Aus dieser ziemlich komplizierten Konstruktion kann man leicht eine elegante Eigenschaft ableiten, die zur Charakterisierung der hier betrachteten Kurven sehr geeignet ist. Beachten wir nämlich, daß infolge der Konstruktion

$$FM = FB = FA + AB = FA + \frac{1}{\lambda} AG,$$

$$GM = RC = AC - AR = AC - AG,$$

so hat man ferner:

$$\lambda \cdot FM - GM = \lambda \cdot AF - AG;$$

oder, wenn man der größeren Symmetrie wegen $\lambda = -\frac{\mu}{\nu}$ setzt,

$$\mu \cdot MF + \nu \cdot MG = \mu \cdot AF - \nu \cdot AG;$$

nun ist die rechte Seite eine bekannte Größe; setzen wir daher

$$\mu \cdot AF - \nu \cdot AG = l, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

so erhalten wir

$$\mu \cdot MF + \nu \cdot MG = l, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

welche Gleichung aussagt: **Ein Cartesisches Oval ist der Ort derjenigen Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten, multipliziert mit gegebenen Zahlen, eine konstante Summe ergeben.**[1]) Ein

---

braucht den Namen Optoïde, der jedoch bald in Vergessenheit geriet. — Betr. der Bibliographie s. Liguine, *Liste des travaux sur les ovales de Descartes* (Bull. des Sciences mathématiques 2. Ser. VI, 1882). Eine neue Darstellung der Haupteigenschaften der Kurve enthält die Programmabhandlung von A. Himstedt *Über cartesische Ovale* (Nordhausen, 1906). — Wir fügen noch hinzu, daß De Mairan andere Kurven vierter Ordnung betrachtete, die in der mathematischen Theorie des Lichts Anwendung finden; so sind die anaklastischen (Strahlenbrechungs-)Kurven solche mit der Gleichung $\frac{x^2y^2 + y^2(b+y)^2}{x^2y^2 + a^2(b+y)^2} = \frac{m^2}{n^2}$; m. s. die Abh. *Sur la refraction des corps* in den Mém. de l'Acad. des Sciences, Paris 1740.

1) Die Gl. (2) ist eigentlich die bipolare Gleichung des Ovals für ein Koordinatensystem, das die festen Punkte F und G als Pole hat. Von diesem Gesichtspunkte aus ist diese Gleichung schon reichlich ausgebeutet worden.

Vergleich von (2) mit (1) zeigt, daß das Oval durch den Punkt A geht; wird $\mu = \nu$, so läßt (2) erkennen, daß dann das Oval zu einer Ellipse mit den Brennpunkten F und G wird, und wenn $\nu = -\mu$, zu einer Hyperbel, welche Fälle wir aus unseren Betrachtungen beständig ausschließen.

Eine unmittelbare Folgerung aus Gleichung (2) ist die, daß das Cartesische Oval zu derjenigen Kategorie von Kurven gehört, die gebildet wird von den Örtern der Punkte, deren Abstände von n festen Polen multipliziert mit beliebigen Konstanten, eine konstante Summe geben. Man erhält nun bekanntlich die Normale eines solchen Ortes im Punkte M, wenn man von M aus zu diesen Polen hin Strecken zeichnet, die jenen Konstanten proportional sind, und deren Resultierende konstruiert[1]). Insbesondere um für das Oval die Normale im Punkte M zu konstruieren, nehmen wir auf den Geraden MF und MG zwei Punkte P und Q derart, daß $\frac{MP}{\mu} = \frac{MQ}{\nu}$ und vervollständigen das Parallelogramm $PMQN$; seine Diagonale MN wird die Normale sein[2]). Wenn wir nun die Winkel FMN und GMN mit i und r bezeichnen, so haben wir $\frac{MP}{\sin r} = \frac{MQ}{\sin i}$, welche Gleichung mit der vorigen verglichen ergibt: $\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{\mu}{\nu} = \lambda$. Dies zeigt, daß, wenn ein Cartesisches Oval die Trennungslinie zweier Medien bildet, deren Brechungsindex gleich λ ist, ein von F ausgehendes Lichtstrahlenbüschel sich in ein Büschel von Strahlen verwandelt, die in G zusammenlaufen[3]); daher die Wichtigkeit der besprochenen Kurve für die Optik, und die Erklärung dafür, daß man die beiden Punkte F und G gewöhnlich die Brennpunkte nennt, sowie der Name aplanetische Linie (d. h. Linie ohne Abweichung), den man dieser Kurve gegeben hat.

79. Nehmen wir den Brennpunkt F als Pol, nennen h die Entfernung FG, und die Polarkoordinaten ϱ, ω, so nimmt (2) folgendes Aussehen an:

$$\mu\varrho + \nu\sqrt{\varrho^2 - 2\varrho h \cos\omega + h^2} = l,$$

oder

$$(\nu^2 - \mu^2)\,\varrho^2 + 2\varrho\,(\mu l - \nu^2 h \cos\omega) + \nu^2 h^2 - l^2 = 0. \quad . \quad . \quad (3)$$

In dem speziellen Falle, daß $\nu = \frac{l}{h}$, vereinfacht sich diese Gleichung

1) Poinsot, Journ. Ec. Polyt., XIII cah. 1806, S. 206. Vgl. G. Peano, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Torino, 1887) S. 140.

2) Eine andere Methode wurde von Fatio de Duillier 1687 angegeben: vgl. P. Serret, *Des méthodes en géométrie* (Paris, 1855) S. 51—57.

3) Zu denselben Schlüssen gelangte Frenet (*Recueil d'exercises sur le calcul infinitésimal*, 3. Aufl., Paris 1873, S. 221), indem er einige allgemeine Formeln anwandte; somit lieferte er analytisch, was Descartes synthetisch darlegte.

und wird $$\varrho = \frac{2hv^2}{v^2 - \mu^2}\cos\omega - \frac{2\mu l}{v^2 - \mu^2}$$

und, wegen Gleichung (3) in Nr. **70**, besagt diese Gleichung: **Die Pascalsche Schnecke ist ein spezielles Cartesisches Oval.**

An dieser Stelle dürfte es angebracht sein zu bemerken, daß Chasles glaubte eine geometrische Transformation gefunden zu haben, durch die ein Kreis in ein Cartesisches Oval übergehe[1]), während diese nur eine Pascalsche Schnecke gibt[2]). Wenn man nämlich auf den Kreis $\varrho^2 - 2a\varrho\cos\omega + b^2 = 0$ die durch die Formeln $\varrho = \sqrt{m\varrho_1}$, $\omega = \frac{\omega_1}{2}$ gekennzeichnete Transformation anwendet, so erhält man die Kurve mit der Gleichung:

$$[m^2(x^2+y^2) - 2ma^2x + b^4] - 4m^2(a^2-b^2)^2(x^2+y^2) = 0;$$

diese ist eine Schnecke mit dem Punkte $x = \frac{b^2}{m}$, $y = 0$ als Doppelpunkt. Wenn man dagegen auf die Schnecke mit der Gleichung

$$\varrho_1 = a + b\cos\omega_1$$

die Transformation $\omega = \omega_1$, $\varrho = \frac{\varrho_1 \pm \sqrt{\varrho_1{}^2 - c^2}}{2}$ anwendet, so erhält man die Kurve mit der Polargleichung:

$$\varrho^2 - \varrho(a + b\cos\omega) + \frac{c^2}{4} = 0,$$

und diese Kurve ist somit ein Cartesisches Oval[3]).

Die aus den vorhergehenden Betrachtungen sich ergebende Konstruktion der Ovale bietet ein erheblich geringeres Interesse, als eine andere, die wir nun darlegen wollen: Wenn a', b' die Koordinaten von F sind und a'', b'' die von G, so kann man Gleichung (2) schreiben

$$\mu\sqrt{(x-a')^2 + (y-b')^2} + \nu\sqrt{(x-a'')^2 + (y-b'')^2} = l; \quad (4)$$

nun ist es immer möglich, auf unendlich viele Weisen zwei Längen r' und r'' zu bestimmen derart, daß

$$\mu r' + \nu r'' = l.$$

Infolgedessen kann (4) geschrieben werden als

$$\frac{\sqrt{(x-a')^2 + (y-b')^2} - r'}{\sqrt{(x-a'')^2 + (y-b'')^2} - r''} = -\frac{\nu}{\mu}. \quad (5)$$

---

1) *Aperçu historique*, Note XXI.

2) Der Irrtum von Chasles wurde schon 1850 beseitigt von A. Cayley (*Addition au mémoire sur quelques transmutations des lignes courbes,* Journ. de Math. XV), und neuerdings von M. d'Ocagne (*Sur un mode de génération des ovales de Descartes* C. R. XCVII, 1883).

3) Cayley, *Note on the theorie of cartesians* (Quart. Journ. math. XV, 1878); vgl. auch den vorhergehenden Aufsatz desselben Verf. *On the mechanical description of a cartesian* (Das. XIII, 1875).

Nun gibt der Zähler auf der linken Seite den Abstand des Punktes (x, y) von dem Kreise Γ' mit dem Mittelpunkte (a', b') und dem Radius r' an; eine ähnliche Bedeutung hat der Nenner in bezug auf den Kreis Γ'' mit dem Zentrum (a'', b'') und dem Radius r''. Man folgert daraus, mit Newton: **Ein Cartesisches Oval kann als Ort der Punkte betrachtet werden, deren Abstände von zwei festen Kreisen in einem gegebenen Verhältnisse stehen**[1]).

Aus diesem Satze läßt sich eine andere von Chasles entdeckte Erzeugung ableiten, die durch folgenden Satz ausgedrückt wird: Gegeben zwei Kreise Γ' und Γ'' und ein Punkt O ihrer Zentrale $O'O''$. Läßt man um O eine Gerade t rotieren, welche die Peripherien in den Punkten P_1', P_2'; P_1'', P_2'' schneidet, so treffen sich die Radien $O'P_1'$ und $O'P_2'$ von Γ' mit den Radien $O''P_1''$ und $O''P_2''$ von Γ'' in vier Punkten M, deren Ort ein Cartesisches Oval ist. Betrachtet man nämlich das Dreieck $MO'O''$, das von der Geraden t in den Punkten O, P_1', P_1'' geschnitten wird, so ist $\frac{O'O}{O''O}\cdot\frac{O''P_1''}{MP_1''}\cdot\frac{MP_1'}{O'P_1'}=1$, und daher (wenn r', r'' die Radien der gegebenen Kreise sind) $\frac{MP_1'}{MP_1''}=\frac{O''O}{O'O}\cdot\frac{r'}{r''}=const.$; und diese Beziehung führt, auf Grund des Newtonschen Satzes, leicht zu dem Schlusse auf den Chaslesschen Satz. Dieser Satz, wenngleich nur ein Corollar des vorigen, ist nicht nur wichtig, weil er eine leichte Weise die Kurve punktweise zu zeichnen liefert, sondern auch weil er zu einer sehr guten Konstruktion der Tangente führt: schon Chasles machte die Bemerkung, daß die Tangente in M und die Tangenten an Γ' und Γ'' in den entsprechenden Punkten in ein und denselben Punkt zusammenlaufen. Aus demselben Satze kann man auch entnehmen, daß die vollständige Cartesische Kurve nicht aus einem einzigen Ovale besteht (wie Descartes und seine unmittelbaren Nachfolger glaubten), sondern, wie Chasles bemerkte, aus zwei konjugierten Ovalen, die keinen Punkt im Endlichen gemeinsam haben.

Die Gleichung (4) führt uns auch zu einer stereometrischen Erzeugung der betrachteten Kurve[2]). Betrachten wir nämlich zwei Rotationskegel mit parallelen Achsen, so kann man dieselben durch folgende Gleichungen dargestellt erhalten:

$$(x-a')^2+(y-b')^2=\frac{r'^2(h'-z)^2}{h'^2},$$

$$(x-a'')^2+(y-b'')^2=\frac{r''^2(h''-z)}{h''^2};$$

1) *Philosophiae naturalis Principia mathematica* Buch I, Satz XIV.

2) F. J. (Gabriel Marie), *Exercises de géométrie déscriptive* (3. Aufl. Tours et Paris, 1893) S. 693. Augenscheinlich ist diese Erzeugung ein Spezialfall der zu Anfang von Nr. 58 für alle elliptischen Kurven vierter Ordnung angegebenen.

die Projektion der Schnittlinie dieser beiden Oberflächen auf die xy-Ebene wird nun durch eine Gleichung dargestellt werden, die sich ergibt, wenn man aus den letzten Gleichungen z eliminiert; dies gibt:

$$h' - h'' = \frac{z'}{h'}\sqrt{(x-a')^2 + (y-b')^2} - \frac{z''}{h''}\sqrt{(x-a'')^2 + (y-b'')^2}.$$

Da nun diese Gleichung dieselbe Gestalt wie (4) hat, so schließt man: **Die Schnittlinie zweier Rotationskegel mit parallelen Achsen projiziert sich auf eine zu diesen Achsen senkrechte Ebene in ein Cartesisches Oval.**

Hieraus folgen zwei bequeme Verfahren die Cartesischen Ovale zu zeichnen. Man erhält sie durch Methoden, die uns die darstellende Geometrie lehrt für die punktweise Konstruktion der Horizontalprojektion des Schnittes a) zweier Kegel, b) zweier Rotationsflächen mit zueinander parallelen Achsen. Man erkennt leicht, daß die erste wiederum zu der von Chasles gefundenen Erzeugung der fraglichen Kurve führt.

Dies sind wohl die interessantesten, jedoch nicht die einzigen Arten, die aplanetischen Kurven zu erzeugen; wir können uns jedoch mit der Darlegung derselben nicht weiter aufhalten und verweisen den, der die übrigen kennen lernen will, auf die Note XXI des *Aperçu historique.*

80. Die interessantesten Eigenschaften der Cartesischen Ovale ergeben sich aus der Untersuchung ihres Verhaltens im Unendlichen. Um dieses zu bestimmen, nehmen wir wieder die Gleichung (4) und setzen der Einfachheit halber $a' = -a'' = a$, $b' = b'' = 0$; setzen wir ferner $x + iy = \frac{\xi}{\zeta}$, $x - iy = \frac{\eta}{\zeta}$, so wird diese

$$\mu\sqrt{(\xi - \alpha\zeta)(\eta - \alpha\zeta)} + \nu\sqrt{(\xi + \alpha\zeta)(\eta + \alpha\zeta)} = \zeta l,$$

oder, wenn wir die Wurzeln wegschaffen,

$$[\mu^2(\xi - \alpha\zeta)(\eta - \alpha\zeta) - \nu^2(\xi + \alpha\zeta)(\eta + \alpha\zeta)]^2$$
$$- 2l^2\zeta^2[\mu^2(\xi - \alpha\zeta)(\eta - \alpha\zeta) + \nu^2(\xi + \alpha\zeta)(\eta + \alpha\zeta)] + l^4\zeta^4 = 0. \quad (6)$$

Diese zeigt, daß die beiden Punkte ($\xi = 0$, $\zeta = 0$), ($\eta = 0$, $\zeta = 0$), d. h. die beiden zyklischen Punkte der Ebene Doppelpunkte der Kurve (6) sind. Die Tangenten in dem ersteren (in ξ, η, ζ ausgedrückt) werden gemeinsam durch die Gleichung

$$[\mu^2(\xi - \alpha\zeta) - \nu^2(\xi + \alpha\zeta)]^2 = 0$$

dargestellt, daher ist dieser Punkt eine Spitze[1]), und die Spitzen-

1) Diese wichtige Bemerkung rührt von Cayley her (s. die o. a. *Addition au mémoire sur quelques transmutations des lignes courbes*), der somit die Behauptung von Chasles, daß die zyklischen Punkte Doppelpunkte des Ovals seien, berichtigte. Infolgedessen ist es von der 6., nicht, wie der berühmte französische Geometer annahm, von der 8. Klasse.

tangente hat die Gleichung $\xi = \frac{\mu^2+\nu^2}{\mu^2-\nu^2} a \zeta$; in kartesischen Koordinaten dagegen wird sie durch $x + iy = \frac{\mu^2+\nu^2}{\mu^2-\nu^2} a$ wiedergegeben.

Ebenso ist der andere Kreispunkt auch eine Spitze und die kartesische Gleichung der zugehörigen Tangente $x - yi = \frac{\mu^2+\nu^2}{\mu^2-\nu^2} a$.

Die beiden so gefundenen Spitzentangenten schneiden sich in dem reellen Punkte mit den Koordinaten

$$x = \frac{\mu^2+\nu^2}{\mu^2-\nu^2} a, \quad y = 0; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

und dieser ist ein außerordentlicher mehrfacher Brennpunkt der Kurve.

Um die gewöhnlichen Brennpunkte zu finden, suchen wir diejenigen Tangenten auf, die sich von dem Punkte $\xi = 0$, $\zeta = 0$ an das Oval (6) ziehen lassen. Setzen wir zu dem Zwecke in Gleichung (6) $\zeta = k\xi$; die resultierende Gleichung ist teilbar durch ξ^2, und wir wählen k so, daß nach Abscheidung dieses Faktors man eine Gleichung in $\frac{\xi}{\zeta}$ mit einer zweifachen Wurzel hat. Damit dies eintrete, muß k der Bedingung genügen

$$(p^2 - q^2)(kl^2 + 2ap) = 0,$$

wo wir der Kürze wegen

$$\mu^2(1 - ak) - \nu^2(1 + ak) = p, \quad \mu^2(1 - ak) + \nu^2(1 + ak) = q$$

gesetzt haben. Nun zerfällt diese Gleichung in folgende drei

$$p - q = 0, \qquad p + q = 0, \qquad kl^2 + 2ap = 0,$$

welche für $\frac{1}{k}$ die drei Werte geben

$$a, \qquad -a, \qquad a\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu^2-\nu^2} - \frac{l^2}{2a}\frac{1}{\mu^2-\nu^2}.$$

Folglich kann man von dem zyklischen Punkte $\xi = 0$, $\zeta = 0$ an das Oval (6) drei Tangenten ziehen, die bzw. die drei Gleichungen haben

$$x + iy = a, \quad x + iy = -a, \quad x + iy = a\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu^2-\nu^2} - \frac{l^2}{2a}\frac{1}{\mu^2-\nu^2};$$

ebenso sind

$$x - iy = a, \quad x - iy = -a, \quad x - iy = a\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu^2-\nu^2} - \frac{l^2}{2a}\frac{1}{\mu^2-\nu^2}$$

die Tangenten von dem anderen zyklischen Punkte. Es folgt daraus, daß die Kurve als Brennpunkte die folgenden drei Punkte besitzt

$$x = a,\ y = 0; \quad x = -a,\ y = 0; \quad x = a\frac{\mu^2+\nu^2}{\mu^2-\nu^2} - \frac{l^2}{2a}\frac{1}{\mu^2-\nu^2},\ y = 0. \quad (8)$$

Die beiden ersten sind nichts weiter als die Fundamentalpunkte F und G, die daher nicht nur Brennpunkte im optischen, sondern auch im Plückerschen Sinne sind; der dritte ist ein neuer

Brennpunkt H, auf den M. Chasles zuerst die Geometer aufmerksam gemacht hat[1]), der jedoch auch nicht dem Scharfsinne Descartes entgangen zu sein scheint[2]). Wir wollen nun zeigen, daß sich die Kurve in bezug auf ihre drei Brennpunkte ganz gleichartig verhält. Zu dem Zwecke nehmen wir eine Koordinatenverschiebung vor, indem wir als neuen Anfangspunkt den singulären Brennpunkt der Kurve nehmen; in bezug auf diesen haben die Punkte F, G, H als Koordinaten bzw.

$$\alpha = -\frac{2a\nu^2}{\mu^2-\nu^2}, \quad \beta = -\frac{2a\mu^2}{\mu^2-\nu^2}, \quad \gamma = -\frac{l^2}{2a}\frac{1}{\mu^2-\nu^2}.$$

Beachten wir nun, daß

$$\alpha+\beta+\gamma = -\frac{4a^2(\mu^2+\nu^2)+l^2}{2a(\mu^2-\nu^2)},$$

$$\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta = \frac{4a^2\mu^2\nu^2+l^2(\mu^2+\nu^2)}{(\mu^2-\nu^2)^2},$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{2al^2\mu^2\nu^2}{(\mu^2-\nu^2)^3},$$

so erhält man als neue Gleichung des Ovals die folgende:

$$[x^2+y^2-(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)]^2+4\alpha\beta\gamma\,[2x-(\alpha+\beta+\gamma)]=0 \text{ [3])} \qquad (9)$$

deren vollständige Symmetrie in bezug auf die Konstanten α, β, γ das behauptete gleichartige Verhalten der Kurve in bezug auf die drei Brennpunkte beweist.

Eine unmittelbare Folgerung aus dieser Tatsache ist, daß für alle Punkte M des Ovals wir noch zwei andere ähnliche Beziehungen wie (2) haben, nämlich folgender Art:

$$\mu'\cdot MG+\nu'\cdot MH=l' \qquad \mu''\cdot MH+\nu''\cdot MF=l'';$$

jede dieser Beziehungen mit (2) kombiniert zeigt, **daß zwischen den Abständen eines Punktes M eines Cartesischen Ovals von den drei Brennpunkten F, G, H eine homogene Relation mit konstanten Koeffizienten besteht von folgendem Typus:**

$$f\cdot MF+g\cdot MG+h\cdot MH=0.\text{[4])}$$

---

1) *Aperçu historique*, Note XXI.

2) Vgl. P. Tannery, *Les excerpta ex M. S. S. R. Descartes* (Abh. zur Geschichte der Mathematik IX, 1898, S. 509). — Es soll hier noch hervorgehoben werden, daß die betrachtete Kurve außerhalb ihrer Ebene unzählig viele Brennpunkte besitzt, die eine Kurve dritter Ordnung, welche in der durch die Gerade FGH senkrecht zur Ebene des Ovals gehenden Ebene liegt, ausfüllen (s. G. Darboux, *Théorèmes sur l'intersection d'une sphère et d'une surface du second ordre,* Nouv. Ann. Math. 2e Sér. III, 1864).

3) Panton, *The educational Times,* Question 2622.

4) Die Koeffizienten f, g, h werden als Funktion von α, β, γ folgendermaßen ausgedrückt

$$f=(\beta-\gamma)\sqrt{\alpha}, \quad g=(\gamma-\alpha)\sqrt{\beta}, \quad h=(\alpha-\beta)\sqrt{\gamma}.$$

81. Aber auch die Gleichung (9) kann sehr bequem zur Untersuchung des Cartesischen Ovals verwendet werden. Sie läßt z. B. erkennen, daß $x = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$ die Gleichung der einzigen Doppeltangente ist, welche die Kurve besitzt und daß die zugehörigen Berührungspunkte auf dem Kreise $x^2 + y^2 = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta$ liegen. Sie läßt ferner erkennen, daß man, um die Tangenten einer bestimmten Richtung an die Kurve (9) zu finden, diese mit folgender Gleichung kombinieren muß:

$$\frac{[x^2 + y^2 - (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)]\, x + 2\alpha\beta\gamma}{[x^2 + y^2 - (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)]\, y} = \tau, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

wo τ eine gegebene Konstante ist. Nun sind die beiden Gleichungen (9), (10) äquivalent mit folgenden

$$2\alpha\beta\gamma - (\tau y - x)\,[x^2 + y^2 - (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)] = 0,$$
$$\alpha\beta\gamma + (\tau y - x)^2\,[2x - (\alpha + \beta + \gamma)] = 0;$$

und da aus diesen die neue Gleichung

$$2\,(\tau y - x)\,[2x - (\alpha + \beta + \gamma)] + x^2 + y^2 - (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = 0 \quad (11)$$

hervorgeht, so **liegen die Berührungspunkte der sechs zu einer bestimmten Richtung parallelen Tangenten eines Cartesischen Ovals auf einem Kegelschnitte.** — Man beachte ferner, daß τ in (11) linear auftritt, und so ersieht man, daß die ∞^1 durch (11) dargestellten Kegelschnitte ein Büschel bilden, dessen Grundpunkte die Schnitte der Hyperbel

$$3x^2 - y^2 - 2\,(\alpha + \beta + \gamma)\,x + (\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = 0$$

mit den beiden Geraden

$$y = 0 \quad \text{und} \quad x = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$$

sind. Die Gleichung (9) führt uns schließlich noch zu einer wichtigen Folgerung. Wenn α, β, γ die Wurzeln der Gleichung sind

$$\omega^3 - p_1\omega^2 + p_2\omega - p_3 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

so läßt sich (9) schreiben

$$(x^2 + y^2 - p_2)^2 - 4p_3\,(2x - p_2) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9')$$

vorausgesetzt also, daß (12) drei reelle Wurzeln ω hat, so stellt (9′) ein Cartesisches Oval dar; läßt man jedoch diese Voraussetzung fallen und nimmt bloß an, daß die Zahlen p_1, p_2, p_3 reell sind, so stellt die Gleichung (9) eine noch allgemeinere reelle Kurve

---

Die oben gefundene trinomische Gleichung kann für eine mechanische Zeichnung des Ovals verwendet werden (Zeuthen, *Om mekanisk konstruktion af Descartes ovaler ved Hjälf af Snore; Tidsskrift Mathem.*, 4. Ser., VI, 1882); für andere Zwecke findet man dieselbe wieder im Aufsatze von J. de Vries, *Recherches sur les coordonnées multipolaires* (Archives Teyler, 2e Sér. V, 1896).

vierter Ordnung dar; man hat sie, die Salmonsche Bezeichnung adoptierend, eine Cartesische Kurve genannt. Von den drei in gerader Linie liegenden Brennpunkten, die eine solche Kurve besitzt, ist einer reell und die beiden anderen konjugiert imaginär.

Man begegnet den Cartesischen Ovalen wie den Cartesischen Kurven auch in der Theorie der ebenen isogonalen Transformationen; setzt man nämlich

$$u + iv = \wp(x + yi),$$

so entsprechen den Geraden $u = Const.$, oder $y = Const.$ der Ebene xy Kurven der genannten Art in der Ebene uv.[1])

Kehren wir noch ein letztes Mal zum Cartesischen Oval zurück, um noch folgende drei Sätze zum Schlusse anzuführen:

1. Ein Cartesisches Oval besitzt acht Wendepunkte, die auf einer zirkularen Kurve dritter Ordnung liegen.[2])
2. Die Summe der Flächen der beiden konjugierten Ovale ist gleich dem doppelten Inhalt desjenigen Kreises, der den dreifachen Brennpunkt zum Zentrum hat und durch die Berührungspunkte der Doppeltangente der Kurve geht.[3])
3. Ein beliebiger Bogen des Cartesischen Ovals ist gleich der Summe dreier Ellipsenbögen.[4])

Zehntes Kapitel.

Einige symmetrische Polyzomalkurven vierter Ordnung.

82. Wenn $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ die Gleichungen dreier Kegelschnitte in kartesischen Koordinaten sind, so stellt die Gleichung

$$\sqrt{f_1} + \sqrt{f_2} + \sqrt{f_3} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

wo die Wurzeln immer mit beiden Vorzeichen genommen werden sollen, eine Kurve vierter Ordnung dar; denn, wenn man die Gleichung (1) rational macht, so wird sie zu

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 - 2f_2f_3 - 2f_3f_1 - 2f_2f_1 = 0.$$

---

1) E. Haentschel, *Über das cartesische Oval* (Arch. Math. Phys., 69, 1883) und *Über ein orthogonales System von bizikularen Kurven vierter Ordnung* (Progr. Berlin 1908).

2) S. Roberts, *On the ovals of Descartes* (Proc. London math. Soc. III, 1869—71).

3) Panton, *The educational Times*, Question 4297.

4) Dieser Satz wurde von A. Genocchi in der Zeitschrift *Il cimento* v. 15. Okt. 1855 veröffentlicht (vgl. *Resumé de différentes recherches sur les ovales de Descartes et quelques autres courbes*, Mathésis IV, 1884) und ziemlich später wieder gefunden von G. Darboux (*Sur la rectification des ovales de Descartes.* C. R. LXXXVII, 1878).

Diese Kurve gehört, wie übrigens jede Kurve vierter Ordnung[1]) zur Klasse der Polyzomalkurven, von denen wir in ihrer Allgemeinheit im 6. Kap. des V. Abschn. handeln werden. Wenn im besonderen f_1 und f_2 quadratische Funktionen nur von x sind und $f_3 = y^2$ ist, so gilt dasselbe von den Kurven mit der Gleichung

$$y = \sqrt{f_1} + \sqrt{f_2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

bei welchen es sich lohnt zu verweilen, da sich unter diesen einige spezielle Kurven finden, die aus verschiedenen Gründen bemerkenswert sind.

Welcher Art auch die durch f_1 und f_2 dargestellten quadratischen Funktionen von x sein mögen, die Gleichung (2) stellt immer eine Kurve vierter Ordnung dar, die symmetrisch zur x-Achse ist. Umgekehrt gehört aber nicht jede derartig symmetrische Kurve zu der Klasse, die (2) zur allgemeinen Gleichung haben. Die allgemeine Gleichung einer Kurve vierter Ordnung, die symmetrisch zur x-Achse ist, lautet nämlich

$$y^4 + y^2\varphi + \psi = 0,$$

wo φ und ψ Funktionen 2ten bzw. 4ten Grades von x sind. Nun folgt aus dieser Gleichung:

$$y = \sqrt{\frac{-\varphi + \sqrt{\varphi^2 - 4\psi}}{2}},$$

oder auch

$$y = \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{2}\sqrt{\psi}} + \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{2}\sqrt{\psi}};$$

damit diese letztere aber die Form (2) habe, ist notwendig und hinreichend, daß ψ das Quadrat einer quadratischen Funktion χ von x ist. Wir schließen demnach, daß

$$y^4 + y^2\varphi + \chi^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

oder

$$y = \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{2}\chi} + \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi - \frac{1}{2}\chi} \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

eine, in bezug auf die x-Achse symmetrische Polyzomalkurve vierter Ordnung darstellt, welcher Art auch die quadratischen Funktionen φ und χ von x sein mögen. Sind α und β die Wurzeln der Gleichung $\chi = 0$, so hat die Kurve die Punkte $(x = \alpha,\ y = 0)$ und $(x = \beta,\ y = 0)$ als Doppelpunkte; einer derselben

---

1) Da man die Gleichung einer solchen Kurve immer folgendermaßen schreiben kann

$$\sqrt{t_1 t_2} + \sqrt{t_3 t_4} + \sqrt{t_5 t_6} = 0,$$

wo $t_i = 0$ $(i = 1, \ldots, 6)$ die Gleichungen von sechs Doppeltangenten einer Steinerschen Gruppe sind; vgl. H. Weber, *Lehrbuch der Algebra II* (Braunschweig, 1899) S. 429.

liegt im Unendlichen, wenn die Funktion χ auf den ersten Grad herabgeht; außerhalb der Achse hat die Kurve keine singulären Punkte, daher, wenn sie rational ist, muß einer derselben ein Berührungsknoten (Berührungspunkt zweier Kurvenzweige) sein, insbesondere tritt dieser Umstand ein, wenn φ und χ Funktionen in x von niederem Grade als 2 sind.

Die Umformung der Gleichung (3) in (3′) ist oft nützlich; zunächst vor allem führt sie zu einer Konstruktion der Kurve vermittels der beiden Kegelschnitte

$$y_1 = \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{2}\chi}, \quad y_2 = \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi - \frac{1}{2}\chi},$$

indem sich ergibt $y = y_1 + y_2$; zweitens führt sie zur Quadratur der Kurve, indem man hat

$$\int y \cdot dx = \int dx \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{2}\chi} + \int dx \sqrt{-\frac{1}{4}\varphi - \frac{1}{2}\chi},$$

und die beiden Integrale auf der rechten Seite sich in bekannter Weise berechnen lassen. Die Nützlichkeit der Bildung der Form (3′) der Gleichung (3) wurde von Jakob Bernoulli[1]) angegeben für einen Spezialfall, in welchem es ihm gelang eine von Leibniz[2]) gestellte Aufgabe zu lösen, nämlich die Quadratur der Kurve mit der Gleichung

$$y^4 - 6a^2y^2 + 4x^2y^2 + a^4 = 0. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Diese ist in der Tat vom Typus (3) und kann auch geschrieben werden

$$y = \sqrt{2a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Die Untersuchung dieser neuen Gleichung gibt folgende Konstruktion der Kurve, die man dem eben genannten Bernoulli verdankt: Gegeben ein Quadrat $OACB$ (Taf. V, Fig. 36) mit der Seite a; man beschreibe zwei Kreise um den gemeinsamen Mittelpunkt O, die die Seite bzw. die Diagonale des Quadrates zum Radius haben; eine Parallele zu OB schneide die beiden Kreise und die Gerade OA in den Punkten L, M, Q; man trage auf ihr $QP = LM$ ab. Der Ort des Punktes P in bezug auf die Geraden OA und OB als Koordinatachsen, wird dann durch obige Gleichung dargestellt. Er besteht aus zwei verschiedenen Blättern, die zueinander symmetrisch sind in bezug auf OA und beide symmetrisch in bezug auf BO. Die innerhalb des Winkels AOB gelegene Fläche des halben Blattes, wenn man alle Wurzeln positiv nimmt, wird gemessen durch

1) *Acta eruditorum*, 1687, S. 525.
2) *Leibniz* ed. Gerhardt, III (Halle 1855, S. 39), Brief v. 4. März 1696.

$$\int_0^a (\sqrt{2a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2})\, dx - \int_0^a (\sqrt{2a^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - x^2})\, dx$$
$$= 2\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi a^2}{2};$$

somit ist die Fläche eines jeden Blattes gleich dem Inhalte des kleineren der beiden obengenannten Kreise, beide Blätter zusammen sind gleich dem des größeren.

83. Die vornehmsten Kurven vierter Ordnung, die in dieses Kapitel gehören, sind diejenigen, die der Pater Gregorius a Sancto Vincentio im X. Teile seines umfangreichen *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* (Antwerpiae 1647) behandelt hat. Folgende ist die wörtliche Definition, die er (S. 840) dafür gegeben hat: „Parabolam virtualem voco, cujus ordinatim applicatae, si ad rectam lineam ponantur, aut a recta linea dividantur bifariam, veram producunt parabolam. Porro illam pleraeque virtualem habet proprietatem, ut linea bisecans ordinatim in illis applicata non vera sit parabola, sed inversa.“ Der Verfasser hat zu dieser Definition eine unumgänglich notwendige Ergänzung gegeben, indem er nicht weniger als sechs Methoden angegeben hat die Kurven zu zeichnen; wir werden darüber berichten, ferner die Gleichungen der entsprechenden Kurven geben und einige Folgerungen ziehen, die sich daraus ergeben:

I. Gegeben ein Kreis mit dem Zentrum H und dem Durchmesser d, sowie ein bestimmter Durchmesser desselben AC (s. Taf. V, Fig. 37); man ziehe durch A eine beliebige Sehne AG, dann von G die Parallele zum Durchmesser AG, welche die Tangente des Kreises in A im Punkte E trifft und nehme auf ihr $EP = GC$. Der Ort von P wird eine virtuelle Parabel sein.[1])

Nimmt man A als Koordinatenursprung und den Durchmesser AC als y-Achse, so sieht man sogleich, daß der Ort von P folgender parametrischer Darstellung fähig ist $x = d \sin\omega \cdot \cos\omega$, $y = d\cos\omega$; eliminieren wir ω, so ergibt sich die Gleichung des Ortes selbst, nämlich

$$d^2(y^2 - x^2) = y^4 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

oder auch

$$y = \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{dx}{2}} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{dx}{4}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5')$$

Die so erhaltene Kurve findet sich wieder in der *Introduction* von G. Cramer (S. 470), wo auch eine Anwendung derselben angeführt ist (das. S. 496); es ist jedoch nicht angegeben, daß die Erfindung derselben G. a S^to^ Vincentio zukommt. Sie findet sich dann noch in der *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geo-*

---

1) *Opus geometricum*, Prop. CCXVI (II. Bd., S. 482).

metrie der Ebene von Magnus (Berlin 1833, S. 286), wo die Kurve in folgender Weise konstruiert wird: „Gegeben ein Kreis mit dem Zentrum O, dem Radius a und dem Durchmesser AB; von einem beliebigen Punkte M seiner Peripherie aus ziehe man MN senkrecht zu AB, dann von N das Lot NQ auf den Radius OM und trage dann auf NM, $NP = NQ$ ab." Der Ort von P hat dann als Gleichung $a^2y^2 + x^4 = a^2x^2$; er ist also eine virtuelle Parabel, die sich von (5) nur durch die Vertauschung der Achsen und die Konstantenbezeichnung unterscheidet[1]). Magnus bemerkt dazu: „die Kurve hat eine der Lemniskate ähnliche Gestalt", während Schlömich[2]) sagt, nachdem er die vorige Konstruktion angegeben hat, „die Kurve hat die Form einer Schleife (∞)". Diese Bemerkungen stimmen mit folgenden beiden Tatsachen überein: die eine, daß die durch die Gleichung $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ dargestellte Kurve von Montferrier Lemniskate genannt worden ist[3]), die andere, daß ein neuerer Bearbeiter, zum Unterschiede von einer berühmten Kurve, von der wir später (in Nr. **93**) handeln werden, sie Lemniskate des Gerono[4]) nannte; in Frankreich heißt sie öfters Huit (Achterkurve)[5]).

Es ist nicht unwichtig zu bemerken, daß in dem Briefwechsel zwischen C. Huygens und R. de Sluse[6]) häufig von der virtuellen Parabel die Rede ist, daß jedoch daselbst dieser Name einer allgemeineren Kurve erteilt wird, nämlich allen denjenigen, die eine Gleichung von folgendem Typus haben

$$(a^2 - x^2)\,x^2 = b^2y^2,^{7)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

oder

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{by}{2}} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{by}{2}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6')$$

Beachten wir, daß die Gleichung (6) durch folgende beiden ersetzt werden kann

1) Dieselbe Kurve wurde neuerdings u. a. von P. H. Schoute erhalten (*Sur la construction des courbes unicursales par points et tangentes,* Archives néerlandaises XX, S. 40 des Auszuges) durch Anwendung einer speziellen Maclaurinschen Transformation (Nr. **48**).

2) *Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis.* I. T. (3. Aufl., Leipzig 1878) S. 87.

3) *Dictionnaire des sciences mathématiques* (Bruxelles, 1838) S. 170.

4) Vgl. *Intermédiaire* IV, 1897, S. 98, 190 u. 285.

5) Aubry, *De l'usage des figures de l'espace pour la définition et la transformation de certaines courbes* (Journ. math. spéc. 4e Ser. IV, 1895) S. 267. *Exercises de géométrie descriptive* par F. J. (Gabriel-Marie) 3. Aufl. S. 397, 649, 669, 702, 712.

6) Um die bezügl. Stellen zu finden, sehe man nach im Inhaltsverzeichnis der *Œuvres de Huygens.*

7) Diese Gleichung in Worten ausgedrückt steht im Briefe von R. de Sluse v. 19. Okt. 1657 (*Œuvres de Huygens* II, 1889, S. 70); sie beweist, daß es sich um eine Kurve handelt, die zur Lemniskate von Gerono affin ist.

$$x = a \cdot \cos \varphi\,, \qquad y = \frac{a^2}{2b} \sin 2\varphi\,,$$

so ist klar, daß die betrachteten Kurven in folgender Weise konstruiert werden können: „Man beschreibe um den Anfangspunkt als gemeinsames Zentrum zwei Kreise mit den Radien a und $\frac{a^2}{2b}$; in dem ersteren ziehe man einen Radius OA, der mit Ox den beliebigen Winkel φ bildet, und im zweiten den Radius OB, der mit derselben den Winkel 2φ bildet; die durch A zu Oy gezogene Parallele schneide die durch B zu Ox in einem Punkte P, dessen Ort durch die Gleichung (6) dargestellt wird". Die Kurve hat im Koordinatenanfang einen doppelten Inflexionsknoten und schneidet die x-Achse in den Endpunkten des Durchmessers des ersten Kreises; der unendlich ferne Punkt von Oy ist ein Berührungsknoten mit der unendlich fernen Geraden als zugehöriger Tangente. Die Tangenten an den zweiten Kreis parallel zu Ox sind Doppeltangenten; sie begrenzen zugleich mit denen des ersten Kreises die parallel zu Oy ein Rechteck, dessen Inhalt

$$R = 2a\frac{a^2}{b} = \frac{2a^3}{b}\,.$$

Bezeichnet man nun mit A die Gesamtfläche der Kurve, so ist

$$\frac{1}{4}A = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} y\,dx = \frac{a^3}{2b}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi$$

$$= \frac{a^3}{b}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cdot d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi \cdot d\varphi\right) = \frac{a^3}{b}\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{a^3}{3b}\,,$$

und daher ist $A = \frac{2}{3} \cdot \frac{2a^3}{3b} = \frac{2}{3}R$, eine bemerkenswerte von de Sluse entdeckte Beziehung[1]). — Aus (6) ergibt sich ferner

$$y - x\frac{dy}{dx} = \frac{x^4}{b^2 y}\,, \qquad \qquad (7)$$

daher hat die von de Sluse untersuchte Kurve folgende Eigenschaft: „Die Strecke zwischen dem Anfang und demjenigen Punkte der x-Achse, in welchem sie von der Tangente im Punkte (x, y) geschnitten wird, wird durch den Ausdruck $\frac{x^4}{b^2 y}$ ausgedrückt". Umgekehrt, integrieren wir die letzte Gleichung, so erhalten wir alle Kurven, die eine derartige Eigenschaft haben; setzen wir nun $y = tx$, so läßt sich die Integration leicht ausführen und führt zurück zur Gleichung (6): also sind die von de Sluse betrachteten Kurven nichts anderes, als die

1) S. den auf vor. S. Note 7 zitierten Brief.

Integralkurven von (7); von diesem Standpunkte aus wurden sie neuerdings von Schneider[1]) betrachtet, der außerdem die Rektifikation derselben durch elliptische Integrale ausführte; in speziellen Fällen läßt sich diese Aufgabe auch elementar lösen[2]).

II. Es seien zwei Kreise gegeben (Taf. V, Fig. 38), der kleinere hat als Durchmesser eine Sehne AC des größeren; eine beliebige Sehne AB des größeren Kreises schneide die Peripherie des kleineren weiterhin in D, von D ziehe man DE senkrecht auf AC und trage auf dieser die Strecke $EP = AB$ ab; der Ort der Punkte P ist eine virtuelle Parabel[3]).

Nimmt man die Gerade AC als x-Achse, ihre Mittelsenkrechte zur y-Achse, und nennt φ den von der veränderlichen Sehne mit der festen gebildeten Winkel, so findet man

$$x = 2a\cos^2\varphi, \qquad y = 2(a\cos\varphi + b\sin\varphi),$$

und demnach nach Elimination von φ

$$y = \sqrt{2ax} + \sqrt{4b^2 - \frac{2b^2}{a}x}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

welches die Gleichung der Kurve ist; sie ist rational; der Punkt $x = \frac{2ab^2}{a^2+b^2}$, $y = 0$ ist Doppelpunkt derselben; der unendlich ferne Punkt von Ox ist ein Berührungsknoten.

III. Gegeben ein Kreis mit dem Zentrum C (Taf. V, Fig. 39) ein Punkt A seiner Peripherie und eine durch A gehende Gerade g. Man ziehe durch A eine beliebige Kreissehne AG, ferner GH senkrecht zu g, auf dieser nehme man die Strecke $HP = AG$; der Ort der Punkte P ist eine virtuelle Parabel[4]).

Nimmt man die Gerade g als x-Achse, und das von C auf diese gefällte Lot als y-Achse, nennt r den Radius des Kreises, 2φ den variabelen Winkel ACG und α den gegebenen Winkel ACO, so findet man leicht:

$$x = r\sin\alpha + 2r\sin\varphi \cdot \cos(\alpha - \varphi), \qquad y = 2r\sin\varphi.$$

---

1) S. die Schrift *Über eine der Lemniskate der Gestalt nach ähnliche Kurve* (Progr. Elbing, 1874).

2) Dies trifft z. B. ein für die Kurve $8a^2y^2 = x^2(a^2 - 2x^2)$ (*The educational Times* LXV, 1897, Qnest. 13168). Diese ist nämlich folgender parametrischer Darstellung fähig $x = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin\varphi$, $y = \frac{a}{8}\sin 2\varphi$; daher ist $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{a}{4}(\cos 2\varphi + 2)$ und $s = \frac{a \cdot \sin 2\varphi}{8} + \frac{a \cdot \varphi}{2}$ ohne Hinzufügung der Konstanten, indem man $s = 0$ für $\varphi = 0$ setzt. Im Speziellen, setzt man $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so ergibt sich $\frac{\pi a}{4}$ für die Länge des vierten Teils der ganzen Kurve.

3) *Opus geometricum.* Theor. CCXX (II. Bd., S. 845).

4) *Opus geometricum.* Theor. CCXXII (II. Bd., S. 846).

Nach Elimination von φ ergibt sich dann, daß

$$\left.\begin{aligned}\frac{y}{r} = \sqrt{\cos^2\alpha - \frac{(1-\sin\alpha)\,(x - r\sin\alpha)}{r}}\\ + \sqrt{\cos^2\alpha - \frac{(1+\sin\alpha)\,(x - r\sin\alpha)}{r}}\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (9)$$

die Gleichung der Kurve ist. Diese ist rational, hat A als Doppelpunkt und den unendlich fernen Punkt von Ox als Berührungsknoten.

IV. Gegeben ein Kreis mit dem Durchmesser CD und ein Punkt A seiner Peripherie; man ziehe eine beliebige Sehne AB (s. Taf. V, Fig. 40) und trage auf der durch B zu CD gezogenen Senkrechten die Strecke $PP' = AB$ ab, derart, daß sie von dem Durchmesser CD halbiert wird; der Ort der Punkte P, P' ist eine virtuelle Parabel[1]).

Nehmen wir den Mittelpunkt O des gegebenen Kreises als Anfang, den gegebenen Durchmesser als x-Achse und nennen r den Radius des Kreises, α und 2φ die Winkel AOC und AOB, so findet man alsbald $x = r \cdot \cos(\alpha - 2\varphi)$, $y = r \cdot \sin\varphi$, und demnach durch Elimination von φ

$$\sqrt{2}\,\frac{y}{r} = \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{r^2 + rx} + \cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{r^2 - rx}. \quad \ldots \quad (10)$$

Die so dargestellte Kurve ist augenscheinlich von derselben Art wie die vorhergehende.

V. Gegeben zwei Kreise mit dem gemeinsamen Zentrum O (Taf. V, Fig. 41) und einem Durchmesser DF des größeren, eine beliebige Sehne DE des größeren schneide den kleineren in B; zieht man EG senkrecht zu DF und trägt das Stück $GP = BE$ auf GE ab, so ist der Ort der Punkte P eine virtuelle Parabel[2]).

Sind R und r die Radien der beiden Kreise und φ der Winkel EDF, und nimmt man D als Anfang, DF als x-Achse, so findet man leicht:

$$x = 2R\cos^2\varphi, \quad y = R\cos\varphi + \sqrt{r^2 - R^2\sin^2\varphi} \quad . \; . \quad (11)$$

und nach Elimination von φ

$$y = \sqrt{\frac{Rx}{2}} + \sqrt{\frac{Rx}{2} + r^2 - R^2} \ldots \ldots \quad (12)$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Kurve durch Addition entsprechender Ordinaten der beiden Parabeln $y^2 = \frac{Rx}{2}$, $y^2 = \frac{Rx}{2} + r^2 - R^2$ konstruiert werden kann. Diese Bemerkung ist wichtig, indem die von G. a Sancto Vincentio angegebene Konstruktion nur einen Zug der Kurve liefert, während doch diese sich ins Unendliche erstreckt; diese neue

1) Das. Theor. CCXXIV (II, S. 847).
2) Das. Theor. CCXXIX (II, S. 852).

Erzeugung hingegen liefert alle Punkte der Kurve, die im Unendlichen auf der x-Achse einen dreifachen Punkt hat; diese Achse doppelt gezählt und die unendlich ferne Gerade sind die zugehörigen Tangenten.

VI. Gegeben zwei Kreise mit den beiden Durchmessern AC und DF auf derselben Geraden (s. Taf. V, Fig. 42); eine beliebige Sehne DE des einen schneide den anderen in B; von E ziehe man EG senkrecht zu DF, auf welcher man $GP = BE$ abträgt. Der Ort der Punkte P ist eine virtuelle Parabel[1]).

Die Konstruktion ist offenbar eine Verallgemeinerung der vorhergehenden. Die Gleichung der entsprechenden Kurve erhält man mit denselben Achsen und Bezeichnungen wie bei der ersteren in der Form

$$y + (d - 2R)\sqrt{\frac{x}{2R}} + \sqrt{\frac{d^2 x}{2R} + r^2} = d^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

wo d die Abszisse des Mittelpunktes von AC ist. Auch für die Konstruktion dieser Kurve kann die Verwendung zweier Parabeln dienlich sein; der unendlich ferne Punkt der Abszissenachse ist Berührungsknoten, und der mit der Abszisse $\frac{d^2 - r^2}{2(d - R)}$ ist Doppelpunkt.

84. Die virtuellen Parabeln erlangten keine sonderliche Berühmtheit, wahrscheinlich weil sie von einem Mathematiker erdacht worden sind, dessen Ruhm durch unglückliche Versuche den Kreis zu quadrieren, befleckt war. Aber man begegnet ihnen, oder wenigstens einigen verwandten polyzomalen symmetrischen Kurven vierter Ordnung, die sich auf andere als die oben aufgeführten sechs Arten erzeugen lassen, im Verlaufe von Untersuchungen oder in Arbeiten, die, wie wir zeigen werden, beachtenswert sind.

a) C. Huygens hat zuerst dem berüchtigten Fatio de Duiller und dann dem Leibniz[2]) die Aufsuchung derjenigen Kurve aufgegeben, deren Subtangente durch $\frac{y^2\sqrt{a^2 - x^2}}{ax}$ ausgedrückt wird. Dieses Problem ist gleichbedeutend mit der Integration der Differentialgleichung

$$-y\frac{dx}{dy} = \frac{y^2\sqrt{a^2 - x^2}}{ax};$$

nun lassen sich in dieser die Variabeln sogleich trennen, und man findet dann als allgemeine Gleichung der gesuchten Kurven

$$a^2 - x^2 = \left(\frac{y^2 - \varepsilon k^2}{2a}\right)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ bedeutet, und k^2 die durch die Integration eingeführte Konstante ist. Es gibt demnach unzählige Kurven, die die Aufgabe

1) *Opus geometricum.* Theor. CCXXX (II, S. 853).
2) Brief vom 23. Febr. 1601, *Leibniz* ed. Gerhardt. II S. 82.

lösen; dies bemerkte Leibniz[1]), welcher die Aufmerksamkeit seines Korrespondenten auf zwei Fälle lenkte: $k = 0$ und $k = 2a$, $\varepsilon = -1$. Ein anderer bemerkenswerter Fall wird erhalten, wenn man beachtet, daß die Gleichung (14) oder

$$y^4 + 2\varepsilon k^2 y^2 + 4a^2x^2 - 4a^4 + k^4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14')$$

nur dann einer symmetrischen Polyzomalkurve vierter Ordnung angehört, wenn $k^2 = 2a^2$; nehmen wir dann $\varepsilon = -1$, um eine reelle Kurve zu erhalten, so bekommt (14′) die Gestalt:

$$y = \sqrt{a^2 + ax} + \sqrt{a^2 - ax}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14'')$$

deren Verwandtschaft mit (12) und (13) nicht hervorgehoben zu werden braucht. Schreiben wir sie folgendermaßen

$$y\sqrt{2} = \sqrt{2a(a+x)} + \sqrt{2a(a-x)},$$

so erkennt man: Wird ein Kreis um O mit dem Durchmesser $AA' = 2a$ beschrieben und ein Punkt M auf seiner Peripherie angenommen, so hat man, wenn N der Fußpunkt des von M auf AA' gefällten Lotes ist und $ON = x$,

$$AM + A'M = \sqrt{2a(a+x)} + \sqrt{2a(a-x)},$$

und daher stimmt die Kurve $y = AM + A'M$ nicht mit (14″) überein — wie Huygens angegeben hat[2]) — aber dennoch ist sie mit ihr affin.

b) Auf eine spezielle virtuelle Parabel führt auch ein anderes Problem, das ebenfalls von Huygens gestellt wurde[3]): Die Kurve zu bestimmen, deren Subtangente durch $\frac{y^2}{2x} - 2x$ ausgedrückt wird (vgl. die Fußnote 1 auf Seite 96). Je nach dem Vorzeichen, welches man der Subtangente erteilt, führt dies Problem zu einer der folgenden Differentialgleichungen

$$(y^2 - 4x^2)\,dy + 2xy\,dx = 0, \qquad (y^2 - 4x^2)\,dx - 2xy\,dx = 0;$$

beide sind homogen, lassen sich daher leicht integrieren und geben

$$y^4 = c^2(y^2 - 2x^2) \quad . \quad . \quad (15) \qquad y^6 = c^6 + 6x^2y^4, \quad . \quad . \quad (16)$$

welche Gleichungen von den beiden oben genannten Geometern erhalten wurden. Die erste dieser beiden, wenn man x und y vertauscht, gehört zum Typus von (6); schreibt man sie

$$y = \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{cx}{\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{cx}{\sqrt{2}}},$$

so ist die Analogie mit den durch Gleichung (12) und (13) darge-

1) Briefe an *Huygens* v. 20./30. Febr. und 10./20 Apr. 1691 (Das. S. 83 u. 90).
2) Brief an *Leibniz* v. 26. März 1691 (Das. S. 86).
3) Desgl. v. 24. Aug. 1690 (Das. S. 46).

stellten Kurven offenbar, und man erkennt, wie Leibniz richtig bemerkte, die Möglichkeit die Quadratur derselben auszuführen[1]). Übrigens kann die Quadratur der Kurve (15) auch aus der zitierten Gleichung $\int x\,dy = \frac{1}{c\sqrt{2}}\int y\sqrt{c^2-y^2}\,dy$ erhalten werden, welche Methode den Vorzug hat, auch auf die Kurven mit der Gleichung $y^4 = c^2(2x^2-y^2)$, die von Leibniz abgeleitet sind, angewandt werden zu können (indem in (15) c in ic verwandelt wird) ebenso auf die von Craig[2]) betrachteten von der Gleichung $y^4 + a^2y^2 = b^2x^2$.

c) Andere symmetrische Polyzomalkurven vierter Ordnung finden sich in der oft zitierten *Introduction* von G. Cramer (S. 239); eine solche ist die von folgender Gleichung

$$y^4 + 2x^2y^2 + x^4 - 6axy^2 - ax^3 + a^2x^2 = 0.\text{[3])} \quad . \quad . \quad (17)$$

Schreibt man sie in der Form

$$y = \sqrt{2ax - x^2} + \sqrt{ax},$$

so erkennt man, daß sie mit Hilfe eines Kreises und einer Parabel konstruiert werden kann.[4])

d) Von derselben Art ist die auf folgende Weise erzeugte Kurve[5]): Man betrachte zwei Kreise, die sich gegenseitig im Punkte A von innen berühren (Taf. VI, Fig. 43), der eine habe den doppelten Radius $2a$ des anderen; durch eine Senkrechte zur Zentrale werden vier Strecken bestimmt, von denen jede einen Endpunkt auf dem einen und den zweiten auf dem anderen Kreise hat; die Mittelpunkte dieser gehören der Kurve vierter Ordnung mit der Gleichung an: (A als Anfang, die Zentrale als x-Achse genommen)

$$2y = \sqrt{x(2a-x)} + \sqrt{x(4a-x)},$$

welche demnach von der besagten Art ist. A ist ein Berührungsknoten der Kurve.

e) Eine andere von Cramer[6]) betrachtete Kurve hat als Gleichung

$$x^4 + y^4 - 2a^2y^2 - 2b^2x^2 + b^4 = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

dieselbe kann auch geschrieben werden

---

1) Brief an Huygens v. 27. Jan. u. v. 20./30. Febr. 1691 (Das. S. 75. u. 84).

2) Vgl. A. de Moivre, *Specimen of the use of fluxions in the solution of geometric problems* (Philos. Trans., London 1693, Nr. 216).

3) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genf, 1750) S. 239.

4) Es ist ersichtlich, daß diese Kurve eine großen Analogie mit einer anderen besitzt, welche G. Ritt in seinem *Manuel des aspirants à l'Ecole polytéchnique* (Paris, 1839) betrachtet hat und neuerdings H. Brocard (*Note sur la quartique* $y = \pm\sqrt{2ax} \pm \sqrt{a^2-x^2}$; Le matem. pure applic. 1902) und V. Retali (*Sopra una quartica binodale.* Das.) ausführlich untersucht haben.

5) *Introduction* S. 435.

6) Das. S. 436—38.

$$y = \sqrt{\frac{a^2 - b^2 + x^2}{2}} + \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - x^2}{2}}$$

und gehört daher ebenfalls einer polyzomalen symmetrischen Kurve vierter Ordnung an, die sich vermittels einer Ellipse und einer koachsialen Hyperbel konstruieren läßt. Man könnte sie Doppel-Herz-Kurve nennen, weil sie, wie Cramer bemerkt „semble à la figure de deux coeurs, qui se pénètrent l'un l'autre par la point.“

f) Endlich ist in demselben Werke noch folgende Aufgabe behandelt[1]): „Gegeben ein Kreis mit dem Zentrum C, dem Radius R, ein Punkt O und eine durch ihn gehende Gerade r (Taf. VI, Fig. 44). Von einem beliebigen Punkte N des Kreises fälle man das Lot NM auf r und nehme auf diesem $PM = ON$; den Ort des Punktes P zu finden.“ Nimmt man r als x-Achse, O als Anfang, und bezeichnet die Koordinaten von C mit a und b, so kann man die von N nehmen als $a + R \cdot \cos\varphi$ und $b + R \cdot \sin\varphi$, und daher werden die von P sein:

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 + R^2 + 2R\,(a\cos\varphi + b\sin\varphi)}, \qquad y = b + R\sin\varphi.$$

Nach Elimination von φ ergibt sich, daß

$$x^4 + 4bx^2y + 4(a^2 + b^2)y^2 - 2(a^2 - b^2 + R^2)x^2 - 4b(a^2 + b^2 - R^2)y + (a^2 + b^2 - R^2)^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

die Gleichung des betr. Ortes ist. In dem speziellen Falle, daß der Punkt O auf der Peripherie des Kreises liegt, ist $R^2 = a^2 + b^2$, und daher wird dann die Gleichung

$$x^4 - 4(a^2 + by)x^2 + 4(a^2 + b^2)y^2 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (19')$$

Über die entsprechende Kurve bemerkt Cramer: „la courbe réprésente en quelque sorte une bésace“. Schreiben wir die vorige Gleichung so

$$x = \sqrt{a^2 + y\,(b + \sqrt{a^2 + b^2})} + \sqrt{a^2 + y\,(b - \sqrt{a^2 + b^2})}$$

und wenden die allgemeinen Bemerkungen der Nr. **81** an, so gelangt man zur Konstruktion der Besace (Quersackkurve) vermittels zweier Parabeln.

g) Noch auf eine Polyzomalkurve vierter Ordnung, die man als Spezialfall der Wattschen Kurve (s. Nr. **106**)[2]) ansehen kann, wollen

---

1) *Introduction* etc. S. 450.

2) Von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet findet sich die Kurve in dem *Essai d'une théorie du parallelogramme de Watt* von A. J. H. Vincent (Mém. Société Lille 1837), woselbst die Namen Sélénoide und Hémicycle zwei speziellen Formen derselben gegeben sind und die — nach Vincent — Anwendung in der Architektur finden könnten. — Die Gleichung der Kurve findet sich auch im *Manuel des candidats à l'Ecole polytechnique* (I, Paris 1857, S. 331) von E. Catalan.

wir hier hinweisen[1]). Sie ist der Ort des Punktes M einer Strecke von konstanter Länge l, deren Endpunkte N und P sind, von denen der erste eine Gerade g, der zweite einen Kreis mit dem Zentrum O und dem Radius R beschreibt. Um ihre Gleichung zu finden, nehmen wir O als Anfang und das von O auf g gefällte Lot als x-Achse; nennt man d die Länge des letzteren, setzt $\frac{PM}{MN} = \frac{\mu}{\nu}$ und bezeichnet mit φ und ψ die Winkel des Radius OM und der Strecke MN mit der Abszissenachse, so hat man:

$$x = R\cos\varphi + \frac{\mu l}{\mu + \nu}\cos\psi, \qquad y = R\sin\varphi + \frac{\mu l}{\mu + \nu}\sin\psi,$$

$$d = R\cos\varphi + l\cos\psi,$$

durch Elimination von φ und ψ ergibt sich dann

$$y = \frac{1}{\nu}\sqrt{\nu^2 R^2 - [(\mu+\nu)x - \mu d]^2} + \frac{\mu}{(\mu+\nu)\nu}\sqrt{\nu^2 l^2 - (\mu+\nu)^2(d-x)^2} \quad (20)$$

als Gleichung dieses Ortes; er kann daher im allgemeinen vermittels zweier Ellipsen konstruiert werden; wenn aber $l = d + R$ und $\mu = \nu$, wird eine derselben ein Kreis; er kann ferner verschiedene Formen annehmen, die sich aus der Diskussion der Gleichung ergeben[2]). Besonders interessant ist der Fall $d = 0$, d. h. wenn die Gerade g durch den Mittelpunkt des Kreises geht; die Kurve wird dann eine Ellipse, und man hat damit eine sehr einfache mechanische Erzeugung derselben, die zur Konstruktion eines Ellipsographen benutzt werden kann.

h) Wir beschließen dieses Kapitel mit der Erwähnung einer Kurve 4. Ordnung, deren Erzeugung der soeben behandelten sehr ähnlich ist[3]). Es ist der Ort der rechtwinkligen Ecke eines Dreiecks, dessen Katheten r und $2r$ sind, und dessen Hypotenuse mit dem einen Endpunkte einen Kreis mit dem Radius r und dem Zentrum O, mit dem anderen einen Durchmesser dieses Kreises durchläuft. Nehmen wir O als Pol, den Durchmesser als Achse, so lautet die Polargleichung der Kurve

$$\varrho = \frac{2r}{\sqrt{1 + (1 - \operatorname{ctg}\omega)^2}};$$

demnach wird sie in kartesischen Koordinaten dargestellt durch

$$(x^2 + y^2)(x^2 + 2y^2 - 2xy) = 4r^2x^2.$$

Es handelt sich also um eine zirkulare Kurve, die symmetrisch in bezug auf den Anfangspunkt liegt, und dort einen Berührungsknoten mit der x-Achse als zugehöriger Tangente hat.

---

1) S. einen im *Journ. math. spéc.* 1870 veröffentlichten Aufsatz, wiedergegeben im *Progréso* I, 1891, S. 221—23.

2) D. Jozé Ruiz Castizo Ariza, *Estudio analytico de un lugar geometrico de cuarto orden* (Madrid, 1889).

3) G. Ghigi, *Di una curva piana di quarto ordine* (Firenze, 1904).

Elftes Kapitel.

Rationale Kurven vierter Ordnung mit einem Berührungsknoten

85. Gerard van Gutschoven, Schüler und Mitarbeiter des Cartesius, war von 1640—59 Professor der Mathematik in Löwen, dann der Anatomie, Chirurgie und Botanik daselbst. Auf ihn weist R. F. de Sluse in einem Briefe an Huygens vom 18. April 1662 hin[1]) als auf denjenigen, der folgende Aufgabe gestellt habe: „Gegeben eine Gerade r und einer ihrer Punkte O (Taf. VI, Fig. 45); den Ort eines Punktes M zu finden, derart, daß wenn man OM zieht und dann MN senkrecht dazu und r in N schneidend, MN gleich einer gegebenen Strecke a wird.“ Nimmt man O als Pol und die Gerade r als Polarachse, so ist die Polar-Gleichung der Gutschovenschen Kurve ersichtlich

$$a \cdot \cos \omega = \varrho \cdot \sin \omega; \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

der Ort selbst wird in kartesischen Koordinaten dargestellt durch die Gleichung

$$a^2 x^2 = (x^2 + y^2)\, y^2, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

welche sich in dem Briefe von Huygens an de Sluse vom 25. Sept. 1662 findet[2]). Sie beweist, daß eine Kurve vierter Ordnung vorliegt, die durch die Kreispunkte der Ebene geht, symmetrisch in bezug auf die Koordinatenachsen ist und im Anfange einen Berührungsknoten hat; im Unendlichen hat die Kurve außerdem einen Doppelpunkt, mit den beiden Geraden $x = \pm a$ als zugehörigen Wendetangenten; diese beiden Geraden begrenzen zugleich einen Streifen der Ebene, innerhalb dessen sich sämtliche reelle Punkte der Kurve befinden. Der Anfang ist außerdem ein außerordentlicher, einfacher Brennpunkt der Kurve. Wegen ihrer Ähnlichkeit mit dem griechischen Buchstaben $\varkappa$ ist sie die Kappa-Kurve[3]) genannt worden; sie ist von der sechsten Klasse und daher nicht, wie man geglaubt hat, polarreziprok zu sich selbst in bezug auf einen Kegelschnitt[4]).

In dem vorhin erwähnten Briefe führt Sluse eine Konstruktion der Tangente an die Kappa-Kurve an, die nicht schwer zu beweisen ist. Aus (1) ergibt sich folgende parametrische Darstellung der Kurve

$$x = a \frac{\cos^2 \omega}{\sin \omega}, \quad y = a \cdot \cos \omega; \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

---

1) *Œuvres de Huygens* IV (La Haye, 1891) S. 207.

2) Das. S. 238.

3) Aubry, *De l'usage des figures de l'espace pour la définition et la transformation de certaines courbes* (Journ. math. spéc. 4. Ser. IV, 1895, S. 201).

4) Die genannte irrige Ansicht zu beseitigen, war ein Artikel von Genocchi bestimmt (Nouv. Ann. Mathém. XIV, 1855, S. 248—53).

wenn daher die Kurventangente im Punkte M die Gerade r in T schneidet, so ist

$$OT = x - y\frac{dx}{dy} = -a\frac{\cos^2\omega}{\sin^3\omega},$$

und daher

$$TN = ON - OT = \frac{a}{\sin\omega} + a\frac{\cos^2\omega}{\sin^3\omega} = \frac{a}{\sin^3\omega}.$$

Andrerseits, wenn P der Fußpunkt des von M auf P gefällten Lotes ist, hat man

$$ON = \frac{a}{\sin\omega}, \qquad NP = a\cdot\sin\omega,$$

und daher

$$\overline{TN}\cdot\overline{NP} = \overline{ON}^2,$$

d. h. — wie Sluse sagt — „NP, NO, NT sunt in continua proportione"; ist also M gegeben, so findet man alsbald den Punkt T und damit die Tangente in M[1]).

In dem oben erwähnten Briefe von Huygens ist fernerhin eine bemerkenswerte Formel für die Quadratur aufgestellt, deren Darlegung angebracht sein dürfte. Wir ziehen zu dem Zwecke MQ senkrecht zu Oy, bezeichnen mit $\mathfrak{S}$ die Fläche des gemischtlinigen Dreiecks, dessen Seiten die Geraden OQ, QM und der Bogen OKM die Kappa-Kurve sind. Infolge von Gleichung (3) wird dann

$$\mathfrak{S} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega} a\frac{\cos^2\omega}{\sin\omega}(-a\sin\omega)\cdot d\omega = -\frac{a^2}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\omega}(1+\cos 2\omega)\,d\omega$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) - \frac{a^2}{4}\sin 2\omega.$$

Wird nun der Bogen MR des Kreises mit dem Zentrum N beschrieben und nennt man $\overline{\mathfrak{S}}$ die Fläche des halben Kreissegmentes $MPRS$, so erhält man

$$\overline{\mathfrak{S}} = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) - \frac{1}{2}a\sin\omega\cdot\cos\omega = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right) - \frac{a^2}{4}\sin 2\omega;$$

demnach ist $\mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{S}}$, wie Huygens behauptet hat. — Wir können noch hinzufügen, daß wenn wir $\omega = 0$ setzen, wir $\frac{\pi a^2}{4} = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$ als Ausdruck für das Dreieck erhalten, das begrenzt wird von der y-Achse, einem Bogen der Kappa-Kurve und der zugehörigen Asymptote; ein derartiges Dreieck ist also gleich einem Kreise mit dem Durchmesser a. Infolge dessen ist der Teil der Ebene innerhalb der Kappa-Kurve unendlich groß.

---

1) Eine andere Tangentenkonstruktion findet man bei F. Gomes Teixeira, *Tratado,* S. 241, *Obras,* IV S. 274.

Die Definition der Kappa-Kurve, von der wir ausgegangen sind, führt uns zu einer sehr einfachen Art die Kurve zu zeichnen. Man denke sich (s. Fig. 45) ein Winkelscheit LMN (bei M rechtwinklig) dessen Kathete $MN = a$ ist; läßt man dasselbe sich in der Weise bewegen, daß die andere Kathete LM immer durch den Punkt O geht, und die gegenüberliegende Ecke N die x-Achse durchläuft, so beschreibt der Scheitel des rechten Winkels ersichtlich die Kappa-Kurve. Die Kurven-Normale in M geht infolge dessen durch den Punkt V, in welchem das in O auf LM errichtete Lot die von N zu Ox gezogene Senkrechte schneidet[1]).

I. Barrow hat in seinen *Lectiones geometricae* — zuerst veröffentlicht 1670 — eine andere Konstruktion für die Kappa-Kurve angegeben[2]). Man trage auf der Polarachse ein Stück $OA = a$ ab und errichte in A zu ihr die Senkrechte r; ein beliebiger durch den Pol gezogener Strahl schneide die Gerade r in B. Trägt man nun auf diesem $OM = AB$ ab, so ist der Ort des Punktes M eine Kappa-Kurve. Diese Konstruktion zeigt, daß der Ort offenbar die Gleichung hat

$$\varrho = a \cdot \operatorname{tg} \omega, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

die sich von (1) nur dadurch unterscheidet, daß ω in $\frac{\pi}{2} - \omega$ verwandelt ist.

Theoretisch und auch wohl praktisch wichtiger ist noch eine andere Definition der Kurve, die wir durch Modifikation der anfänglichen erhalten. Beschreiben wir einen Kreis um den Mittelpunkt N mit dem Radius NM, so ist die Gerade OM eine Tangente desselben und also: **Die Kappa-Kurve ist der geometrische Ort der Berührungspunkte der Tangenten, die man von einem Punkte einer festen Geraden an die unendlich vielen Kreise von gegebenem Radius, die ihren Mittelpunkt auf dieser Geraden haben, ziehen kann.**

Es sei noch bemerkt, daß L. Mascheroni zur graphischen Darstellung einer Erscheinung des Magnetismus[3]) die Kurve mit der Polargleichung

$$\varrho - k = a(\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\alpha)$$

betrachtet hat. Diese Kurve ist aber nicht transzendent, wie ein Biograph Mascheronis geglaubt hat[4]); setzt man nämlich

$$l = k - a \cdot \operatorname{tg}\alpha,$$

---

1) Diese Konstruktion kann auch einfach durch Berechnung der polaren Subnormale bestätigt werden.

2) *The mathematical works of J. Barrow*, herausg. v. Whewell (Cambridge, 1860) S. 247.

3) *Maniera di misurare l'inclinazione dell'ago calamitato* (Bergamo, 1782).

4) F. Landi, *Elogio di L. Mascheroni* (Mem. Soc. Ital. Scienze, XI, 1804, S. XLI).

so kann man schreiben

$$\varrho = a \cdot \operatorname{tg} \omega + l,$$

oder

$$(x^2 + y^2)x^2 = (ay + lx)^2$$

woraus man sieht: **Die Mascheronische Kurve ist von der vierten Ordnung und eine Konchoide der Kappa-Kurve.**

Die Betrachtung der Gleichung (4) führt uns von selbst auf allgemeinere Kurven, nämlich die durch die Gleichung

$$\varrho = a \cdot \operatorname{tg} \mu \omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

dargestellten, wo μ eine gegebene Zahl bedeutet. Dieselben sind algebraisch, wenn μ eine rationale Zahl ist, und bieten ziemlich verschiedene Gestalten dar, welche den Namen Noeuds (Knotenkurven), den ein französischer Geometer ihnen gegeben hat, rechtfertigen[1]. Abgesehen vom Falle $\mu = 1$, führt uns die Annahme $\mu = \frac{1}{2}$ zu einer bekannten Kurve, nämlich der Strophoide (s. Nr. **37**, Gl. (2)); für $\mu = 2$ erhalten wir schon eine neue Kurve, die von der sechsten Ordnung ist und Moulin à vent (Windmühle) genannt wurde[2]. **Jede Knotenkurve (5) besitzt die Eigenschaft mit ihre Inverse in bezug auf einen Kreis von Mittelpunkt O und Radius a kongruent zu sein,** wie eine kleine Rechnung an der Gl. (5) lehrt.

Die Knotenkurven sind nicht die einzigen Verallgemeinerungen, welche die Kappa-Kurven erfahren haben. Schon Sluse bemerkte, daß das Gutschovensche Problem sich verallgemeinern lasse, indem man annimmt, daß der Winkel OMN statt eines rechten Winkels, einen konstanten Wert α habe[3]. Es entsteht dann die Kurve, die in Polar- bzw. kartesischen Koordinaten die Gleichung hat

$$\varrho = a \frac{\sin(\omega + \alpha)}{\sin \omega}, \qquad a^2 (x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 = (x^2 + y^2) y^2 \quad . \quad (6)$$

und die man die schiefe Kappa-Kurve zum Unterschiede von der ursprünglichen oder geraden Kappa-Kurve nennt. Die Namen Pankappa und schiefe Pankappa wurden den folgendermaßen dargestellten Kurven

$$\varrho = \frac{a + b \cos \omega}{\sin \omega}, \qquad \varrho = \frac{a + b \cos \omega + c \sin \omega}{\sin \omega}$$

gegeben[4]. Endlich der Name projektive Kappa-Kurve[5] wurde

---

1) Aubry a. O. S. 251. — Wenn μ eine ganze Zahl ist, so ist die Knotenkurve von der Ordnung $2(\mu + 1)$.

2) G. de Longchamps, *Cours de problèmes de géometrie analytiques* I (Paris, 1898) S. 137.

3) Vgl. auch H. Rieder, *Untersuchung einer 2—4 deutigen kinetographischen Verwandtschaft* (Diss. München, 1907) S. 30.

4) J. Neuberg, s. a. Abh. in Liège Mém. Soc., 3. Sér., V, 1904.

5) V. Retali, *Sopra una corrispondenza* [m, n] (Rend. Ist. Lomb. 2. Ser. XXXII, 1899).

dann allen Kurven vierter Ordnung mit einem Doppelpunkt und einem Berührungsknoten gegeben. Schließlich kann auch die Kurve mit der Polargleichung

$$\varrho = \frac{al \cdot \sin\omega}{l \cdot \cos\omega + a}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

der man, wie übrigens der Gutschovenschen Kurve, bei einigen Problemen der darstellenden Geometrie begegnet[1]), als eine Verallgemeinerung der Kappa-Kurve angesehen werden, insofern als Gleichung (7) in (4) übergeht, wenn man $l = \infty$ setzt.

86. Von projektivem Standpunkte aus unterscheidet sich die Kappa-Kurve kaum von einer anderen Kurve viel neueren Datums, die wegen ihrer Gestalt und ihrem Entdecker zu Ehren die Külpsche Konchoide heißt[2]). Ihre Entstehungsweise ist folgende: „Gegeben ist der Quadrant OAC eines Kreises mit dem umbeschriebenen Quadrate $OABC$ (Taf. VI, Fig. 46); durch den Mittelpunkt ziehe man eine beliebige Gerade, die den Quadrantenbogen in G und die eine Seite des Quadrates in F schneidet. Die durch F zu der anderen Seite gezogene Parallele und die durch G zu der ersteren schneiden sich in einem Punkte P, dessen Ort der eine Bogen der fraglichen Konchoide ist; die anderen drei sind die zu ihm symmetrischen in bezug auf den Mittelpunkt des Quadranten und die ihn begrenzenden Radien."

Nimmt man als Koordinatachsen diese beiden Radien und nennt den Winkel der beliebigen Geraden mit dem ersteren φ, den Radius des Quadranten a, so erhält man sogleich folgende parametrische Darstellung der in Rede stehenden Konchoide:

$$x = a \cdot \cos\varphi, \qquad y = a \cdot \operatorname{tg}\varphi \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

und demnach durch Elimination von φ

$$x^2 y^2 = a^2 (a^2 - x^2). \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

Aus dieser Gleichung entnimmt man, daß die Külpsche Konchoide einen Berührungsknoten im unendlich fernen Punkte von Oy, welche Achse zugleich die zugehörige Tangente ist, außerdem einen isolierten Punkt im Unendlichen von Ox hat. Die Kurve liegt ganz innerhalb des Streifens der Ebene, der von den beiden Geraden $x = \pm a$ begrenzt wird; sie hat vier reelle Wendepunkte mit den Abszissen $\pm a\sqrt{\frac{2}{3}}$; im übrigen sind bemerkenswerte Eigenschaften an ihr nicht bemerkt worden.

---

1) De la Gournerie, *Traité de géométrie descriptive.* 3. Teil (Paris, 1885), S. 151.

2) Külp, *Über eine besondere Art der Konchoide (Muschellinie)* (Archiv, Math. Phys. XLVIII, 1868).

Eine andere mit einem Berührungsknoten versehene rationale Kurve vierter Ordnung entsteht bei folgender Konstruktion: „Gegeben ein Kreis (Taf. VI, Fig. 47 *a*, *b*) mit dem Zentrum O, dem Radius r, und ein Punkt A seiner Ebene. Man ziehe einen beliebigen Radius OM und bestimme dessen Schnittpunkt P mit dem in A auf AM errichteten Lote. Variiert man den Radius, so variiert auch der Punkt P und beschreibt eine Linie, die man die **Jerabeksche Kurve** nennt[1].“ Um deren Gleichung zu finden, nehmen wir O als Pol und OA als Polarachse, nennen a den Abstand OA, ψ den Winkel OAM, ϱ und ω die Koordinaten von P. Aus der Betrachtung der Figur ergeben sich dann folgende Relationen:

$$\varrho = OP = r - PM = r - \frac{AM}{\cos\psi}, \qquad AM = a\frac{\sin\omega}{\sin\psi},$$

daher

$$\varrho = r - a\frac{\sin\omega}{\sin\psi \cdot \cos\psi}.$$

Da nun ferner

$$AM = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\omega},$$

so hat man

$$\frac{1}{\sin\psi} = \frac{AM}{a\sin\omega} = \frac{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\omega}}{a \cdot \sin\omega},$$

und deswegen

$$\frac{1}{\cos\psi} = \frac{\sqrt{a^2 + r^2 - 2ar\cos\omega}}{r - a \cdot \cos\omega}.$$

Setzt man diese Werte in den schon gefundenen Ausdruck für ϱ ein und reduziert, so erhält man die Gleichung

$$\varrho = a\frac{r\cos\omega - a}{r - a\cos\omega}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

welche zeigt, daß die Jerabeksche Kurve rational ist und symmetrisch in bezug auf OA. Gehen wir zu kartesischen Koordinaten über, so wird diese

$$r^2(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)(x - a)^2. \quad \ldots \quad (11)$$

Diese zeigt, daß die Kurve selbst eine zirkulare Kurve vierter Ordnung ist[2]), die O als außerordentlichen Brennpunkt hat; A ist der Berührungsknoten, die zugehörige Tangente ist senkrecht zu OA. Die Kurve zeigt verschiedene Gestalt, jenachdem $a \lesseqgtr r$. Wenn $a < r$, d. h. A innerhalb des gegebenen Kreises liegt, so ist O ein Knotenpunkt und die entsprechenden Tangenten bilden mit OA einen Winkel, dessen

---

1) Mathésis, Question 314, gelöst in B. V, 1885, S. 110—116.

2) Dasselbe Resultat ergibt sich auch, wenn man beachtet, daß die Ausgangskonstruktion die Kurve als erzeugt von zwei Strahlenbüscheln in der Korrespondenz [2, 2] mit den Zentren in den Punkten O und A erscheinen läßt.

Kosinus $\frac{a}{r}$ ist; die Kurve liegt ganz innerhalb des Kreises. Wenn hingegen $a > r$, so ist O ein isolierter Punkt und die Kurve besitzt zwei unendliche Zweige, die zu Asymptoten die beiden durch A gehenden Geraden haben, die mit der Polarachse einen Winkel vom Cosinus $\frac{r}{a}$ bilden und vom Pole dem Abstand $\frac{r^2}{\sqrt{r^2 - a^2}}$ haben.

87. Während die Külpsche Konchoide und die Jerabeksche Kurve außer dem Berührungsknoten noch einen Doppelpunkt haben, hat die, von der jetzt die Rede sein wird, eine Spitze.

Es sei ein Kreis gegeben mit dem Mittelpunkte O (Taf. VI, Fig. 48), dem Radius $\frac{a}{2}$, zwei aufeinander senkrechte Durchmesser desselben AB, CD und schließlich eine Gerade r parallel zu CD. Man ziehe durch A einen beliebigen Strahl, der r in M schneidet, dann von M die Parallele zu AB, welche die Peripherie des Kreises in N schneidet und schließlich durch N die Parallele zu CD. Ist nun P der Schnitt dieser mit dem Strahle AM, so ist der Ort von P eine derjenigen Kurven, die von G. de Longchamps birnförmige Kurven vierter Ordnung (quartiques pyriformes) genannt wurden[1]). Es ist vorteilhaft, aus dieser Konstruktion ein Verfahren herzuleiten, um die Punkte der Kurve zu finden, die eine gegebene Abszisse AK haben (A als Anfang, AB als x-Achse genommen): Man bestimme die Punkte N und N', in denen der gegebene Kreis die durch den Punkt K zu r parallel gezogene Gerade schneidet, dann die Punkte M und M', in denen diese von den durch N und N' zu AB gezogenen Parallelen getroffen wird; projiziert man nun die Punkte M und M' von A aus auf die Gerade NN', in P und P', so sind diese die gesuchten Punkte. — Bezeichnet man den Abstand AH des Punktes A von der Geraden r mit b, nennt den variabelen Winkel $MAB = \varphi$ und x, y die Koordinaten von P, so ist $MH = b \cdot \operatorname{tg} \varphi$. Ferner ist offenbar

$$\overline{NK}^2 = \overline{MH}^2 = AK \cdot KB,$$

und daher

$$b^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi = x(a - x).$$

Es ist daher $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, und somit

$$x^4 - ax^3 + b^2y^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

die Gleichung der gesuchten Kurve. Diese selbst ist also von der vierten Ordnung, symmetrisch in bezug auf Ox, und vollständig innerhalb des Quadrates gelegen, dessen Seiten den gegebenen Kreis in A, B, C, D berühren. Der Punkt A ist eine Spitze der Kurve, AB die

---

1) *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* (Paris, 1890) S. 129.

zugehörige Tangente; der unendlich ferne Punkt des Durchmessers CD ist dagegen der Berührungsknoten, die unendlich ferne Gerade ist die zugehörige Tangente; Wendepunkte sind die beiden Punkte mit den Abszissen $a\frac{3-\sqrt{3}}{4}$ und Kulminationspunkte die mit der Abszisse $\frac{3a}{4}$ und den Ordinaten $\pm\frac{a}{2}$.

Bemerkenswert ist der Spezialfall $b = a$[1]); dann berührt r den Kreis und Gleichung (12) wird zu

$$x^4 - ax^3 + a^2y^2 = 0;$$

wenn man nun in dieser y in $\frac{by}{a}$ verwandelt, so geht sie wieder auf (12) zurück; daher ist die „allgemeine birnenförmige Kurve vierter Ordnung" eine dem soeben betrachteten Spezialfalle affine Kurve. —

Es möge noch ein anderer Spezialfall betrachtet werden: nämlich $a = 2b$; die entsprechende Kurve heißt wegen ihrer Gestalt „Kreiselkurve" (toupie) und wird folgendermaßen konstruiert[2]): Gegeben ein Kreis Γ (mit dem Durchmesser $2b$) bezogen auf zwei Achsen Ox, Oy; man projiziere einen beliebigen Punkt M von Γ in A und B auf die Achsen, fälle MH senkrecht auf AB und trage $MP = MH$ auf der Verlängerung von BM ab; der Ort der Punkte P ist die Kreiselkurve.

Die Gesamtfläche der allgemeinen Kurve ist

$$F = 2\int_{x=0}^{x=a} y \cdot dx = \frac{2}{b}\int_0^a x\sqrt{ax - x^2}\,dx = \frac{\pi a^3}{8b},$$ [3])

im speziellen Falle $a = b$, wird dieser Ausdruck $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2$ und zeigt, daß dann die Kurvenfläche gleich der Hälfte des gegebenen Kreises ist.

Ebenfalls G. de Longchamps verdankt man die Betrachtung einer anderen Kurve vierter Ordnung mit Spitze, die von projektivischem Standpunkte aus der vorigen analog ist. Wegen ihrer Gestalt (s. Taf. VI, Fig. 49) wurde sie von ihrem Erfinder mit dem Namen Birnkurve (apienne von ἄπιον = Birne) belegt[4]). Man erhält sie aus einem Kreise, der in kartesischen Koordinaten dargestellt wird durch die

1) Er wurde von Ossian Bonnet 1844 betrachtet (Nouv. Ann. Mathém. III, S. 75).

2) Schlömilch, *Compendium der höh. Analysis* I, 5. Aufl. (Braunschweig, 1881) S. 87; G. de Longchamps, *Cours de problèmes de géométrie analytique* I (Paris, 1898) S. 137; s. auch S. 177.

3) Wegen Berechnung dieses Integrals sehe man Schlömilch, *Übungsbuch zum Studium der höh. Analysis* II (2. Aufl. Leipzig, 1874) S. 22.

4) *Cours de problèmes de géométrie analytique* II (Paris, 1899) S. 393.

Gleichung
$$X^2 + Y^2 - 2R \cdot Y - 2R \cdot X + R^2 = 0$$
vermittelst der (semi-reziproken kartesischen) Transformation, die durch die Formeln
$$X = x, \quad Yy = R^2$$
dargestellt wird[1]). Die „Birnkurve“ hat demnach folgende Gleichung:
$$y^2 (x - R)^2 - 2R^3 y + R^4 = 0;$$
sie läßt sich auch parametrisch darstellen, nämlich so:
$$\frac{x}{R} = 1 + \cos\varphi, \quad \frac{y}{R} = \frac{1}{1 + \sin\varphi}.$$
Infolgedessen ist sie eine rationale Kurve vierter Ordnung, und symmetrisch in bezug auf die Gerade $x = R$. Der unendlich ferne Punkt dieser Geraden ist eine Spitze derselben mit dieser Geraden als Spitzentangente. Hingegen ist der unendlich ferne Punkt von Ox ein Berührungsknoten mit dieser Achse als Tangente. Für alle reellen Punkte der Kurve hat man $-a \leqq x \leqq +a$ und $y \geqq \frac{a}{2}$.

Sämtliche in diesem Kapitel betrachteten Kurven haben, wie die Konchoide des Nikomedes (Nr. **66**), außer einem Berührungsknoten noch einen Doppelpunkt oder eine Spitze; dasselbe gilt auch für die Kurve mit folgender Gleichung
$$x = \frac{b - y}{b} \sqrt{a^2 - y^2},$$
deren Konstruktion Giordano Riccati in einer Arbeit gezeigt hat, die den sonderbaren Titel hat *Teorema: il nulla imaginario non può confondersi col reale* (Mem. Soc. Ital. Scienze, IV, 1788); im folgenden Kapitel werden wir nun eine Familie von Kurven kennen lernen, deren Mitglieder, ähnlich wie einige der virtuellen Parabeln, jedes die erste der obigen Singularitäten besitzt.

Zwölftes Kapitel.

Die Konchalen.

88. Der Ort der Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten oder zwei festen Geraden oder von einem Punkte und einer Geraden in einem gegebenen Verhältnisse stehen, ist ein Kreis, ein Geradenpaar oder ein Kegelschnitt. Wenn man unter den gegebenen Bedin-

1) Um den Punkt $M(X, Y)$, der dem Punkte $m(x, y)$ entspricht, zu finden, beschreibe man mit dem Radius R um den Mittelpunkt O den Kreis Γ, man ziehe von m die Parallele zu OX, so findet man den Pol in bezug auf Γ; die von ihm zu Ox gezogene Parallele schneidet die von m zu Oy gezogene Parallele in M, wie leicht ersichtlich.

gungen das Verhältnis ersetzt durch die Summe oder Differenz, so erhält man einen zentrischen Kegelschnitt, eine Gerade oder eine Parrabel. Wenn man hingegen statt dessen das Produkt einführt, so hält man: 1. Eine Cassinische Kurve (vgl. Nr. **90**), wenn die festen Elemente zwei Punkte sind; mit dieser werden wir uns im nächsten Kapitel beschäftigen. 2. Eine Hyperbel, wenn es zwei Geraden sind. 3. Wenn die festen Elemente ein Punkt F und eine Gerade r sind, eine Kurve, von der schon O. Schlömilch die Gleichung sowie einige Eigenschaften gefunden hat[1]), deren methodische Untersuchung jedoch erst vor mehreren Jahren von G. Huber[2]) ausgeführt wurde, der auch den Vorschlag machte, sie Konchale zu nennen wegen der Gestaltähnlichkeit, die sie bisweilen mit der Konchoide des Nikomedes hat.

Nimmt man als x-Achse die vom Punkte F auf die Gerade r gefällte Senkrechte FA und als Anfang den Mittelpunkt der Strecke $FA = 2a$, so sieht man alsbald, wenn man mit ak das konstante Produkt bezeichnet, daß

$$(x + a)^2 [(x - a)^2 + y^2] = a^2k^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die Gleichung der Konchale ist.

Sie ist demnach eine Kurve vierter Ordnung symmetrisch in bezug auf die x-Achse. Die Abszissen der vier Punkte, in denen diese von der Kurve geschnitten wird, sind $\pm \sqrt{a(a \pm k)}$, während die Ordinaten der beiden Punkte, in denen die Kurve die y-Achse schneidet, gleich $\pm \sqrt{k^2 - a^2}$ sind; dies zeigt, daß von jenen vier Punkten 4 oder 2 reell sind, jenachdem $k \lessgtr a$, während diese beiden reell oder imaginär sind, jenachdem $k \gtrless a$. In dem Zwischenfalle $k = a$ wird Gleichung (1) zu

$$y^2 (x + a)^2 + x^2 (x^2 - 2a^2) = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

sie hat nunmehr im Anfang einen Knotenpunkt mit den Tangenten $y = \pm x\sqrt{2}$ und schneidet die x-Achse ferner in den Punkten mit den Abszissen $x = \pm a\sqrt{2}$. Im allgemeinen Falle geht die Kurve durch die zyklischen Punkte der Ebene und besitzt außerdem im Unendlichen von Oy einen Berührungsknoten; die entsprechende Tangente hat zur Gleichung $x + a = 0$, ist also die Gerade r. Die Konchale bietet verschiedene Gestalten dar, je nach der relativen Größe der Konstanten a und k (s. Taf. VI, Fig. 50): im speziellen

---

1) *Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis,* I. T. (3. Aufl. Leipzig, 1878) S. 97.

2) *Die Konchalen, ihre orthogonalen Trajectorien und die Cissoiden vierter Ordnung* (Monatshefte Math. Phys. VI, 1895); der Fall, daß der Punkt F auf die Gerade r fällt, wurde von G. Cardose-Laynes im Aufsatze *Di un certo luogo geometrico* (Livorno, 1896) betrachtet.

wenn $k < a$, besteht sie aus zwei unendlichen Zweigen und einem Ovale (in der Fig. punktiert);
" $k = a$, " " " einer Serpentine und einem Zweige mit Knoten (ausgezogen);
" $k > a$, " " " zwei unendlichen Zweigen (gestrichelt).

Die Quadratur der Konchale hängt im allgemeinen von elliptischen Funktionen ab, die Rektifikation von hyperelliptischen; für die rationalen Konchalen kann das erste Problem jedoch elementar gelöst werden, während das zweite die alleinige Anwendung der elliptischen Funktionen verlangt. Die Tangente an die Konchale in einem Punkte P kann durch Spezialisierung eines allgemeinen von A. Hurwitz[1]) gegebenen Verfahrens erhalten werden; man gelangt dann zu folgender Konstruktion: Man verbinde P mit F und errichte in F die Senkrechte p zu PF; ebenfalls verbinde man P mit dem Punkte (pr) und suche den zu dieser Geraden, in bezug auf die beiden Geraden p und r, konjugiert harmonischen Strahl; dieser wird parallel zur gesuchten Tangente sein.

Wenn man die Konstante k variiert, so stellt die Gleichung (1) ∞^1 Kurven dar; die Differentialgleichung ihrer orthogonalen Trajektorien ist

$$dy\,[2x\,(x-a) + y^2] - y\,(x+a)\,dx = 0.$$

Durch Integration erhält man:

$$\frac{y^4 - 4axy^2}{[y^2 - 2a\,(x-a)]^2} = const.; \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

demnach sind diese Trajektorien rationale Kurven vierter Ordnung mit F als gemeinsamen Doppelpunkt und Berührungsknoten im unendlich fernen Punkte von Ox; die unendlich ferne Gerade ist die zugehörige Tangente.

89. Bemerken wir noch, daß J. Steiner im Jahre 1854 folgendes allgemeine Problem gestellt hat[2]): „Gegeben in einer Ebene eine Kurve C_n und ein fester Punkt P; den Ort solcher Punkte M zu finden, daß die Berührungspunkte zweier von M an die Kurve C_n gezogenen Tangenten mit dem Punkte P in gerader Linie liegen.“ Dieses Problem kann nun leicht gelöst werden, wenn die gegebene Kurve eine Konchale ist und der feste Punkt P der (zu ihrer Definition benutzte) Punkt F ist. Man gelangt so zu einer neuen Kurve vierter Ordnung, die symmetrisch in bezug auf eine Achse ist, nämlich zu der durch folgende Gleichung dargestellten:

$$[k^2 - (a+x)^2]\,y^2 = (x^2 + k^2 - a^2)^2. \quad \ldots \quad (4)$$

1) *Über Tangentenkonstruktionen* (Math. Ann. XXII, 1883).
2) *Ges. Werke* II (Berlin, 1884) S. 599.

Diese Kurve besitzt zwei Doppelpunkte auf der x-Achse, nämlich die mit den Abszissen $\pm\sqrt{a^2-k^2}$; sie sind daher nur dann reell, wenn $k<a$; einer von ihnen ist dann ein Knoten, der andere ein isolierter Punkt. Auf der y-Achse hat sie zwei einfache Punkte mit den Ordinaten $\pm\sqrt{k^2-a^2}$; diese sind reell, nur wenn $k>a$; sie hat dann zwei Asymptoten, deren Gleichungen $x+a\pm k=0$ sind; es sind diese die Tangenten in dem unendlich fernen Knotenpunkte, welchen die Kurve besitzt. Diese hat also drei Doppelpunkte und ist demnach rational. — Wenn $k=a$, so zerfällt unsere Kurve (4) in die beiden

$$x=0, \quad (2a+x)\,y^2+x^3=0,$$

d. h. in die y-Achse und eine Kissoide des Diokles. Dieser Umstand machte es ratsam, im allgemeinen Falle die Kurve (4) als Kissoide vierter Ordnung zu bezeichnen. In dem Falle nun, daß diese Kurve zwei reelle Doppelpunkte im Endlichen hat, kann sie auch ohne Beziehung auf die Konchale konstruiert werden und zwar auf eine Weise, die angegeben zu werden verdient.

„Auf der x-Achse eines kartesischen Koordinatensystems bezeichnen wir einen Punkt $A\,(-a,\,0)$ und beschreiben um diesen mit dem Radius $k<a$ einen Kreis Γ (Taf. VI, Fig. 51). Wir ziehen an diesen die Tangenten OM_1 und OM_2 und beschreiben um den Anfangspunkt O mit dem Radius $OM_1=OM_2=\sqrt{a^2-k^2}=s$ einen Kreis. Die Peripherie dieses neuen Kreises schneidet die x-Achse in zwei Punkten, von denen der eine S_1 außerhalb, der andere S_2 innerhalb von Γ liegt. Ist nun CC' eine beliebige durch S_2 gehende Sehne von Γ, so ziehe man die Geraden CQ und $C'Q'$ senkrecht zu Ox und bestimme deren Schnittpunkte P, P' mit dem von S_1 auf die Gerade CC' gefällten Lote S_1V. Der Ort der Punkte P, P' ist die durch Gleichung (4) dargestellte Kissoide vierter Ordnung."

Sind nämlich x, y die Koordinaten des Punktes P, so bezeichnet $-x$ die Strecke OQ und y die Strecke PQ. Da nun

$$\triangle\, CVP \sim S_1QP \sim CQS_2,$$

so bestehen die Beziehungen

$$\frac{QS_1}{QP}=\frac{CV}{PV}, \quad \frac{CV}{PV}=\frac{CQ}{QS_2} \text{ und daher } \frac{QS_1}{QP}=\frac{CQ}{QS_2}.$$

Dann folgt:

$$CQ=\frac{s-x}{y}(-s-x)=\frac{x^2-s^2}{y}.$$

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke ACQ ergibt sich nun

$$CQ^2=QA^2-AQ^2=k^2-(-x-a)^2=k^2-(x+a)^2,$$

demnach

$$\left(\frac{x^2 - s^2}{y}\right)^2 = k^2 - (x + a)^2$$

oder

$$y^2[k^2 - (x + a)^2] = (x^2 - a^2 + k^2)^2$$

als Gleichung des Ortes von P. Da sie identisch mit (4), so ist die Richtigkeit der Konstruktion bewiesen.

Dreizehntes Kapitel.

Die Cassinische Kurve.

90. Johann Dominicus Cassini hat für astronomische Zwecke eine besondere Kurve erdacht, die, wenngleich sie auch in keiner Beziehung den Bedingungen des Problems, für welches sie erfunden wurde, entspricht, dennoch von vielen Gelehrten untersucht wurde, die dann schöne Eigenschaften an ihr entdeckten. Um über den Ursprung der Kurve zu berichten, ist es am besten, folgenden Abschnitt aus den *Eléments d'astronomie* von Jakob Cassini[1]) anzuführen: „Depuis l'observation exacte de la grandeur apparente des Diamètres du Soleil, mon Père a trouvé une autre courbe différente de l'Ellipse, qui sert a réprésenter fort exactement les mouvements vrais du Soleil, et ses divers distances à la Terre. Il suppose, que la Terre étant placée à l'un des foyers de cette courbe, le Soleil la parcoure par son mouvement propre, de manière que tirant de son centre aux deux foyers de la courbe deux lignes droites, le rectangle fait sur ces deux lignes soit toujours egal au rectangle fait sur la plus grande et la plus petite distance du Soleil à la Terre[2])."

Die so definierte Kurve heißt die Cassinische Kurve oder Cassinische Ellipse, oder auch Cassinisches Oval; andere nennen sie allgemeine Lemniskate[3]) oder einfacher Lemniskate[4]) mit Hinzufügung der Beiwörter gleichseitige[5]) für die Bernoullische, die wir im folgenden Kapitel behandeln werden, elliptische für die aus zwei Zügen, hyperbolische für die aus einem einzigen bestehende Cassinische Linie[6]). Wir werden dem ersteren dieser Namen den Vor-

1) Paris 1749, S. 149. S. auch die Artikel von D'Alembert in der *Encyclopédie méthodique* I (Paris-Liège, 1784) S. 632.

2) Eine andere Art, die hier betrachtete Kurve mit Fragen aus der Mechanik des Himmels in Verbindung zu bringen, sieht man aus der Schrift von E. Oekinghaus, *Die Cassinische Linie in ihrer Beziehung zur Bewegung der Himmelskörper* (Wochenschrift für Astronomie, 2. Ser., XXXI).

3) Steiner, *Einfache Konstruktion der Tangente an die allgemeine Lemniskate* (Crelles Journ. XIV, 1835).

4) Vechtmann, *Diss. inaug. phil. de curvis lemniscatae* (Göttingen, 1843).

5) Haton de la Goupillière, *Thèse de mécanique* (Paris, 1857) S. 9.

6) J. A. Serret, *Note sur les fonctions elliptiques de I^e espèce* (Liouvilles Journ. VIII, 1843).

zug geben, da alle anderen sich nur auf eine einzelne der Formen beziehen, welche die Kurve darbieten kann, wenn wir nicht den Namen Cassinoide gebrauchen wollen, den Montucla vor mehr als hundert Jahren schon einer gerechtfertigten Kritik unterzog[1]), und der wahrscheinlich von d'Alembert für den Gebrauch in der *Encyclopédie* gebildet wurde.

Nehmen wir als Abszissenachse eines rechtwinkligen kartesischen Systems die Verbindungslinie der beiden festen Punkte F_1, F_2 und als Anfang den Mittelpunkt O der Strecke F_1F_2, so sieht man alsbald, daß, wenn $2a$ den Abstand F_1F_2 und c^2 den Inhalt des gegebenen Rechtecks bedeutet, die Gleichung der Kurve ist

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+a)^2+y^2}=c^2,$$

oder

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)+a^4-c^4=0.^{2)} \quad . \; . \; . \quad (1)$$

Die Cassinische Kurve ist demnach von der vierten Ordnung und symmetrisch in bezug auf zwei zueinander senkrechte Achsen. Sie schneidet die Gerade F_1F_2 in zwei Punkten A_1, A_2, die immer reell sind, mit der Abszisse $\pm\sqrt{a^2+c^2}$, sowie in zwei weiteren Punkten B_1, B_2 mit der Abszisse $\pm\sqrt{a^2-c^2}$, die daher nur dann reell sind, wenn $a^2>c^2$. Die y-Achse dagegen wird immer in zwei imaginären geschnitten und zwei anderen, die nur dann reell sind, wenn $a^2<c^2$. Daraus ergibt sich, daß die Cassinische Kurve aus zwei Zügen besteht, wenn $a^2>c^2$, aus einem einzigen, wenn $a^2<c^2$. Den Fall $a^2=c^2$ schließen wir vorläufig aus, da wir uns mit diesem im folgenden Kapitel beschäftigen werden. Wir heben hervor, daß die Kurve zwei Doppeltangenten hat, nämlich die Geraden $\pm y=\frac{c^2}{2a}$; die zugehörigen Berührungspunkte haben die Abszissen $x=\frac{\pm\sqrt{4a^4-c^4}}{2a}$, sind daher nur dann reell, wenn $c<a\sqrt{2}$; in dem Grenzfalle $c=a\sqrt{2}$ fallen die beiden Berührungspunkte zusammen, und wir haben eine Undulationstangente. Aus letzterem geht hervor, daß nur, wenn $c>a\sqrt{2}$ die

---

1) „. . . . quelques auteurs se sont avisé de nommer cette ellipse la Cassinoïde, voulant par cette terminaison greque dire en un mot la figure ou la courbe de M. Cassini; mais ce nom est tout-à-fait inepte. On dit Sphéroïde, Conchoïde, etc. pour qui ressemble à une sphère, à une coquille etc. C'est le seul sens de mot greque εἶδος d'ou ces mots et leurs semblables sont derivés. Ainsi la Cassinoïde ne voudroit pas dire la courbe de M. Cassini, mais la figure ressemblant à M. Cassini. Si l'utilité de cette courbe en astronomie eut répondu aux idées de cet astronome, il eut fallu nommer l'ellipse Cassinienne, comme on dit ellipse Apollonienne, et non Apollonoïde.“ *Histoire des mathématiques,* nouv. éd., II. (Paris, 1799) S. 565.

2) Wir erinnern daran, daß wir diese Gleichung schon benutzt haben (in Nr. 61) um zu zeigen, daß die Cassinische Kurve eine spezielle spirische Linie ist.

Cassinische Kurve eine ovalähnliche Gestalt hat und nur dann die Ellipse zweiter Ordnung in der graphischen Darstellung der Bahnkurve der Gestirne ersetzen könnte[1]).

Um das Verhalten der Cassinischen Kurve im Unendlichen kennen zu lernen, setzen wir $x + iy = \frac{\xi}{\zeta}$, $x - iy = \frac{\eta}{\zeta}\cdot$ Die Gleichung (1) wird dann

$$(\xi^2 - a^2\zeta^2)(\eta^2 - a^2\zeta^2) - c^4\zeta^4 = 0\,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Cassinische Kurve in dem zyklischen Punkte $\xi = 0$, $\zeta = 0$ als Tangenten die beiden Geraden $\xi \pm a\zeta = 0$ hat; jede der beiden schneidet die Kurve in vier, mit dem bezüglichen Berührungspunkte zusammenfallenden Punkten; dasselbe gilt für den Punkt $\eta = 0$; $\zeta = 0$. Man schließt daraus: **Die beiden Kreispunkte sind Inflexions-Doppelpunkte für die Cassinische Kurve**[2]). Die entsprechenden Tangenten haben die Gleichungen

$$x + iy \pm a = 0\,, \qquad x - iy \pm a = 0$$

und schneiden sich in den beiden reellen Punkten mit den Koordinaten $(\pm a, 0)$; es sind die beiden Punkte F_1 und F_2, die sich somit als außerordentliche Brennpunkte der Kurve ergeben. Um die gewöhnlichen Brennpunkte zu finden, suchen wir diejenigen Tangenten von (2), welche durch den Punkt $\xi = 0$, $\zeta = 0$ gehen; setzen wir zu dem Zwecke $\xi = k\zeta$, dividieren die entstehende Gleichung durch ζ^2 und suchen diejenigen Werte auf, die man dem k erteilen muß, damit die resultierende Gleichung eine doppelte Wurzel $\frac{\eta}{\zeta}$ habe. Wir finden dann unschwer $k = \pm\sqrt{a^2 - \frac{c^4}{a^2}}$, und daher haben die vom ersten Kreispunkte gezogenen Tangenten die Gleichungen

$$x + iy = \frac{\pm\sqrt{a^4 - c^4}}{a}\,,$$

und ähnlich die vom zweiten

$$x - iy = \frac{\pm\sqrt{a^4 - c^4}}{a}\,.$$

Diese beiden konjugiert imaginären Geradenpaare schneiden sich in zwei reellen Punkten, und zwar sind deren Koordinaten

$$x = \pm\frac{\sqrt{a^4 - c^4}}{a}\,, \quad y = 0, \quad \text{wenn} \quad a^2 > c^2$$

und

$$x = 0\,, \quad y = \pm\frac{\sqrt{a^4 - c^4}}{a}\,, \quad \text{wenn} \quad a^2 < c^2.$$

---

1) Unter dieser Annahme findet die Kurve Anwendungen auch in der Architektur; m. s. Frézier, *Traité de stéréotomie* II (Straßburg, 1738) S. 99.

2) Cayley, *Note on the cassinian* (Mess. of Math. IV, 1875; The collected Papers, IX, S. 264).

Sie liegen daher auf der Verbindungslinie der außerordentlichen Brennpunkte, wenn die Kurve aus zwei Zügen besteht, dagegen auf der Mittelsenkrechten dieser Linie, wenn sie aus einem einzigen Zuge besteht.

91. Wenn die Cassinische Kurve aus zwei geschlossenen Zügen besteht, kann man, ohne imaginäre Größen einzuführen, die Gleichung (1) in folgender Form schreiben:

$$\frac{\sqrt{(x-\sqrt[4]{a^4-c^4})^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+\sqrt[4]{a^4-c^4})^2+y^2}}{\sqrt{x^2+(y-\sqrt[4]{a^4-c^4})^2}\cdot\sqrt{x^2+(y+\sqrt[4]{a^4-c^4})^2}}=\sqrt{\frac{a^2+\sqrt{a^4-c^4}}{a^2-\sqrt{a^4-c^4}}},$$

und diese drückt folgenden Satz von Wangerin aus: „Wenn man auf den Achsen einer aus zwei geschlossenen Zügen bestehenden Cassinischen Kurve, bei welcher der Abstand der außerordentlichen Brennpunkte $= 2a$ und das konstante Produkt der Abstände dieser beiden Punkte von der Kurve $= c^2$, die Strecken OX_1, OX_2, OY_1, OY_2 gleich $\sqrt[4]{a^4-c^4}$ abträgt, so kann die Kurve selbst als Ort solcher Punkte M definiert werden, für welche $\frac{MX_1 \cdot MX_2}{MY_1 \cdot MY_2} = Const.$ [1]).“

In höchst einfacher Weise kann unsere hier betrachtete Kurve in einem bipolaren Koordinatensystem dargestellt werden, wenn F_1 und F_2 die beiden Pole sind, nämlich durch die Gleichung

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = c^2.$$

Sie kann jedoch auch leicht dargestellt werden durch eine Gleichung zwischen dem Winkel $F_1MF_2 = \Theta$ und dem Radiusvektor ϱ, der vom Mittelpunkte O der Strecke F_1F_2 aus zu dem variabeln Punkte M der Kurve geht. Es ist nämlich

$$\overline{F_1F_2}^2 = \overline{MF_1}^2 + \overline{MF_2}^2 - 2\,MF_1 \cdot MF_2 \cdot \cos\Theta,$$

$$MF_1 \cdot MF_2 = c^2, \qquad \overline{MF_1}^2 + \overline{MF_2}^2 = 2a^2 + 2\varrho^2,$$

woraus sich ergibt

$$\varrho^2 = a^2 + c^2 \cdot \cos\Theta, \qquad (3)$$

welche Gleichung der Cassinischen Kurve sich in einigen Fällen als nützlich erweist [2]).

Die Definition der Cassinischen Kurve, von der wir ausgingen, eignet sich schlecht für die Zeichnung der Kurve, die punktweise Konstruktion ist jedoch in ziemlich bequemer Weise ausführbar, wenn man sich des folgenden, bis jetzt nicht bemerkten Satzes bedient: „Gegeben ein Kreis mit dem Zentrum O und dem Radius r (Taf. VI,

1) *Über eine Eigenschaft der Lemniskate* (Arch. Math. Phys. LV, 1873). Dieser ist ein Spezialfall eines allgemeinen Satzes von G. Darboux; siehe *Sur une classe remarquable de courbes et surfaces algébriques* (Paris, 1873), Art. 28 u. 32.

2) Oekinghaus, *Die Lemniskate* (Arch. Math. Phys. II Ser. VII u. VIII, 1889).

Fig. 52, a, b, c), einer seiner Durchmesser F_1F_2 und zwei Punkte A_1, A_2 auf seiner Verlängerung in gleichem Abstande von O. Man ziehe durch A_1 (oder A_2) eine beliebige Gerade, die den gegebenen Kreis in M und N schneidet. Die beiden Kreise mit den Mittelpunkten F_1 und F_2 und den Radien A_1M und A_1N (oder bzw. A_2M und A_2N) schneiden sich in zwei Punkten P, deren Ort eine Cassinische Kurve ist."

Um dies zu beweisen, nehmen wir O als Anfang, F_1F_2 als x-Achse; ist d der Abstand von A_1 und A_2 von O und ω der Winkel der beliebigen Geraden mit der x-Achse, so ist offenbar

$$\left.\begin{matrix} A_1M \\ A_1N \end{matrix}\right\} = d\cdot\cos\,\omega \pm \sqrt{r^2 - d^2\sin^2\omega}\,;$$

daher werden die Gleichungen der beiden variabelen Kreise, von denen im obigen Satze die Rede war, sein bzw.

$$x^2 + y^2 - 2rx = d^2(\cos^2\omega - \sin^2\omega) - 2d\cos\omega\sqrt{r^2 - d^2\sin^2\omega}\,,$$

$$x^2 + y^2 + 2rx = d^2(\cos^2\omega - \sin^2\omega) + 2d\cos\omega\sqrt{r^2 - d^2\sin^2\omega}\,.$$

Eliminieren wir ω, so erhalten wir den Ort der Punkte P. Nun sind diese beiden Gleichungen äquivalent mit den folgenden

$$x^2 + y^2 = d^2(\cos^2\omega - \sin^2\omega)\,, \qquad rx = d\cdot\cos\omega\sqrt{r^2 - d^2\sin^2\omega}\,;$$

die erste liefert

$$\cos^2\omega = \frac{x^2 + y^2 + d^2}{2d^2}, \quad \sin^2\omega = \frac{d^2 - x^2 - y^2}{2d^2};$$

daher wird die zweite

$$(x^2 + y^2)^2 = 2r^2(x^2 - y^2) + d^2(2r^2 - d^2)\,. \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Diese Gleichung, indem sie die Gestalt von (1) hat, beweist den obigen Satz. Da sie sich nicht ändert, wenn man das Vorzeichen von d wechselt, so erhält man dieselbe Cassinische Kurve, wenn man statt des Punktes A_1 den Punkt A_2 benutzt. Gleichung (4) wird völlig identisch mit (1), wenn man $r = a$, $d = \sqrt{a^2 + c^2}$ setzt.

Demnach (zufolge des oben Bewiesenen) hat der feste Kreis zum Durchmesser die Verbindungslinie der beiden außerordentlichen Brennpunkte, und die beiden festen Punkte sind die beiden stets reellen Punkte, welche die Kurve auf dieser Verbindungslinie hat; sie besteht aus einem oder zwei Zügen, je nachdem $d \gtrless r\sqrt{2}$.

92. Für die Konstruktion der Tangenten und Normalen der Cassinischen Kurve sind verschiedene Methoden angegeben worden. Unter denjenigen, welche die Normale liefern, scheint diejenige den Vorzug zu verdienen, zu der uns die geometrische Rechnung führt[1]);

1) G. Peano, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Turin, 1887) S. 142.

sie lautet folgendermaßen: Um in einem Punkte M der Kurve, deren Brennpunkte F_1 und F_2 sind, die Normale zu konstruieren (s. Taf. VII, Fig. 53), trage man auf dem Vektor MF_2 das Stück $MG_2 = MF_1$ und auf MF_1 das Stück $MG_1 = MF_2$ ab. Wenn nun N die vierte Ecke des Parallelogramms ist, das MG_1 und MG_2 als anstoßende Seiten hat, so ist MN die Normale in M zur Kurve.

Als Folgesatz ergibt sich daraus eine von Steiner[1]) ohne Beweis angegebene Konstruktion der Tangente. Bezeichnen wir nämlich mit ϱ_1 und ϱ_2 die beiden Vektoren F_1M und F_2M und die Winkel NMF_1 und NMF_2 mit φ_1 und φ_2, so ist ersichtlich

$$\frac{\varrho_1}{\sin\varphi_1} = \frac{\varrho_2}{\sin\varphi_2}.$$

Wir ziehen nun die Senkrechten in F_1, F_2, M bzw. zu MF_1, MF_2, MN und nennen T_1, T_2 die Schnitte der dritten (welche die Tangente ist) mit den beiden ersteren. Dann erhalten wir aus den beiden rechtwinkligen Dreiecken MF_1T_1 und MF_2T_2

$$MT_1 = \frac{\varrho_1}{\sin\varphi_1}, \quad MT_2 = \frac{\varrho_2}{\sin\varphi_2},$$

und demnach wegen der vorigen Gleichung $MT_1 = MT_2$. Wir schließen daraus mit Steiner: Wenn man in F_1 und F_2 zu den beiden Vektoren MF_1 und MF_2 die Senkrechten errichtet und dann durch M diejenige Gerade zieht, welche, von diesen begrenzt, in M halbiert wird, so wird letztere die Tangente in M an die Cassinische Kurve sein, deren Brennpunkte F_1 und F_2 sind.

Eine leichte Rechnung liefert folgenden Ausdruck für den Krümmungsradius R in einem Punkte (ϱ) der Kurve[2])

$$R = \frac{2c^2\varrho^3}{a^4 - c^4 + 3\varrho^4},$$

und da nach Einführung von Polarkoordinaten die Gleichung (1) sich schreiben läßt

$$\varrho^4 - 2a^2\varrho^2\cos 2\omega + a^4 - c^4 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

so hat man auch

$$R = \frac{c^2\varrho}{\varrho^2 + a^2\cdot\cos 2\omega}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Es ergibt sich daraus, daß die Wendepunkte der Cassinischen Kurve bestimmt werden durch ihre Schnittpunkte mit der Kurve $\varrho^2 + a^2\cdot\cos 2\omega = 0$, welche eine Bernoullische Lemniskate ist (siehe Nr. **93**), und da diese unabhängig von der Konstanten c, so haben

1) S. die vorhin zitierte Abh. *Einfache Konstruktion der Tangente an die allg. Lemniskate.*

2) Vgl. z. B. Schlömilch, *Übungsbuch zum Studium der höh. Analysis* I. (3. Aufl. Leipzig, 1878) S. 96.

alle Cassinischen Kurven, welche dieselben außerordentlichen Brennpunkte gemeinsam haben, ihre Wendepunkte auf einer mit diesen konfokalen Lemniskate. — Wir wollen noch erwähnen, daß die erste Polare des Anfangspunktes in bezug auf die Kurve (1) zerfällt in die unendlich ferne Gerade und die Hyperbel mit der Gleichung $a^2(x^2-y^2)=a^4-c^4$; da man nun durch Elimination von c aus dieser Gleichung und Gl. (1) findet $\varrho^2-a^2\cdot\cos 2\omega=0$, so ist der Ort der Berührungspunkte für die Tangenten an alle Cassinischen Kurven mit denselben außerordentlichen Brennpunkten, gezogen von dem gemeinsamen Mittelpunkte aus, ebenfalls eine Bernoullische Lemniskate.

Bezüglich der Quadratur und Rektifikation der Cassinischen Kurve wollen wir folgende Resultate anführen:

1) Die Berechnung der Fläche der Cassinischen Kurve hängt von elliptischen Integralen ab; die von der ganzen Kurve umschlossene Fläche wird durch Integrale erster Gattung ausgedrückt, wenn die Kurve aus zwei Zügen besteht, durch Integrale der zweiten Gattung, wenn sie aus einem einzigen besteht[1]).

2) Jeder Bogen einer Cassinischen Linie kann durch die Summe zweier elliptischer Integrale mit komplementären Moduln ausgedrückt werden[1]); die natürliche Gleichung der Cassinischen Kurve enthält daher elliptische Integrale[2]) und erweist sich infolge dessen als von geringerer praktischer Wichtigkeit.

Vierzehntes Kapitel.

Kurven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten.

93. Wir haben uns noch mit einem bemerkenswerten Spezialfalle der Cassinischen Kurven zu beschäftigen, der entsteht, wenn man in den vorigen Entwickelungen $c=a$ setzt. Alsdann wird die Gleichung (1) aus Nr. **90**

$$(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)=0 \qquad (1)$$ [3]).

1) J. A. Serret, *Note sur les fonctions elliptiques de 1. espèce* (Liouvilles Journ. VIII, 1843). Vgl. Serret-Harnack-Scheffers II (Leipzig, 1907) S. 305 bis 310.

2) Cesàro-Kowalewski, *Natürliche Geometrie*, S. 50ff.

3) Durch eine leichte Koordinatenverwandlung bekommt diese Gleichung die folgende Form
$$(x^2+y^2)^2=4a^2xy,$$
welche auf die Betrachtung der Gleichung führt
$$(x^2+y^2+2xy\cos\alpha)^2=4a^2xy,$$
die eine sogenannte *schiefe Lemniskate* darstellt (G. de Longchamps, *Cours de problèmes usw.*, II, S. 374).

Sie findet sich zum erstenmal in einem berühmten Aufsatze, der in den *Acta eruditorum* vom September 1694 steht, unter dem Titel *Jacobi Bernoulli Constructio curvae accessus et recessus aequabilis, ope rectificationis curvae cujusdam algebraicae, addenda nuperae solutionis mensis Junii.* Daselbst erscheint die entsprechende Kurve als analytisches Hilfsmittel und wird bezeichnet als „curva quatuor dimensionum quae hac aequatione exprimitur $xx + yy = a\sqrt{xx - yy}$, quaeque circum axe BG [$2a$] constituta formam refert jacentis notae octonarii ∞, seu complicitae in nodum fasciae, sive lemnisci[1]), d'un noeud de ruban Gallis[2]).“ Von dieser Ähnlichkeit der Gestalt spricht auch Johann Bernoulli in dem Briefe an Varignon, der sich im *Journal des Savants* vom 2. Dez. 1697 findet, wo die Rede ist von der „courbe, que mon frère comparait autrefois à un noeud de ruban“[3]), jedoch war sie noch nicht mit dem Namen Lemniskate bezeichnet, der bestimmt war, für immer in dem Wörterbuche der Mathematiker festen Fuß zu fassen infolge des oben angeführten Artikels des älteren Bernoulli. — Die Lemniskate hat ständig die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich gezogen, nicht wegen der Anwendungen, denen sie ihre Entstehung verdankt, sondern wegen der wichtigen Untersuchungen, die der Graf Fagnano an ihr anstellte[4]); er beschäftigte sich mit der Rektifikation derselben und gelangte zu Schlüssen, die in geeigneter Weise entwickelt und verallgemeinert den Kern der Theorie der elliptischen Funktionen bilden; wir erinnern nur daran, daß er bewies, daß jeder Lemniskatenbogen geometrisch in n gleiche Teile geteilt werden kann, wenn n eine der Formen $2 \cdot 2^m$, $3 \cdot 2^m$, $5 \cdot 2^m$ hat.

Die Geometer der Epoche Fagnanos scheinen die Lemniskate mehr als Ausgangspunkt analytischer Untersuchungen betrachtet zu haben, als um geometrische Eigenschaften an ihr zu entdecken; zu dieser Ansicht führt uns die sonderbare Tatsache, daß lange Zeit hindurch der Umstand unbekannt blieb, daß die Bernoullische Lemniskate ein Spezialfall der Cassinischen Kurve ist. Um diese überraschende Unkenntnis zu beweisen, mögen folgende Worte genügen, mit denen der Artikel über die Lemniskate, den D'Alembert für die *Encyclopédie méthodique* schrieb, abschließt: „Il peut y avoir plusieurs autres courbes en 8 de chiffre. Voyez, par exemple, Ellipse de

1) Von λημνίσκος, Schleife in Form einer 8.

2) S. *Jac. Bernoulli opera* I. (Genevae, 1744) S. 609; vgl. ebenfalls 611.

3) *Joh. Bernoulli opera* I. S. 213.

4) *Produzioni matematiche* II. (Pesaro, 1750) S. 356 ff., 413 und 415. Vgl. auch D. Bierens de Haan, *Dissertatio mathem. inaug. de Lemniscata Bernoulliana* (Amsterdam, 1847) § 5; Enneper, *Elliptische Functionen* (2. Aufl., Halle, 1890) S. 531 ff.; Bellacchi, *Introduzione storica alla teoria delle funzioni ellittiche* (Firenze, 1894) S. 12 ff.

Cassini: mais celle dont nous venons de parler est la plus simple[1])." Die Identität der beiden Kurven wurde im Jahre 1806 öffentlich bewiesen von G. Saladini[2]); es scheint jedoch, daß sie schon 24 Jahre früher von Pietro Ferroni bemerkt worden ist[3]), in dem nunmehr vergessenen Werke *Magnitudo exponentialium* etc. (1782), dem es jedenfalls nicht zu danken ist, daß diese Tatsache heute allgemein bekannt ist.

94. Die Gleichung (1) zeigt, daß der Anfang ein Doppelpunkt der Kurve ist, dessen Tangenten die Halbierungslinien der Achsenwinkel sind; diese sind auch Inflexionstangenten; erinnern wir uns dessen, was wir für die Cassinischen Linien im allgemeinen und über ihr Verhalten im Unendlichen nachgewiesen haben (Nr. **90**), so können wir die Behauptung aufstellen: **Die Bernoullische Lemniskate ist eine Kurve vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten, zwei derselben liegen in den zyklischen Punkten der Ebene.** Vermittels derselben Gleichung wird auch leicht bewiesen: **Die Lemniskate ist die Fußpunktkurve einer gleichseitigen Hyperbel in bezug auf das Zentrum** (vgl. Nr. **95**); und ferner **ist sie diejenige Kurve, die man erhält, wenn man eine gleichseitige Hyperbel einer Inversion unterzieht, deren Pol in das Zentrum derselben fällt.** — Eine Gleichung von der Form (1) erhält man ebenfalls, wenn man z aus folgenden beiden Gleichungen eliminiert:

$$x^2 + y^2 = p^2 - 2pz; \quad y^2 + z^2 = r^2.$$

Demnach ist die Bernoullische Lemniskate die Orthogonalprojektion der Schnittlinie eines Zylinders und eines geeignet gelegenen Rotationsparaboloides[4]). Andere Arten, die Lemniskate zu erzeugen oder zu beschreiben ergeben sich, wenn man beachtet, daß sie sowohl ein Spezialfall der Cassinischen Kurve (s. Taf. VII, Fig. 52*b*) als auch der Boothschen Lemniskate (s. Nr. **65**, besonders die Maclaurinsche Konstruktion, Taf. III, Fig. 27*b*), der Wattschen Kurve (Nr. **107**), und der Lissajousschen Kurven ist, und daß man daher auf sie alle Erzeugungsmethoden jener Kurven anwenden kann[5]).

---

1) *Encyclopédie méthodique* II. (Paris-Liège, 1785) S. 266.

2) S. die Abhandlung *Della discesa de gravi per la lemniscata e della dimostrazione che questa curva è una della famiglia dell' elissi Cassiniane* (Mem. Ist. Ital. I, II. Teil, Bologna 1806).

3) S. P. Ferroni, *Prodromo d'osservazioni sopra il trattato di calcolo integrale pubblicato in Parigi dal sig. Marchese de Condorcet* (Mem. Società ital. delle Scienze V, 1790).

4) G. Stiner, *Die Bernoullische Lemniscate, dargestellt als Orthogonalprojection von Raumkurven* (Progr. Frauenfeld, 1897).

5) M. s. ferner H. de Vries, *Über eine einfache Erzeugungsweise der gewöhnlichen Lemniskate* (Nieuw Archief Wisk., 2. Ser., V, 1903).

Durch Einführung von Polarkoordinaten ϱ, ω, wird Gleichung (1) zu

$$\varrho^2 = 2a^2 \cos 2\omega. \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Davon wollen wir sogleich eine Anwendung machen. Nennen wir den Winkel der Normalen im Punkte (x, y) zur Kurve (1) mit der x-Achse ν, so haben wir

$$\operatorname{tg} \nu = -\frac{dx}{dy} = -\frac{a^2 + (x^2 + y^2)}{a^2 - (x^2 + y^2)} \frac{x}{y},$$

oder auch wegen (2)

$$\operatorname{tg} \nu = -\frac{\sin \omega\,(1 + 2\cos 2\omega)}{\cos \omega\,(1 - 2\cos 2\omega)} = \frac{3\sin \omega - 4\sin^3 \omega}{4\cos^3 \omega - 3\cos \omega} = \frac{\sin 3\omega}{\cos 3\omega} = \operatorname{tg} 3\omega;$$

woraus sich ergibt:

$$\nu = 3\omega, \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

eine sehr bemerkenswerte Beziehung, die von Vechtmann[1]) entdeckt ist, und die nicht nur eine leichte Konstruktionsmethode für die Normale in einem beliebigen Punkte der Lemniskate liefert (und daher auch für die Tangente), sondern auch beweist, daß das Problem der Dreiteilung des Winkels der Hauptsache nach identisch mit dem ist, an eine Lemniskate eine Normale bzw. Tangente von gegebener Richtung zu ziehen. So z. B. sind die Punkte, in denen die Normale parallel zu der Halbierungslinie des Winkels der positiven Achsen ist, diejenigen, für welche ω die Werte hat $\frac{\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{12\pi}{12}$, so sind die Punkte, für welche $\omega = \pm\frac{\pi}{6}$ die Kulminationspunkte usw.

Dieselbe Gleichung (2) kann auch zum Beweise eines Satzes von J. Steiner dienen[2]): Zeichnen wir zu dem Zwecke (s. die Fig. 54 auf Taf. VII) außer den Brennpunkten (vgl. S. 210) F_1, F_2 und den Endpunkten A_1, A_2 der Lemniskatenachse noch die zu F_1, F_2 konjugiert harmonischen Punkte in bezug auf das Punktpaar A_1, A_2 nämlich $F_1' F_2'$. Da nun

$$OF_1 = OF_2 = a, \qquad OA_1 = OA_2 = a\sqrt{2},$$
$$OF_1 \cdot OF_1' = \overline{OA_1}^2, \quad OF_2 \cdot OF_2' = \overline{OA_2}^2,$$

so ist $OF_1' = OF_2' = 2a$. Man ziehe nun durch O einen beliebigen Strahl r, der mit der Achse den Winkel ω bildet, und die Kurve in M_1 und M_2 schneidet, projiziere auf diesen die Punkte F_1', F_2' in H_1 und H_2, bestimme ebenfalls die Schnitte von r mit dem Kreise, dessen Durchmesser $F_1' F_2'$ ist; dann hat man

$$H_1 M_1 \cdot H_1 M_2 = \overline{OH_1}^2 - \overline{OM_1}^2 = (2a\cos\omega)^2 - \varrho^2$$
$$= 4a^2\cos^2\omega - 2a^2\cos 2\omega = 2a^2.$$

---

1) *Diss. inaug. phil. de curvis lemniscatae* (Göttingen, 1843).
2) *Aufgaben und Lehrsätze* (Crelles Journ. XIV, 1835).

Demnach ist das Rechteck $H_1 M_1 \cdot H_1 M_2$ konstant, und zwar, wie wir sogleich dartun werden, **gleich der Gesamtfläche der Kurve.**

Bezeichnen wir mit A_ω die vom Radiusvektor beschriebene Fläche der Kurve, wenn der Polarwinkel von 0 bis ω geht, so haben wir wegen Gleichung (2)

$$A_\omega = \frac{1}{2}\int_0^\omega \varrho^2 d\omega = a^2 \int_0^\omega \cos 2\omega \cdot d\omega = \frac{a^2}{2}\sin 2\omega;$$

im speziellen ist

$$A_{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{2};$$

da nun die ganze Fläche $= 4\, A_{\frac{\pi}{4}}$, so ergibt sich, daß sie gleich $2a^2$ ist, wie schon oben angegeben wurde und wie Fagnano zuerst bewiesen hat[1]).

Den für A_ω gefundenen Ausdruck kann man auch schreiben

$$A_\omega = A_{\frac{\pi}{2}} \sin 2\omega. \qquad \qquad (4)$$

Diese Beziehung führt zur Lösung folgender Aufgabe: „Auf der Lemniskate einen Radiusvektor zu finden, der den ersten Quadranten in zwei Flächenstücke teilt, die in einem gegebenen Verhältnisse $\frac{\lambda}{\mu}$ stehen[2])." Indem dann nämlich

$$\frac{A_\omega}{A_{\frac{\pi}{4}} - A_\omega} = \frac{\lambda}{\mu},$$

so hat man wegen (4)

$$\frac{\sin 2\omega}{1 - \sin 2\omega} = \frac{\lambda}{\mu}, \quad \text{und daher} \quad \sin 2\omega = \frac{\lambda}{\lambda + \mu},$$

wodurch dann ω bestimmt ist. Wenn z. B. $\lambda = \mu$, so ist

$$\sin 2\omega = \frac{1}{2}, \quad \text{daher} \quad \omega = \frac{\pi}{12};$$

der Radiusvektor hat daher als Endpunkt einen solchen (s. oben), daß die entsprechende Tangente der zweiten Halbierungslinie des Achsenwinkels parallel läuft.

---

1) *Produzioni matematiche* II (Pesaro, 1750) S. 343 u. 344. — Dieses Resultat, das man heute mit solcher Leichtigkeit erhält, daß es von geringer Wichtigkeit zu sein scheint, war von großer Bedeutung, als es zuerst erhalten wurde, da es zum Nachweise diente, daß die Ansicht Tschirnhausens eine irrige war (Acta erudit. 1691, S. 437 u. 1695, S. 490), daß es unmöglich sei, die Quadratur einer Kurve, die aus mehreren Blättern bestehe, zu erhalten; Fagnano war so durchdrungen von dem Werte seiner Erfindung, daß er auf das Titelblatt seines großen Werkes die Figur der Lemniskate setzte mit der Inschrift:

Multifariam divisa atque dimensa.
Deo veritatis gloria.

2) Bierens de Haan, die S. 215 angeführte *Dissertatio*.

Aus der Gleichung (2) findet man ferner

$$ds = \frac{2a^2 \cdot d\varrho}{\sqrt{4a^4 - \varrho^4}} \cdot {}^{1)} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Außerdem liefert Gleichung (6) von Nr. **89** folgenden Wert des Krümmungsradius:

$$R = \frac{2a^2}{3\varrho}, \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

woraus sich die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes leicht ergibt[2]. Eliminieren wir ϱ aus (5) und (6) und setzen zur Abkürzung $\frac{\sqrt{2}}{3} a = \alpha$, so folgt

$$s = 3 \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{\alpha}\right)^4 - 1}} \quad \ldots \ldots \quad (7)$$

als natürliche Gleichung der Lemniskate[3].

95. Da die Lemniskate eine Kurve vierter Ordnung mit drei Knotenpunkten ist, so ist sie eine rationale Kurve, und man kann daher die Koordinaten ihrer Punkte als rationale Funktionen eines Parameters ausdrücken. In der Tat läßt sich die Gleichung (1) durch folgende beiden ersetzen:

$$x = a\sqrt{2}\,\frac{\lambda + \lambda^3}{1 + \lambda^4}, \qquad y = a\sqrt{2}\,\frac{\lambda - \lambda^3}{1 + \lambda^4} \cdot {}^{4)} \quad \ldots \quad (8)$$

Aus dieser Darstellung ergibt sich vor allem Folgendes[5]: Wenn man

---

1) Die Gl. (5) beweist, daß man die Rektifikation der Lemniskate durch spezielle elliptische Integrale ausführen kann. Schöne Folgerungen hieraus enthält der Aufsatz von Ch. Sturm, *Demonstration de deux theorèmes de géométrie* (Ann. de Mathém., XIII, 1822—23). Die Gl. (5) wurde 1903 von P. Kokott benutzt um die folgende Aufgabe zu lösen: „Auf welcher Kurve muß sich eine Lemniskate wälzen, damit sich ihr Mittelpunkt auf der Geraden weiterschiebe, welche in der Anfangsstellung senkrecht zur Hauptachse steht?" (Arch. Math. Phys., 3. Ser., VI, S. 341). Die gesuchte Kurve hat die folgende kartesische Gleichung

$$x = \int_0^y \frac{y^2\, dy}{\sqrt{1 - y^4}}.$$

Vgl. auch P. Kokott, *Das Abrollen von Kurven bei geradliniger Bewegung eines Punktes* (Das., XI, 1906) und einen Aufsatz gleichen Titels von H. Wieleitner (Ebenda).

2) Die Gleichung der Evolute der Lemniskate wurde von Bierens de Haan (a. a. O. S. 30) berechnet.

3) Cesàro-Kowalewski, *Natürliche Geometrie* S. 51.

4) Zuerst von J. A. Serret angegeben (Liouvilles Journ. X, 1845, S. 258).

5) Weitere Folgerungen, außer den im Texte gegebenen, siehe in der schönen Abhandlung von Em. Weyr, *Die Lemniskate in rationaler Behandlung* (Prager Abh. VI, 1874), und in einer neueren (böhmisch geschriebenen) Arbeit von K. Zahradnik, *Beiträge zur Theorie der Lemniskate* (Càsopis XXVIII, 1899).

λ in $\frac{1}{\lambda}$ verwandelt, so bleibt der Wert von x unverändert; der von y wechselt nur sein Vorzeichen; daher gehören diese Werte des Parameters zwei Punkten der Kurve an, die symmetrisch in bezug auf Ox liegen. Hingegen entsprechen zweien Kurvenpunkten, die symmetrisch in bezug auf das Zentrum liegen, zwei gleiche, aber entgegengesetzte Werte von λ. Gehören diese einem Diameter an, der mit der Achse den Winkel δ bildet, so genügen diese der Gleichung

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2},$$

oder auch

$$\lambda^2 = \frac{1-\operatorname{tg}\delta}{1+\operatorname{tg}\delta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Aus (8) ergibt sich folgende Gleichung für die Verbindungslinie der Punkte (α), (β):

$$(1+\alpha\beta)\left[(\alpha+\beta)^2-(1+\alpha^2\beta^2)\right]x+(1-\alpha\beta)\left[(\alpha+\beta)^2\right.$$
$$\left.+(1+\alpha^2\beta^2)\right]y-2\sqrt{2}\cdot a\alpha\beta(\alpha+\beta)=0; \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

im besonderen ist

$$(1+\lambda^2)(4\lambda^2-1-\lambda^4)x+(1-\lambda^2)(4\lambda^2+1+\lambda^4)y-4\sqrt{2}\cdot a\lambda^3=0 \quad (11)$$

die Gleichung der Tangente an die Lemniskate im Punkte (λ). Da (11) vom 6ten Grade in λ ist, so ergibt sich — übereinstimmend mit dem was die Plückerschen Formeln angeben —: **Die Lemniskate ist von der sechsten Klasse.** Die zu einer gegebenen Richtung parallelen Tangenten haben Berührungspunkte, die sich aus der Lösung folgender Gleichung ergeben

$$\frac{(1+\lambda^2)(4\lambda^2-1-\lambda^4)}{(1-\lambda^2)(4\lambda^2+1+\lambda^2)} = Const.$$

Diese kann man nun infolge der Gleichung (9) schreiben

$$\frac{1-3\operatorname{tg}^2\delta}{3\operatorname{tg}\delta-\operatorname{tg}^3\delta} = Const., \quad \text{d. h.} \quad \operatorname{tg}3\delta = Const.;$$

bezeichnet man nun eine der Wurzeln dieser Gleichung mit δ_0, so sind die beiden anderen $\delta_0+\frac{\pi}{3}$, $\delta_0+\frac{2\pi}{3}$; daraus folgt: **Die Lemniskate hat sechs Tangenten parallel zu einer gegebenen Richtung; die Berührungspunkte derselben liegen auf drei Diametern, die miteinander einen Winkel $\frac{\pi}{3}$ bilden.**

Wiederum aus (8) folgt als Kollinearitätsbedingung für drei Punkte (λ_1), (λ_2), (λ_3)

$$\lambda_2\lambda_3+\frac{1}{\lambda_2\lambda_3}+\lambda_3\lambda_1+\frac{1}{\lambda_3\lambda_1}+\lambda_1\lambda_2+\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}=0, \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

und als Bedingung der Konzyklität für die Punkte (λ_1), (λ_2), (λ_3), (λ_4)

$$\lambda_1\cdot\lambda_2\cdot\lambda_3\cdot\lambda_4 = 1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Machen wir in (12) $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \xi$, so wird diese

$$\lambda + 2\xi + \lambda\xi^2(\xi^2 + 2\lambda\xi) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12')$$

Ist (λ) gegeben, so dient diese zur Bestimmung der Berührungspunkte der von diesem Punkte an die Lemniskate gezogenen Tangenten; wenn ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 die Parameter der Berührungspunkte sind, so wird man haben

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 2\lambda, \quad \xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_4 + \xi_4\xi_1 + \xi_2\xi_4 + \xi_3\xi_1 = 0,$$
$$\xi_2\xi_3\xi_4 + \xi_1\xi_3\xi_4 + \xi_1\xi_2\xi_4 + \xi_1\xi_2\xi_3 = -\frac{2}{\lambda}, \quad \xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 = 1;$$

demnach, durch Elimination von ξ_4

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_1\xi_2\xi_3(\xi_2\xi_3 + \xi_3\xi_2 + \xi_1\xi_2) = 0.$$

Diese zeigt, mit Hilfe der Gleichung (12), daß die drei Punkte (ξ_1), (ξ_2), (ξ_3) in gerader Linie liegen; dasselbe kann man wiederholen für die Punkte (ξ_1), (ξ_2), (ξ_4) und kann also schließen: **Die Berührungspunkte der vier an eine Lemniskate von einem beliebigen ihrer eigenen Punkte gezogenen Tangenten liegen auf einer geraden Linie.** Da die quadratische Invariante der linken Seite der Gleichung (12′) als biquadratische Form in ξ betrachtet gleich Null ist, so bilden jene vier Tangenten (also auch ihre Berührungspunkte) eine äquianharmonische Gruppe. Die Gleichung der Geraden, welche jene vier Berührungspunkte enthält, lautet (wenn (λ) der beliebig auf der Kurve gewählte Punkt ist):

$$(1 + \lambda^2)x + (1 - \lambda^2)y + a\sqrt{2}\,\lambda = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Die so dargestellte Gerade ist in bezug auf das Zentrum der Kurve symmetrisch zu der anderen

$$(1 + \lambda^2)x + (1 - \lambda^2)y - a\sqrt{2}\,\lambda = 0;$$

nun halbiert diese unter rechtem Winkel die Verbindungslinie des Punktes (λ) mit dem Kurvenzentrum; demnach: **Um die Tangenten an die Lemniskate von einem ihrer Punkte zu konstruieren, verbinde man diesen Punkt mit dem Zentrum, errichte auf dieser Strecke die Mittelsenkrechte, die zu dieser in bezug auf den Mittelpunkt symmetrische Gerade schneidet die Kurve in den Berührungspunkten der gesuchten Tangenten.**

Wir können noch hinzufügen, daß alle Geraden, die durch eine analoge Gleichung wie (14) dargestellt werden, eine gleichseitige Hyperbel umhüllen, deren Gleichung $x^2 - y^2 = \frac{a^2}{2}$ ist.

Der Oskulationskreis an die Lemniskate im Punkte (λ) schneidet diese noch in einem weiteren Punkte (μ), welchen man den Satellit- oder Begleitpunkt von (λ) nennt; zwischen den Parametern λ und μ

besteht dann (infolge Gl. (13)) folgende Beziehung:

$$\lambda^3\mu = 1; \qquad (15)$$

diese beweist also, **daß die Satellitpunkte von vier konzyklischen Punkten ebenfalls wieder konzyklisch sind.** Nun hat die Gerade $(\lambda)(\mu)$ die Gleichung

$$(\lambda^6 + 1)\,x + (\lambda^6 - 1)\,y - 2a\sqrt{2}\,\lambda^3 = 0, \qquad (16)$$

da nun diese Gleichung dem Lote angehört, das vom Punkte (μ) mit dem Parameter $\frac{1}{\lambda^3}$ auf den zugehörigen Radiusvektor gefällt wird, so ist der Winkel $(\lambda)(\mu)\,O$ ein rechter. Damit ist gezeigt: **Die Lemniskate ist die Fußpunktkurve** der von der Geraden (16) eingehüllten Kurve in bezug auf den Punkt O, d. i. von **der gleichseitigen Hyperbel** $x^2 - y^2 = 2a^2$; hierdurch ist die in Nr. **94** aufgestellte Behauptung bewiesen. — Aus (15) ergibt sich auch, daß durch jeden Punkt (μ) der Lemniskate drei Kreise gehen, die sie anderswo oskulieren; sind $(\lambda_1)(\lambda_2)(\lambda_3)$ die Oskulationspunkte, so hat man

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \quad \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_2\lambda_3 = 0, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \frac{1}{\mu}\cdot$$

Daraus leitet man ab, daß sie der Geraden

$$(1 + \mu^2)\,x + (1 - \mu^2)\,y - 2\sqrt{2}\,\mu = 0$$

angehören. Beachtet man, daß diese Gleichung die im Punkte (μ) auf dem zugehörigen Radiusvektor errichtete Senkrechte darstellt, so kann man den Schluß ziehen: **Durch jeden Punkt einer Lemniskate gehen drei Kreise, die sie anderswo oskulieren, die Schmiegungs-(Oskulations-)punkte liegen auf der in diesem Punkte zum Radiusvektor errichteten Senkrechten.**

96. Die Entwickelungen in der vorigen Nr. haben hinlänglich gezeigt, wie nützlich bei der Lemniskate die Darstellung der Koordinaten vermittelst rationaler Funktionen eines Parameters ist. Aber es gibt noch einen weiteren analytischen Kunstgriff, den man in anderen Fällen herbeiziehen kann. Nehmen wir nämlich F_1 und F_2 als Fundamentalpunkte eines bipolaren Koordinatensystems, ϱ_1 und ϱ_2 so ist

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 = a^2$$

die Gleichung der Lemniskate; man kann setzen

$$\varrho_1 = ae^u, \quad \varrho_2 = ae^{-u},$$

wo u einen Parameter bedeutet; oder auch wenn wir die hyperbolischen Funktionen einführen:

$$\varrho_1 = a(\operatorname{Cos} u + \operatorname{Sin} u), \quad \varrho_2 = a(\operatorname{Cos} u - \operatorname{Sin} u). \qquad (17)$$

Um hier von diesen Formeln eine Anwendung zu machen, zeichnen wir uns (s. Fig. 54) die Halbierungslinie M_1D des Winkels $F_1M_1F_2$. Dann haben wir

$$F_1D + F_2D = 2a, \quad \frac{F_1D}{F_2D} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2}$$

und wegen Gleichung (17)

$$F_1D = a(1 + \mathfrak{Tg}\, u), \quad F_2D = a(1 - \mathfrak{Tg}\, u), \quad OD = a\,\mathfrak{Tg}\, u\,.$$

Außerdem ist nach einem bekannten elementar geometrischen Satze

$$\overline{F_1M_1} \cdot \overline{F_2M_1} = \overline{M_1D}^2 + \overline{F_1D} \cdot \overline{F_2D},$$

und wenn wir also die gefundenen Werte einsetzen

$$M_1D = a\,\mathfrak{Tg}\, u\,.$$

Daraus folgt, daß $M_1D = OD$, welche Beziehung durch folgenden Satz ausgedrückt wird: **Die beiden Radienvektoren eines beliebigen Lemniskatenpunktes bilden mit der Verbindungslinie der beiden Brennpunkte ein Dreieck, welches die Eigentümlichkeit hat, daß die Halbierungslinie des Winkels der beiden Vektoren an Länge gleich ist der Entfernung ihres Endpunktes vom Zentrum der Kurve**[1]).

Noch in anderer Weise können die hyperbolischen Funktionen bei der Lemniskate in Anwendung gebracht werden: Man setze

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2} = \mathfrak{Tg}\,\frac{u}{2}$$

und benutze die Gleichung (2); dann findet man als Ausdruck L für einen Lemniskatensektor:

$$L = \frac{1}{2}\int_0^\omega \varrho^2 \cdot d\omega = \frac{a^2}{2}\left(\int_0^u \frac{du}{\mathfrak{Cos}^3 u} - \int_0^u \frac{du}{\mathfrak{Cos}\, u}\right) = a^2\,\frac{\mathfrak{Sin}\, u}{\mathfrak{Cos}^2 u};$$

wenn man außerdem noch vom Punkte F_1 das Lot F_1K auf den Radiusvektor OM_1 fällt (s. Fig. 54), so erhält man ein Dreieck OF_1K, dessen Flächeninhalt ist

$$T = \frac{1}{2}\,OK \cdot F_1K = \frac{a^2 \sin\omega \,.\, \cos\omega}{2} = \frac{a^2\,\mathfrak{Sin}\, u}{2\,\mathfrak{Cos}^2 u};$$

folglich ist $T = \frac{1}{2}L$. Dies besagt: **Das von einem Brennpunkte der Lemniskate auf einen beliebigen Radiusvektor des Zentrums gefällte Lot halbiert die zwischen Achse, Radiusvektor und Kurve gelegene Fläche**[2]).

Bevor wir die Kurve, mit der wir uns bis jetzt beschäftigt haben, verlassen, können wir nicht umhin, noch auf folgende schöne mecha-

1) W. Heß, *Eigenschaften der Lemniscate* (Zeitschr. Math. Phys. XXVI, 1883).
2) S. die vorige Note.

nische Aufgabe hinzuweisen: „Die Kurve von der Beschaffenheit zu finden, daß ihre Bogen von einem festen Punkte an gerechnet, von einem schweren Punkte, der anfänglich in Ruhe ist, in derselben Zeit durchlaufen werden wie ihre Sehnen.“ J. Bonati[1]), welcher zuerst dieses Problem aufgestellt hat, fand die Gleichung und die Gestalt der gewünschten Linie, ohne doch ihre Natur zu erkennen. G. F. Malfatti[2]) bemerkte, daß sie eine besondere Cassinische Kurve sei. Zuletzt bewies G. Saladini[3]), daß die Kurve, welche die Bonatische Aufgabe löst, eine Lemniskate ist, deren Mittelpunkt in die Anfangslage des beweglichen Punktes fällt und deren Achsen mit der Vertikalen einen Winkel von 45⁰ bilden. Dieselben Resultate wurden später durch N. Fuß[4]) und J. A. Serret[5]) erhalten; Ossian Bonnet bemerkte sodann[6]), daß man in ähnlicher Weise eine Lemniskate erhalte, wenn man annimmt, daß der bewegte Punkt, statt zu gravitieren, von einem festen Zentrum mit einer Kraft proportional der Entfernung angezogen werde.

97. Der Umstand, daß die Lemniskate, wie wir (Nr. **94**) gesehen haben, eine Kurve vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten ist, hat zur Betrachtung aller derjenigen Kurven geführt, die mit dieser besonderen Eigenschaft versehen sind[7]). Die einfachste Art solche zu erhalten ist die, daß man sich der quadratischen Transformation $\varrho x_i = \frac{1}{y_i}$ bedient, vermittelst derer (s. Nr. **54**) aus einem Kegelschnitte

$$\sum_{ik} a_{ik} y_i y_k = 0$$

eine Kurve vierter Ordnung mit drei Knotenpunkten entsteht

$$a_{11} x_2^2 x_3^2 + a_{22} x_3^2 x_1^2 + a_{33} x_1^2 x_2^2 + 2 a_{23} x_1^2 x_2 x_3 + 2 a_{31} x_1 x_2^2 x_3 + 2 a_{12} x_1 x_2 x_3^2 = 0.$$

Wenn der ursprüngliche Kegelschnitt dem Fundamentaldreieck umbeschrieben ist, so zerfällt die transformierte Kurve in vier Geraden;

---

1) Im Aufsatze *Nuova curva isocrona* in *Raccolta ferrarese di Opuscoli scientifici e letterarj* (Venezia, 1781) S. 1—17.

2) *Della curva cassiniana e di una nuova proprietà meccanica della quale essa è dotata*, Pavia (ohne Datum; das Vorwort aber ist datiert: Ferrara, 2. Aprile 1781).

3) M. s. die in Nr. 93 zitierte Abhandlung dieses Mathematikers.

4) *De descensu gravium super arcu lemniscatae* (Mém. Accad. de St. Pétersbourg IX, 1824).

5) *Sur une propriéte mécanique de la lemniscate, découverte par N. Fuß* (Liouvilles Journ. IX, 1844).

6) *Note sur une propriété de la lemniscate* (Daselbst).

7) P. H. Schoute, *Über Kurven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten* (Arch. Math. Phys. 2. Serie, II, III, IV und VI, 1885—87), sowie *Les quartiques à trois points doubles d'inflexion* (Teixeira Jornal XIII, 1897).

ist er einbeschrieben, d. h. ist im allgemeinen $a_{ik} = \sqrt{a_{ii} a_{kk}}$, so hat die transformierte Kurve drei Spitzen, weshalb sie von projektivem Standpunkte aus nicht verschieden von der im Kap. 7 dieses Abschn. betrachteten ist; wenn endlich in bezug auf ihn das Fundamentaldreieck selbstkonjugiert ist, so ist $a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0$, und die Gleichung der transformierten Kurve nimmt folgendes Aussehen an:

$$a_1 x_2^2 x_3^2 + a_2 x_3^2 x_1^2 + a_3 x_1^2 x_2^2 = 0 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Die Kurve selbst hat demnach drei Doppelpunkte in den Ecken des Fundamentaldreiecks; die zugehörenden Tangenten werden dargestellt durch die drei Paare von Gleichungen

$$\frac{x_2}{\sqrt{a_2}} \pm \frac{x_3}{\sqrt{-a_3}} = 0, \quad \frac{x_3}{\sqrt{a_3}} \pm \frac{x_1}{\sqrt{-a_1}} = 0, \quad \frac{x_1}{\sqrt{a_1}} \pm \frac{x_2}{\sqrt{-a_2}} = 0,$$

und daher sind diese zu je zweien harmonisch mit denjenigen Seiten des Fundamentaldreiecks, welche demselben Büschel angehören; sie sind alle Wendetangenten; Gleichung (18) kann daher als kanonische Gleichung der Kurven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten angesehen werden. Diese Kurven (die sog. projektiven Lemniskaten[1])) besitzen alle deskriptiven Eigenschaften, die wir früher für die Lemniskate bewiesen haben, so z. B. führt ein in Nr. 92 bewiesener Satz zu folgendem Satze von Laguerre: **Wenn eine Kurve vierter Ordnung drei Inflexions-Doppelpunkte hat, so haben die vier Tangenten, die man von einem beliebigen Punkte der Kurve selbst an diese ziehen kann, ihre Berührungspunkte auf einer Geraden liegen**[2]) und liefern ein äquianharmonisches Doppelverhältnis[3]).

Nehmen wir das Fundamentaldreieck als vollständig reell an, so muß, damit die Kurve (18) unendlich viele reelle Punkte enthalte, eine der Konstanten a_i das entgegengesetzte Vorzeichen wie die beiden anderen haben; nehmen wir die Bezeichnungen in geeigneter Weise, so können wir a_1 als negativ annehmen; in diesem Falle ist A_1 ein isolierter Punkt der Kurve, während A_2 und A_3 Knotenpunkte sind. Projizieren wir die Kurve derart, daß eine der Seiten des Fundamentaldreiecks ins Unendliche geht, so erhält man verschiedene Formen der Kurve, jenachdem diese Seite den Punkt A_1 enthält oder nicht.

Im ersten Falle erhält man die Kurve (Taf. VII, Fig. 55), die in kartesischen Koordinaten durch eine Gleichung von folgendem Typus dargestellt wird:

$$\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

---

1) L. Berzolari, *Sulla lemniscata projettiva* (Rend. Ist. Lomb., 2. Ser., 38, 1904).

2) *Sur les courbes du quatrième degré qui ont trois points doubles à inflexion et en particulier sur la lemniscate* (Nouv. Ann. Math., 2. Ser., XVII, 1878). Warum hat man diese schöne Abhandlung von den *Œuvres complètes de Laguerre* ausgeschlossen?

3) Vgl. G. Kohn, Wiener Ber. 1887, S. 332—33.

Sie hat als reelle Wendeknoten den Anfangspunkt und den unendlich fernen Punkt der y-Achse, während der unendlich ferne der x-Achse ein isolierter Punkt ist. Die reellen Punkte der Kurve liegen innerhalb des von den Geraden $x = \pm a$ begrenzten Streifens der Ebene; in ihrer Gestalt erinnert die Kurve an die Art der Anordnung der beiden Kohlen in einer elektrischen Bogenlampe, daher der Name Kohlenspitzenkurve, mit dem Schoute sie bezeichnet hat, und der auch allgemein angenommen ist. Die Beiwörter gerade und schiefe, können angewandt werden, um darauf aufmerksam zu machen, ob das Achsensystem, auf welches die Kurve (19) bezogen wird, ein rechtwinkliges ist oder nicht, während man die Bezeichnung gleichseitige in dem Spezialfalle $a = b$ benutzen kann. Die Gleichung (19) kann durch folgende beiden ersetzt werden, nämlich

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \operatorname{ctg} \varphi, \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

wo φ einen Parameter bedeutet.

Im zweiten Falle gelangt man zu einer Kurve (Taf. VII, Fig. 56), die in kartesischen Koordinaten durch folgende Gleichung dargestellt wird

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Sie hat im Anfange einen isolierten Punkt, und die beiden unendlich fernen Punkte der Achsen sind Inflexionsknoten; ihre reellen Punkte liegen außerhalb der beiden von $x = \pm a$, $y = \pm b$ begrenzten Streifen. Diese Kurve findet sich seit 1847 in einer von Terquem[1]) vorgelegten Frage; sie findet sich weiter in einigen Untersuchungen von J. de la Gournerie unter dem Namen Trinodale harmonique[2]); häufiger wird sie jedoch heute, wie es Schoute[3]) getan hat, Kreuzkurve genannt mit Rücksicht auf ihre Gestalt; auch auf sie kann man die Beiwörter gerade und schiefe anwenden, jenachdem die Achsen rechtwinklig oder schief zueinander stehen[4]); diejenige, bei welcher $a = b$, nennt man aber die zirkulare. Die gerade zirkulare Kreuzkurve erfreut sich der Eigentümlichkeit, daß ihre Fußpunktkurve in bezug auf das Zentrum und ihre Evolute denselben Flächeninhalt haben[5]); es gibt unendlich viele Kurven mit derselben Eigentümlichkeit nämlich alle, die folgende Polargleichung haben:

---

1) Nouv. Ann. Mathém. VI, Question 165.

2) *Recherches sur les surfaces reglées tétraédrales symétriques* (Paris, 1867) S. 92.

3) E. Cesàro (*Le matem. pure ed applic.*, I, 1902, S. 287) brachte den Namen *Stauroide* (von ὁ σταυρός, das Kreuz).

4) Von G. de Longchamps jedoch wurde der Name Kreuzkurve oblique einer Kurve gegeben, die in einem schiefwinkligen Achsensystem (mit dem Achsenwinkel Θ) die Gleichung hat: $4x^2y^2 \sin^4 \Theta = k^2 (x^2 + y^2 - 2xy \cos \Theta)$. S. *Cours de problèmes de géométrie analytique*, II (Paris, 1899) S. 291.

5) *Intermédiaire* III. 1897, S. 247.

$$\varrho \sin \mu \omega = Const. \text{ (vgl. Nr. 137)}, \qquad \varrho \cdot \mathfrak{Sin} = Const.,$$
$$\varrho \cdot \mathfrak{Cos}\, \mu \omega = Const.^{1)}.$$

Es möge noch bemerkt werden, daß die Gleichung (21) durch folgende beiden ersetzt werden kann:

$$x = \frac{a}{\cos\varphi}, \quad y = \frac{b}{\sin\varphi}, \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

wenn φ, wie gewöhnlich, einen Parameter bedeutet. — Beachten wir schließlich, daß die Kurven (19) und (21) in folgender sehr einfachen Weise von den Kegelschnitten $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ abgeleitet werden können: „Man ziehe in einem beliebigen Punkte M des Kegelschnittes die Tangente, und bestimme die Schnitte derselben mit den Koordinatachsen; durch diese Punkte ziehe man die Parallelen zu den Achsen selbst, deren Schnitt ist ein Punkt der fraglichen Kurve."

Diese Konstruktion hat große Ähnlichkeit mit einer anderen, die uns zu einer neuen Kurve führen wird; sie lautet: „Gegeben eine Hyperbel und die beiden Parallelen zur Hauptachse in einem Abstande gleich der reellen Länge der halben Nebenachse; irgendeine Tangente der Hyperbel bildet mit den beiden Parallelen und der Nebenachse ein Trapez, dessen Diagonalschnitt die in Rede stehende Kurve beschreibt". Sie läßt sich analytisch darstellen sowohl durch

$$a^2(y^2 - b^2)^2 - 4b^2x^2(y^2 + b^2) = 0,$$

als auch durch

$$x = \frac{a \cdot \cos 2\varphi}{2\cos\varphi}, \qquad y = b \cdot \operatorname{tg}\varphi.$$

Von den drei singulären Punkten liegt einer im Unendlichen, die beiden anderen sind $(0, b)$ und $(0, -b)$. Die Gestalt der Kurve (s. Fig. 56a, Taf. VII) hat Veranlassung gegeben, ihr den Namen Sanduhrkurve beizulegen[2]).

Die Kurve (18) kann selbst dann noch reell sein, wenn zwei Ecken des Fundamentaldreiecks konjugiert imaginär sind; sind es z. B. A_2 und A_3, so setze man

$$\frac{x_2}{x_1} = x + iy, \quad \frac{x_3}{x_1} = x - iy, \quad \frac{a_2}{a_1} = \alpha + i\beta, \quad \frac{a_3}{a_1} = \alpha - i\beta,$$

dann wird Gleichung (18) zu

$$(x^2 + y^2)^2 + 2\alpha(x^2 - y^2) + 4\beta xy = 0; \quad \ldots \quad (23)$$

die so in kartesischen Koordinaten dargestellte Kurve kann angesehen werden als aus der Bernoullischen hervorgehend, wenn man auf diese eine reelle homographische Transformation anwendet.

1) Welsch im *Intermédiaire* IV, 1898, S. 115—16.
2) H. Wieleitner, *Spezielle ebene Kurven* (Leipzig, 1908) S. 23.

Fünfzehntes Kapitel.

Die Muschellinie und die Trisekante.

98. In diesem Kapitel werden wir uns mit zwei bemerkenswerten zirkularen Kurven vierter Ordnung beschäftigen, die beide rational sind; das Ursprungsland der älteren ist Deutschland, das der anderen Italien.

Der berühmte Maler Albrecht Dürer hat in seiner vielgepriesenen *Underweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheyt* (Nürnberg, 1525) einen Apparat beschrieben[1]), um eine Linie zu zeichnen, die von ihm Muschellinie genannt wird, „die in mancherley Sachen zu gebrauchen ist“[2]). Es ist eine Kurve, die geometrisch in folgender Weise definiert werden kann: „Gegeben zwei zueinander senkrechte Geraden Ox, Oy (Taf. VIII, Fig. 57, a, b, c); auf der ersteren ist ein fester Punkt A bezeichnet, eine Strecke MP von konstanter Länge bewegt sich so, daß der eine Endpunkt M die Gerade Ox durchläuft und daß, wenn N ihr Schnittpunkt mit Oy ist, immer $ON = AM$; der Ort des anderen Endpunktes P ist dann die Dürersche Muschellinie.“ — Um ihre analytische Darstellung zu finden, setzen wir $OA = a$ und $OM = z$, dann wird $ON = a - z$ sein, und die Gleichung der Geraden MN

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{a-z} = 1. \qquad (1)$$

Ist nun $MP = b$, so ist

$$(x-z)^2 + y^2 = b^2. \qquad (2)$$

Aus diesen beiden entsteht die Gleichung der Muschellinie durch Elimination von z, sie ist demnach

$$(xy + b^2 - y^2)^2 = (x + y - a)^2 (a^2 - y^2). \qquad (3)$$

Die Muschellinie von Dürer ist also eine Kurve vierter Ordnung: Doppelpunkte derselben sind ersichtlich die Schnittpunkte D', D'' der Geraden

$$x + y = a$$

mit dem Kegelschnitte

$$xy + b^2 - y^2 = 0;$$

diese beiden Punkte sind immer reell und begrenzen ein Segment,

---

1) Vgl. A. von Braunmühl, *Historische Studie über die organische Erzeugung ebener Kurven* etc. (Katalog mathem. u. mathem.-physikalischer Modelle etc. München, 1892) S. 62.

2) Vgl. S. Günther, *Albrecht Dürer einer der Begründer der modernen Curvenlehre* (Bibliotheca mathematica 1886, S. 139) und *Geschichte des math. Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525* (Berlin, 1887), S. 365, wo als Ordnung der Kurve die unrichtige Zahl 8 angegeben ist.

welches den Punkt D mit den Koordinaten $x = \frac{3a}{4}$, $y = \frac{a}{4}$ zum Zentrum hat. Schnitte der Kurve mit der x-Achse sind der zugehörige unendlich ferne Punkt zweimal gezählt und die beiden Punkte B und C mit den Abszissen $a \pm b$; Schnitte mit der y-Achse sind die vier Punkte mit den Ordinaten $\pm b$, $\frac{a \pm \sqrt{2b^2 - a^2}}{2}$. Schließlich Schnitte der Muschellinie mit der unendlich fernen Geraden sind die zyklischen Punkte der Ebene und der unendlich ferne der x-Achse zweimal gezählt. Dieser letzte Punkt ist also auch ein Doppelpunkt der Kurve; die zugehörigen Tangenten sind die Geraden r', r'' parallel zu Ox mit der Gleichung $y = \pm \frac{b}{\sqrt{2}}$. Fassen wir dies zusammen, so ergibt sich: **Die Dürersche Muschellinie ist eine rationale, zirkulare Kurve vierter Ordnung.** Die parametrische Darstellung durch rationale Funktionen ist leicht zu erhalten; Gleichung (2) läßt sich nämlich ersetzen durch die beiden

$$x = z + b \cdot \cos\varphi, \qquad y = b \cdot \sin\varphi;$$

setzen wir diese Werte in (1) ein, so finden wir

$$z = \frac{a \cdot \cos\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi},$$

und demnach werden die beiden vorigen zu

$$x = \frac{a \cdot \cos\varphi}{\cos\varphi - \sin\varphi} + b \cdot \cos\varphi, \qquad y = b \cdot \sin\varphi; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

setzen wir schließlich $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi = \lambda$, so gelangen wir zu der gesuchten Darstellung.

Betrachten wir in den Gleichungen (1) und (2) x, y, z als rechtwinklige kartesische Koordinaten eines Punktes im Raume, so erkennen wir, daß die Muschellinie auch erhalten wird als Orthogonal-Projektion der Schnittlinie der durch jene beiden Gleichungen dargestellten Flächen zweiter Ordnung auf die xy-Ebene.

Es gibt eine Parabel, die mit der Muschellinie in engem Zusammenhange steht, nämlich die Enveloppe der Geraden MN; man erhält ihre Gleichung, wenn man aus (1) und ihrer nach z Abgeleiteten z eliminiert; demnach lautet sie

$$(x - y)^2 - 2a(x + y) + a^2 = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

daraus ergibt sich, daß diese Parabel die erste[1]) Halbierungslinie des Achsenwinkels als Achse, die zweite als Direktrix hat, den Punkt

---

1) Wir bezeichnen der Kürze wegen als erste Halbierungslinie diejenige, welche den Winkel zwischen den beiden positiven (und negativen) Achsenrichtungen halbiert, als zweite die andere.

$V\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$ zum Scheitel, und $F\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ zum Brennpunkte; es ist bemerkenswert, daß dieser auch der außerordentliche Brennpunkt ist, mit welchem die Muschellinie versehen ist.

Die Dürersche Kurve kann je nach dem relativen Werte der Konstanten a, b verschiedene Gestalten annehmen. Vor allem geht aus dem früher gesagten hervor, daß sie die y-Achse in zwei reellen verschiedenen, zusammenfallenden oder imaginären Punkten trifft, jenachdem $a \lesseqgtr b\sqrt{2}$. — Wichtiger ist eine Einteilung, die aus der Betrachtung der Doppelpunkte hervorgeht. Sind ξ und η die Koordinaten eines solchen, so wird sein

$$\xi\eta + b^2 - \eta^2 = 0, \qquad \xi + \eta - a = 0;$$

daher ist, wenn man zur Abkürzung $a^2 + 8b^2 = c^2$ setzt,

$$\eta = \frac{a + \varepsilon c}{4}, \qquad \text{wo } \varepsilon = \pm 1.$$

Man betrachte nun eine beliebige von einem dieser Punkte ausgehende Gerade r; sind x, y die Koordinaten eines ihrer Punkte, so ist

$$x = \xi + \varrho \cdot \cos\omega, \qquad y = \eta + \varrho \cdot \sin\omega;$$

setzt man diese Werte in (3) ein, so erhält man eine Gleichung, die durch ϱ^2 teilbar ist. Nach ausgeführter Division bleibt die Gleichung

$$[\xi\cdot\sin\omega + \eta\cdot\cos\omega + \varrho\cdot\sin\omega\cdot\cos\omega - 2\eta\cdot\sin\omega - \varrho\cdot\sin\omega]^2$$
$$= (\cos\omega + \sin\omega)^2\,(b^2 - \eta^2 - 2\varrho\eta\cdot\sin\omega - \varrho^2\sin^2\omega).$$

Damit nun die Gerade r sich als Tangente der Muschellinie ergebe, muß auch diese Gleichung durch $\varrho = 0$ befriedigt werden; schreibt man so, daß dieser Umstand eintritt, so findet man die Gleichung:

$$(3a^2 + 16b^2 - \varepsilon ac)\sin^2\omega - 16b^2\sin\omega\cdot\cos\omega + (a^2 + \varepsilon ac)\cos^2\omega = 0,$$

die vom zweiten Grade in $\operatorname{tg}\omega$ ist; ihre Diskriminante ist

$$\varDelta = 8\,(a^2 + 8b^2)\left(4b^2 - a^2 - \varepsilon a\sqrt{a^2 + 8b^2}\right).$$

Diese Gleichung wird demnach reelle verschiedene, zusammenfallende oder imaginäre Wurzeln haben, je nachdem

$$4b^2 - a^2 - \varepsilon a\sqrt{a^2 + 8b^2} \gtreqless 0.$$

Nun ist für $\varepsilon = -1$ die linke Seite sicher positiv, **demnach ist der Doppelpunkt der Muschellinie, der eine negative Ordinate hat, immer ein Knoten. Was den andern betrifft, so ist dieser ein Knoten, eine Spitze oder ein isolierter Punkt, je nachdem**

$$4b^2 - a^2 - a\sqrt{a^2 + 8b^2} \gtreqless 0;$$

d. h. je nachdem $b \gtreqless a$.

In dem Falle, daß der Doppelpunkt mit positiver Ordinate eine Spitze ist, ist seine Ordinate $= a$, während seine Abszisse $= 0$ ist, die zugehörige Tangente bildet mit Ox einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente $= \frac{1}{2}$; die Kurve geht durch den Anfang und wird dort von der zweiten Halbierungslinie der Achsenwinkel berührt. Der Kurve gehören ferner die Punkte $(2a, 0)$ und $(0, -a)$ an; der Punkt $\left(\frac{3a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$ ist der Knoten, den die Kurve in endlicher Entfernung hat. In jedem Falle besteht die Kurve aus einem Zweige, der die Form der Konchoide hat, woraus sich die Berechtigung ihres Namens ergibt[1]), und einem zweiten, der verschieden geformt ist.

99. Die andere zirkulare Kurve, mit der wir uns in diesem Kapitel beschäftigen müssen, ist gegen Ende des 18. Jahrhunderts erfunden, um einen beliebigen Winkel in drei gleiche Teile zu teilen, weshalb sie den Namen Trisekante führt[2]). Ihre Entstehung ist folgende: „Gegeben ein Kreis mit dem Zentrum O und dem Radius a (Taf. VIII, Fig. 58) und ein fester Radius desselben OA; man ziehe einen beliebigen anderen Radius OM und konstruiere über ihm als Basis ein gleichschenkliges Dreieck OMP derart, daß

$$\sphericalangle\, OMP = POM = \frac{1}{3} AOM;$$

der Ort des Punktes P ist eine Trisekante." Man nehme O als Pol, OA als Polarachse, dann ist

$$OP = \varrho, \quad \sphericalangle\, POA = \omega, \quad \sphericalangle\, MOP = \frac{\omega}{2}, \; \frac{1}{2}\, OM = OP \cdot \cos MOP,$$

und daher:

$$\frac{a}{2} = \varrho \cdot \cos \frac{\omega}{2} \cdot \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

Dies ist die Polargleichung der Trisekante; die kartesische Gleichung

---

1) Eine andere Betrachtung, welche auf dieselbe Berechtigung führt, verdankt man H. Wieleitner. Dieser Geometer hat nämlich in seiner Abhandlung *Über einige Zusammenhänge zwischen speziellen Quartiken* (Wiener Sitzungsber. 116, Abh. II, 1907) die folgende Definition gegeben: „Ein konstanter Winkel α soll sich so bewegen, daß sein einer Schenkel immer durch F geht, während sein Scheitel Q auf einer Geraden z gleitet. Dann beschreibt ein fester Punkt R des anderen Schenkels $(\overline{QR} = l)$ eine schiefe Konchoide (vgl. Nr. 69) der Geraden z." Ist nun $\alpha = 0$ oder π, so wird die entstehende Kurve eine Konchoide des Nikomedes; ist aber $\alpha = \frac{\pi}{4}$ so erhält man eine Muschellinie; ist endlich $\alpha = \frac{\pi}{2}$ so wird man eine neue Kurve bekommen (J. Neuberg, *Sur les lignes tracées par le curvigraphe Lebeau;* Liège Mém., 3. Ser., V, 1904), welche den Namen *Orthokonchoide der Geraden* erhielt und die folgende kartesische Gleichung hat:

$$(x^2 + ax - l^2)^2 = y^2 (l^2 - x^2).$$

2) P. Delanges, *La trisegante nuova curva; e pensieri sulla formola cardanica* (Verona, 1783).

lautet infolgedessen

$$(a^2 - y^2)(x^2 + y^2) - \frac{a^2}{4} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Die Trisekante ist demnach eine zirkulare Kurve vierter Ordnung, symmetrisch sowohl in bezug auf den Durchmesser AOA' als auch auf den dazu senkrechten BOB'; sie hat als Doppelpunkte die beiden Punkte D, D' dieses zweiten Durchmessers, die von O den Abstand $\frac{a}{\sqrt{2}}$ haben, und als einfache Punkte die Mittelpunkte C, C' der beiden Radien OA, OA'; auch der unendlich ferne Punkt von AA' ist ein Doppelpunkt (somit ist die Kurve rational), und die entsprechenden Tangenten berühren den gegebenen Kreis in B, B' und begrenzen einen Streifen der Ebene, innerhalb dessen alle reellen Punkte der Trisekante liegen. Aus Gleichung (2) folgert man

$$x = \frac{\frac{a^2}{2} - y^2}{\sqrt{a^2 - y^2}};$$

daher, wenn man $y = \sin u$ setzt; erhält man

$$\int x\,dy = \int\left(\frac{a^2}{2} - a^2 \sin^2 u\right)du = \frac{a^2}{2}\int \cos 2u \cdot du = \frac{a^2}{4}\sin 2u + Const.$$

Integrieren wir zwischen $u = \frac{\pi}{4}$ und $u = 0$, so ergibt sich, daß die Fläche des gemischtlinigen Dreiecks $OCPD$ durch $\frac{a^2}{4}$ ausgedrückt wird, daher ist die Fläche des krummlinigen Vierecks $CDC'D'$ gleich a^2, d. h. gleich dem Quadrate über dem Radius des gegebenen Kreises.

Kehren wir zur Polargleichung (1) zurück, um zu bemerken, daß wenn man in ihr setzt

$$\varrho_1 = \varrho, \qquad \omega_1 = \frac{\omega}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wir damit eine geometrische Transformation bestimmt haben, durch welche die Trisekante in die Linie

$$\frac{a}{2} = \varrho_1 \cos\omega_1, \quad \text{das ist} \quad x = \frac{a}{2},$$

verwandelt wird, also in die Gerade r, die durch C parallel zu BB' gezogen ist. Wenn wir nun umgekehrt die entgegengesetzte Transformation $\varrho = \varrho_1$, $\omega = 2\omega_1$ anwenden, so entsteht aus der Geraden r die Trisekante. Beschreiben wir also (s. Taf. VIII, Fig. 58) einen Kreis um O mit einem Radius $> \frac{a}{2}$, welcher OA in K und die Gerade r in E schneidet und nehmen auf dessen Peripherie einen Punkt Q so, daß der Bogen $KEQ = 2 \cdot$ Bogen KE, so ist Q offenbar ein Punkt der Trisekante; variiert man nun den Kreis, so erhält man beliebig viele Punkte derselben. Da die Kurve zweifach symmetrisch ist, so

liefert jeder Punkt Q sogleich noch drei andere; demnach wird die Kurve sozusagen durch Punktquadrupel erzeugt, in einer für die praktische Zeichnung außerordentlich bequemen Weise[1]).

Bemerkenswert ist die Tatsache, daß die Trisekante hundert Jahre nach ihrer Entdeckung neuerdings zu ähnlichen Zwecken von einem amerikanischen Geometer wieder aufgefunden wurde, W. Hillouse[2]), der, um ihre Anwendung für die Dreiteilung eines Winkels noch bequemer zu gestalten, ein Instrument erdachte, um sie mechanisch zu zeichnen.

Sechzehntes Kapitel.

Von einem Kegelschnitte abgeleitete Kurven vierter Ordnung.

100. Unsere lange und mühevolle Heerschau über die speziellen Kurven vierter Ordnung geht ihrem Ende zu; bevor wir jedoch damit zunächst vorläufig abschließen — vorläufig sagen wir, weil wir später noch auf weitere Kurven vierter Ordnung als Spezialfälle von allgemeineren Kurven treffen werden — wollen wir noch auf einige Kurven hinweisen, zu denen die Theorie der Kegelschnitte führt.

a) Der Ort der Mittelpunkte der Sehnen eines zentrischen Kegelschnittes

$$Ax^2 + By^2 = 1,$$

die eine gegebene Länge c haben; durch eine nicht schwierige Rechnung fanden M. Steiner[3]) und später O. Terquem[4]) die Gleichung desselben als

$$A^3x^4 + B^3y^4 + AB(A+B)x^2y^2 = B^2(1-Ac^2)y^2 + A^2(1-Bc^2)x^2. \quad (1)$$

Diese Sehnen umhüllen eine Kurve vierter Klasse, und ihre Pole in bezug auf den gegebenen Kegelschnitt haben als geometrischen Ort eine Kurve, die durch folgende von O. Schlömilch[5]) gefundene Gleichung dargestellt wird

$$\frac{1}{Ax^2+By^2} + \frac{1}{A\left(\frac{1}{Bc^2}-1\right)x^2 + B\left(\frac{1}{Ac^2}-1\right)y^2} = 1 \quad . \quad . \quad (2)$$

---

1) Eine Beziehung zwischen der Trisekante und der Kappakurve wurde von H. Wieleitner (s. die S. 231 a. Abh.) nachgewiesen.

2) S. den Aufsatz: *On a new curve for the trisection of an angle* (Analyst IX, 1882).

3) *De loco geometrico lineae rectae definitae cujusdam longitudinis, cujus termini in linea secundi ordinis moventur* (Diss. Breslau, 1841).

4) Nouv. Ann. Mathém. IV, 1845, S. 590.

5) *Über einige aus Kegelschnitten abgeleitete Curven* (Zeitschr. Math. Phys. XIV, 1869).

b) Gegeben sei die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

mit dem Zentrum O. Wir betrachten ein Paar konjugierter Durchmesser MM', NN' von der Länge m, n und tragen auf dem ersteren die Strecken

$$OP = OP' = \sqrt{m^2 - n^2}$$

ab; der Ort der Endpunkte PP' heißt dann die Parameter-Kurve[1]). Ihre Gleichung ist leicht zu finden; sind nämlich x, y die Koordinaten von M und X, Y die von P, so bestehen die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad X^2 + Y^2 = m^2 - n^2, \quad x^2 + y^2 = m^2,$$
$$a^2 + b^2 = m^2 + n^2, \quad \frac{x}{X} = \frac{y}{Y};$$

aus den vier letzteren ergibt sich nun

$$x^2 = \frac{1}{2}\,\frac{X^2(X^2 + Y^2 + a^2 + b^2)}{X^2 + Y^2}, \qquad y^2 = \frac{1}{2}\,\frac{Y^2(X^2 + Y^2 + a^2 + b^2)}{X^2 + Y^2};$$

durch Einsetzen in die erste gelangt man dann zu

$$(X^2 + Y^2)(a^2Y^2 + b^2X^2) = (a^2 - b^2)(b^2X^2 - a^2Y^2) \quad . \quad . \quad (3)$$

als Gleichung der Parameter-Kurve.

c) In einer Ebene sei ein Kegelschnitt Γ gegeben. Jeder Punkt P der Ebene ist Zentrum einer Involution von in bezug auf die Kurve Γ konjugierten Geraden. Ferner kann man einen unendlich kleinen Kegelschnitt betrachten, die sog. Indikatrix von P[2]), der P zum Zentrum und diese Geraden als konjugierte Durchmesser hat; ein solcher Kegelschnitt kann angesehen werden als bestimmt durch den Winkel λ, den eine seiner Achsen mit einer festen Geraden bildet und durch das Verhältnis r der Längen seiner Achsen. Somit gehören zu jedem Punkte der Ebene zwei Größen λ und r. Man kann nun den Ort derjenigen Punkte betrachten, für welche eine dieser beiden Größen konstant ist; ist die erste konstant, so heißt die Kurve isogone Linie, ist die zweite konstant, so heißt sie Niveau-Linie. Alle diese Kurven sind von der vierten Ordnung, wie der Leser verifizieren kann.

Wir schließen dieses Kapitel mit der Anführung folgender Sätze, die man zum Teil J. Steiner verdankt[3]):

1) Jacob in Nouv. Ann. Mathém. II. 1843, S. 138, und Tortolini, *Applicazioni dei trascendenti ellittici alla quadratura di alcune curve sferiche* (Mem. Soc. Ital. Scienze, XXIV, 1850).

2) A. Haas, *Über die Indicatricen der Kegelschnitte* (Zeitschr. Math. Phys. XXXIV, 1889).

3) Für den Beweis siehe: G. Loria, *Studii sulla teoria delle coordinate triangolari* (Giornale di Matem. XXIV. S. 206, 210 u. 213).

d) Der Ort der Mittelpunkte der einem gegebenen Dreiecke einbeschriebenen Kegelschnitte, die einem gegebenen Kegelschnitte ähnlich sind, ist eine Kurve vierter Ordnung, die die unendlich ferne Gerade in den Kreispunkten, und die Geraden, die je zwei Mittelpunkte der Seiten verbinden, in den Punkten berührt, in welchen sie den Kreis schneiden, in bezug auf welchen jenes Dreieck zu sich selbst konjugiert ist.

e) Der Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte, die einem gegebenen Dreiecke umbeschrieben sind, und von denen man das Achsenverhältnis kennt, ist eine Kurve vierter Ordnung, die die Seitenmittelpunkte zu Doppelpunkten hat, und die unendlich ferne Gerade in den Kreispunkten berührt.

f) Der Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte, die einem gegebenen ähnlich sind, und in bezug auf welche ein gegebenes Dreieck zu sich selbst konjugiert ist, ist eine Kurve vierter Ordnung, welche die Ecken des Dreiecks zu Doppelpunkten hat und die unendlich ferne Gerade in den Kreispunkten berührt.

IV. Abschnitt.

Spezielle algebraische Kurven von einer bestimmten Ordnung höher als der vierten.

Erstes Kapitel.

Die Kurven fünfter Ordnung.[1])

101. Die ältesten uns bekannten Untersuchungen über die Kurven fünfter Ordnung — die wir im folgenden der Kürze wegen mit dem Namen „Quintik“ belegen wollen — rühren von G. Cramer her[2]), der auf Grund der Betrachtung der unendlich fernen Punkte, ihrer Realität und Vielfachheit, sie in elf Klassen mit vielen Unterabteilungen einteilte. Der allgemeinen Theorie dieser Kurven gehören auch einige Untersuchungen von D. Bancroft[3]) an, über die verschiedenen Formen die sie annehmen können, sowie zwei Sätze von J. Steiner[4]) (1851) und K. Rohn[5]) (1885); der erste Satz besagt, daß es auf jeder Quintik 165 Punkte gibt derart, daß die Tangente in einem solchen drei Punkte auf der Kurve ausschneidet, die mit dem Berührungspunkte eine harmonische Gruppe bilden, der zweite, daß es 208 fünfmal eine allgemeine Kurve fünfter Ordnung berührende Kegelschnitte gibt.

Eine allgemeine Quintik läßt 120 Doppeltangenten zu; ihre Berührungspunkte bilden den vollständigen Schnitt der gegebenen Kurve mit einer von der Ordnung 48, deren Gleichung in verschiedener Form von G. Maisano[6]), Heal[7]), A. Cayley[8]) und U. S. Hauna[9]) bestimmt

---

1) Die Theorie der Kurven fünfter Ordnung ist bis heute nur in rohen Umrissen bekannt, daher möge der Leser sich nicht wundern über die vielen Lücken, die die folgende Übersicht darbietet. Während es außerordentlich viele bemerkenswerte Kurven dritter und vierter Ordnung gibt, kennt man nur wenige von der fünften Ordnung, die eine Bedeutung haben und besonders interessant wären, ja kaum eine einzige hat einen speziellen Namen erhalten. Somit kann das folgende Kapitel, das noch viele offene Fragen bietet, die Mathematiker auf ein vielfach noch jungfräuliches Gebiet hinweisen.

2) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (Genève, 1750), S. 392.

3) *Formes of non-singulars quintic curves* (Amer. Journ. Math. X, 1888).

4) *Gesammelte Werke* II, S. 593.

5) *Math. Ann.* XXV, S. 602.

6) *Math. Ann.*, XXIX, 1887, S. 431—446.

7) *Ann. of Mathem.,* V, 1889, S. 33—41.

8) Das. S. 90—92, oder *The collected Papers*, XIII, S. 21.

9) Rend. circ. matem. Palermo XXVII, 1909.

wurde. Weitere Untersuchungen beziehen sich auf die invariantiven Formen einer ternären Quintik, mit denen sich A. Perna[1]) beschäftigte, während G. Dawson[2]) über die Reduktion der Gleichung einer Quintik auf eine kanonische Form schrieb, d. h. auf die Summe von sieben linearen Potenzen; diese Untersuchungen stehen offenbar in Zusammenhang mit der Betrachtung der Polarpolygone in bezug auf die Kurve[3]).

Auf eine, wie es scheint, sehr spezielle, Quintik ohne vielfache Punkte stieß gegen 1851 J. Steiner[4]): Sie ist der Ort der Mittelpunkte der Kurven dritter Ordnung die durch sechs feste Punkte gehen, und sie selbst geht a) durch diese sechs gegebenen Punkte, b) durch die Mitten der fünfzehn Strecken, die sie zu je zweien verbinden, c) durch die Zentra der sechs Kegelschnitte, die durch je fünf der gegebenen Punkte gehen, d) durch die Zentra der 30 Kegelschnitte, von denen jeder durch vier der gegebenen Punkte geht und sein Zentrum auf der Geraden hat, die die beiden anderen verbindet.

Gleichfalls ohne vielfache Punkte ist die Quintik, die der Ort der Berührungspunkte der Tangenten ist, die an die Kurven dritter Ordnung eines syzygetischen Büschels von einem beliebigen Punkte seiner Ebene aus gezogen werden; F. Morley[5]), der diese Kurve eingehend untersucht hat, entdeckte bei ihr die wunderbare Eigenschaft, daß ihre 45 Wendepunktstangenten zu je neun durch fünf Punkte der Kurve selbst gehen. Wenn

$$C \equiv x_1 x_3 - \tfrac{1}{4} x_2^2 = 0$$

die Gleichung des durch jene fünf Punkte bestimmten Kegelschnitts ist, und

$$C_\alpha \equiv x_1 - x_2 t_\alpha + x_3 t_\alpha^2 = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots 5)$$

die Gleichungen der Tangenten an den Kegelschnitt C in den genannten Punkten sind und schließlich

$$C_{\alpha\beta} \equiv (t_\alpha - t_\beta)^2,$$

so läßt sich die Gleichung der Quintik von Morley in folgender Form darstellen

$$C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 - \tfrac{1}{3} C \sum C_{12} C_3 C_4 C_5 + \tfrac{1}{6} C^2 \sum C_{12} C_3 C_{45} = 0.$$

Sehen wir von den Untersuchungen Steiners und Morleys ab, so bezieht sich alles, was wir über die Kurve fünfter Ordnung wissen, auf solche mit vielfachen Punkten, also solche von einem Geschlechte

1) *Giornale di Matem.*, XXXVII, 1887, S. 431—446.

2) *Quarterly Journ.* XXXVII, 1906.

3) G. Manfredini, *Giorn. di Matem.*, XXXI, 1902, S. 16ff.

4) *Ges. Werke*, II, S. 500. Ein ähnlicher geom. Ort läßt sich auch für Kurven von höherem Grade als 3 betrachten; vgl. P. H. Schoute, *Bull. soc. math. de France*, X, 1882, S. 114—121.

5) *On a plane quintic curve* (Proc. London math. Soc., 2e Ser. II, 1904).

$p < 6$[1]). Eine Gruppierung der Kurven fünfter Ordnung nach ihren Plückerschen Charakteren liefert die folgende Tabelle. Mehrere dieser Gruppen können in Untergruppen geteilt werden, indem eine Quintik auch höherer Singularitäten fähig ist. So kann sie einen vierfachen, oder einen dreifachen Punkt haben, aber nur einen; sie kann eine Schnabelspitze, eine Wendespitze haben, sowie sog. Undulations- oder Flachpunkte, die dann mehrere Doppeltangenten absorbieren usw.

Abteilung	Gruppe	Ordnung n	Doppelpunkte d	Spitzen s	Wendepunkte σ	Doppeltang. δ	Klasse ν	Geschlecht p
I	1	5	0	0	45	120	20	6
II	2	5	1	0	39	92	18	5
	3	5	0	1	37	78	17	5
III	4	5	2	0	33	78	16	4
	5	5	1	1	31	56	15	4
	6	5	0	2	29	45	14	4
IV	7	5	3	0	27	48	14	3
	8	5	2	1	25	38	13	3
	9	5	1	2	23	29	12	3
	10	5	0	3	21	21	11	3
V	11	5	4	0	21	32	12	2
	12	5	3	1	19	24	11	2
	13	5	2	2	17	17	10	2
	14	5	1	3	15	11	9	2
	15	5	0	4	13	6	8	2
VI	16	5	5	0	15	0	10	1
	17	5	4	1	13	14	9	1
	18	5	3	2	11	9	8	1
	19	5	2	3	9	5	7	1
	20	5	1	4	7	16	6	1
	21	5	0	5	5	0	5	1
VII	22	5	6	0	9	12	8	0
	23	5	5	1	7	8	7	0
	24	5	4	2	5	5	6	0
	25	5	3	3	3	3	5	0
	26	5	2	4	1	2	4	0

Um nur einen gedrängten Überblick über die bisher bearbeiteten speziellen Kurven 5. Ordnung zu verschaffen, wollen wir sie auf Grund der Betrachtung ihres Geschlechtes einteilen, indem wir mit dem niedrigsten beginnen.

<u>**Quintiken vom Geschlechte $p = 0$.**</u> Es sind dieses bekanntlich die rationalen Kurven fünfter Ordnung; die verschiedenen Gestalten,

1) Über die Singularitäten einer Quintik vom Geschlechte $p < 4$, siehe die Abh. von A. B. Basset im Quarterly Journ. Math. XXXVI, 1905, und XXXVII, 1906.

die sie annehmen können, wurden von W. Fr. Mayer[1]) und dann von P. Field[2]) untersucht. Kennt man von einer solchen Kurve die sechs Doppelpunkte, so kann man sie erzeugen nach einem Verfahren, das von K. Rohn[3]) erdacht wurde, und den Vorzug hat, zur Entdeckung neuer Eigenschaften dieser Kurve zu führen. Die Kurve läßt sich jedoch auch, wie E. de Jonquieres bemerkt hat[4]), als Erzeugnis zweier projektiver Büschel von Kurven dritter Ordnung erhalten. Schließlich kann eine Quintik vom Geschlechte 0 auch erzeugt werden mit Hilfe zweier rationaler Enveloppen, die in eindeutiger Korrespondenz stehen[5]) unter der Voraussetzung, daß ihre Klassen 2 und 3, oder 1 und 4 seien. Im ersten Falle besitzt sie sechs gewöhnliche Doppelpunkte, von denen aber drei durch einen dreifachen Punkt ersetzt sein können; im zweiten Falle hat die Kurve einen vierfachen Punkt.

Indem wir auf die Untersuchungen über Involutionen, die sich auf einer rationalen Quintik aufstellen lassen[6]), nicht weiter eingehen, sowie auf die Anwendungen dieser Kurven auf hypergeometrischen Betrachtungen[7]) wollen wir zur Aufzählung einiger rationaler Quintiken schreiten, die sich besonderer metrischer Eigenschaften erfreuen, indem wir zwar bemerken, daß die meisten von ihnen jener unerschöpflichen Quelle, nämlich der Theorie der Kegelschnitte, entspringen[8]).

a) In seiner berühmten Mitteilung an die Akademie der Wissenschaften zu Paris vom 15. Februar 1864 hat M. Chasles einen Satz über die Theorie der Charakteristiken ausgesprochen; indem A. Cayley diesen spezialisierte, zeigte er[9]), daß der Ort der Brennpunkte der einem Dreicke umbeschriebenen Parabeln eine rationale Kurve fünfter Ordnung ist. Er fand auch die Gleichung, indem er die Kurve als die projektive Transformation des Ortes derjenigen Punkte ansah, in

1) *Inauguraldiss.*, München, 1878; *Proc. of the R. Soc.*, Edinburgh, XIII, (1886).

2) *Amer. Journ. Math.*, XXVI, 1906, S. 149.

3) *Mathem. Annalen*, XXV, 1886, S. 598.

4) *Palermo Rendiconti*, II, 1887, S. 118.

5) J. F. Eberle, *Inaug. Diss.*, München, 1887 (gedruckt 1892).

6) W. Stahl. *Journ. f. Math.* CIV, 1889, S. 51; *Math. Ann.* XXXVIII, 1891, S. 577; J. de Vries, *Amsterdam Acad. Proc.*, XII, 1904, S. 742.

7) G. Marletta, *Palermo Rendic.*, XIX, 1905, S. 113.

8) Im allgemeinen sei bemerkt, daß derartige Kurven 3.—9. Ordnung sich in der Dissertation von K. Dörholt finden, *Über einem Dreieck um- und eingeschriebene Kegelschnitte.* (Münster, 1884.) S. auch den Artikel von Dingeldey, *Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme* im III. Bd. der Enzyklopädie der math. Wissensch. — Im speziellen ist der Ort der Mittelpunkte der einem Dreiecke umbeschriebenen Kegelschnitte, für welche die Summe der Quadrate der Halbachsen konstant ist eine Kurve fünfter Ordnung; sie geht durch die Kreispunkte der Ebene, hat die Seitenmitten des Dreiecks als Doppelpunkte und zu Wendeasymptoten die Seiten desselben. (Vgl. G. Loria, *Studii sulla teoria delle coordinate triangolari ecc.* Giorn. di Matem. XXIV, 1886, S. 209).

9) *The Educ. Times*, VII, 1867, S. 17; oder *The collected Papers*, VII, S. 522.

welchen die Tangenten von den beiden Kreispunkten I und J an die Kegelschnitte, die durch drei feste Punkte gehen und die Gerade IJ berühren, sich schneiden. Die parametrische Darstellung dieser Kurve wurde dann von S. Haller geliefert[1]); sie hat, wie dieser bemerkte, sechs Doppelpunkte, die aber alle imaginär sind und zu je zweien auf drei durch einen Punkt gehenden Geraden liegen, und als Doppeltangenten, die sechs Geraden, die die Kreispunkte I, J von den Ecken des Dreiecks aus, das all den betrachteten Kegelschnitten umbeschrieben ist, projizieren; ferner geht die Kurve offenbar, wie auch Cayley bemerkt hat, durch I und J.

b) Gegeben sei ein Kegelschnittbüschel: durch jeden Punkt P seiner Ebene geht eine Kurve des Büschels. Man betrachte den Durchmesser PP'; dann läßt sich zwischen den Punkten P, P' der Ebene eine eindeutige involutorische Beziehung aufstellen; sie ist von der Art, daß einer beliebigen Geraden der Ebene eine Kurve fünfter Ordnung entspricht, die zu Doppelpunkten die Grundpunkte des Büschels und die unendlich fernen Punkte der beiden im Büschel enthaltenen Parabeln hat. (Schoute[2])).

Um dies nachzuweisen, nehmen wir an, es seien $\varphi = 0$ und $\psi = 0$ die kartesischen Gleichungen der gegebenen Kegelschnitte, und X, Y sowie X', Y' seien die Koordinaten eines der Paare P, P' entsprechender Punkte. Bezeichnen dann Φ und Ψ die Resultate der Einsetzung $x = X$ und $y = Y$ in die Gleichungen φ und ψ, so wird $\Psi\varphi - \Phi\psi = 0$ die Gleichung des Kegelschnittes des Büschels sein, der durch P geht. Das Zentrum M dieses Kegelschnittes hat Koordinaten x, y die man aus den beiden Gleichungen

$$\Psi\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \Phi\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad \Psi\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \Phi\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0,$$

entnehmen kann. Lösen wir diese auf, so bekommen wir Ausdrücke von folgender Form

$$x = \frac{a_1\Phi^2 + b_2\Phi\Psi + c_1\Psi^2}{a\Phi^2 + b\Phi\Psi + c\Psi^2}, \quad y = \frac{a_2\Phi^2 + b_2\Phi\Psi + c_2\Psi^2}{a\Phi^2 + b\Phi\Psi + c\Psi^2},$$

wo die $a, a_1 \ldots . b, c_2$ neun bestimmte Konstanten sind. Nun ist aber M die Mitte von PP', demnach ist

$$x = \frac{X + X'}{2}, \quad y = \frac{Y + Y'}{2}.$$

Setzen wir nun hierin für x und y ihre Werte, so erhalten wir X', Y' ausgedrückt durch Funktionen 5ten Grades in X, Y. Es sind dies die

---

1) *Über die Brennpunktskurven zweier besonderer Gruppen von Kegelschnittsystemen* (Progr. München, 1905).

2) *Wiskundige Opgaven met de Oplosningen dor de leden van het Wiskundig Genotschap te Amsterdam*, T. II, N. 109.

Gleichungen der besagten Transformation. Wenn nun der Punkt P' die Gerade r' mit der Gleichung

$$\alpha X' + \beta Y' - \gamma = 0$$

beschreibt, so beschreibt der Punkt P die Kurve 5[ter] Ordnung von folgender Darstellung

$$2\{\alpha(a_1\Phi^2 + b_1\Phi\Psi + c_1\Psi^2) + \beta(a_2\Phi^2 + b_2\Phi\Psi + c_2\Psi^2)\} \\ = (\alpha X + \beta Y - \gamma)(a\Phi^2 + b\Phi\Psi + c\Psi^2).$$

Diese Gleichung läßt erkennen, daß die Kurve jene Punkte, für die zugleich $\Phi = 0$ und $\Psi = 0$, zu Doppelpunkten hat, also die Basispunkte des Büschels. Außer diesen besitzt sie noch zwei Doppelpunkte im Unendlichen. Nennen wir nämlich U den unendlich fernen Punkt einer der beiden in dem Büschel enthaltenen Parabeln, und sind A', B' die Punkte in denen diese Parabel die Gerade r' trifft, so ist klar, daß sowohl dem Punkte A' als auch B' der Punkt U entspricht, folglich geht die der Geraden r' entsprechende Kurve zweimal durch U. Demnach sind alle sechs Doppelpunkte der betrachteten rationalen Quintik bestimmt.

c) Die Enveloppe der Kreise, deren Mittelpunkte auf einer Hyperbel liegen und eine ihrer Asymptoten l berühren, ist eine bizirkulare rationale Quintik (Neuberg)[1].

Es sei $\xi \cdot \eta = k$ die Gleichung der Hyperbel, und es sei die Abszissenachse diejenige Asymptote, die von den Kreisen berührt wird. Dann haben diese eine Gleichung von der Form

$$(x - \xi)^2 + y^2 - 2\eta y = 0.$$

Eliminieren wir ξ, so bekommen wir

$$(\eta x - k)^2 + \eta^2 y^2 - \eta^3 y = 0,$$

oder

$$(x^2 + y^2)\eta^2 - 2k^2\eta x - 2\eta^3 y + k^4 = 0.$$

Wird nach η differenziert so bekommen wir

$$\eta(x^2 + y^2) - k^2 x - 3\eta^2 y = 0.$$

Die Gleichung der gesuchten Enveloppe erhalten wir nun durch Elimination von η aus den beiden zuletzt geschriebenen Gleichungen; die erstere kann durch folgende ersetzt werden

$$3\eta^2 y - (x^2 + y^2)\eta + k^2 x = 0.$$

Nun läßt sich die Elimination leicht ausführen, wenn wir uns des bekannten Ausdrucks der Resultante zweier quadratischer Gleichungen erinnern; wir erhalten so

$$[(x^2 + y^2)k^2 x - 9k^4 y]^2 = [-(x^2 + y^2)^2 + 12k^2 xy][-4k^4 x^2 + 3k^4(x^2 + y^2)].$$

---

1) Daselbst Bd. III, N. 82.

Werden die angedeuteten Operationen ausgeführt, so findet man unschwer, daß die gefundene Gleichung den Faktor y enthält — wie man auch sonst vorhersehen konnte — und von diesem Faktor befreit lautet

$$(x^2 + y^2)^2 y - 2k^2 x(x^2 + 9y^2) + 27k^4 y = 0.$$

Der Ort ist demnach von der 5ten Ordnung, symmetrisch in bezug auf den Anfangspunkt; die Kreispunkte sind Doppelpunkte; sie hat vier Spitzen, die beiden reellen haben als Polarkoordinaten

$$\varrho = \pm k\sqrt[4]{27}, \quad \omega = \pi/6.$$

d) Die Normale in einem Punkte A einer Parabel trifft die Kurve zum zweiten Male in B; der Kreis über AB als Durchmesser schneidet die Parabel weiterhin in C. Die Enveloppe der Geraden BC ist eine rationale Quintik (G. de Longchamps)[1]).

Es sei $y^2 = 2px$ die Gleichung der Parabel; dann ist diese auch folgender parametrischen Darstellung fähig

$$x = \frac{\lambda^2}{2p}, \quad y = \lambda.$$

Entspricht nun dem Punkte A der Parameter a, so entsprechen den B und C die Werte

$$-\frac{a^2 + 2p^2}{a} \quad \text{und} \quad \frac{2p^2 - a^2}{a},$$

und demnach hat die Gerade BC, deren Enveloppe man sucht, die Gleichung

$$2a^2 px + 2a^3 y - (4p^4 - a^4) = 0.$$

Differenzieren wir nach a, so bekommen wir

$$2apx + 3a^2 y + 2a^3 = 0.$$

Lösen wir beide Gleichungen nach x, y auf, so finden wir

$$x = \frac{12p^4 + a^4}{2a^2 p}, \quad y = -\frac{a^4 + 4p^4}{a^3}$$

als parametrische Darstellung der gesuchten Kurve. Da nun in diese auf den gemeinsamen Nenner $2a^3p$ gebracht, nur rationale Funktionen von nicht höherem als 5ten Grade eintreten, so ist die Kurve von der 5ten Ordnung. Dem Leser sei überlassen zu zeigen, daß sie 4 Spitzen hat, von denen 2 reell sind, und zwei, immer imaginäre Doppelpunkte.

e) Rollt eine Parabel auf einer anderen, festen ihr kongruenten derart, daß zu Beginn der Bewegung die Scheitel aufeinanderfallen, so umhüllt sie eine Quintik mit zwei reellen und zwei imaginären Spitzen und zwei Knotenpunkten (Mantel)[2]).

Die feste Parabel sei auf die Achsen Ox und Oy bezogen, so daß die erstere Scheiteltangente ist, die zweite die Achse der Kurve.

---

1) Das. Bd. III, N. 162. 2) Das. Bd. III, N. 70.

Nach einem bekannten Satze ist nun, wenn die Normale in einem Punkte B der beweglichen Parabel durch den Berührungspunkt A der beiden Kurven geht, B ein Punkt der Enveloppe. Sind nun X, Y die Koordinaten von B in bezug auf die festen Achsen, und α, β die in bezug auf die beweglichen Achsen, x, y die Koordinaten des Punktes A der festen Parabel, und φ der Winkel, den die Tangente in A mit Ox bildet, so bestehen die folgenden Gleichungen:

$$X = x + (\alpha - x)\cos 2\varphi + (\beta - y)\sin 2\varphi,$$
$$Y = y + (\alpha - x)\sin 2\varphi - (\beta - y)\cos 2\varphi.$$

$$x^2 = 2py, \quad \alpha^2 = 2p\beta, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{x}{p}, \quad y - \beta = -\frac{p}{\alpha}(x - \alpha),$$

und deswegen auch

$$\alpha^2 + x\alpha + 2p^2 = 0, \quad x = -\frac{\alpha^2 + 2p^2}{\alpha}, \quad y = \frac{(\alpha^2 + 2p^2)^2}{2p\alpha^2};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{\alpha^2 + 2p^2}{p\alpha}, \quad \sin 2\varphi = -\frac{2p\alpha^2(\alpha^2 + 2p^2)}{(\alpha^2 + p^2)(\alpha^2 + 4p^2)},$$

$$\cos 2\varphi = -\frac{\alpha^4 + 3p^2\alpha^2 + 4p^4}{(\alpha^2 + p^2)(\alpha^2 + 4p^2)};$$

$$\alpha - x = 2\frac{\alpha^2 + p^2}{\alpha}, \quad \beta - y = -2p\frac{\alpha^2 + p^2}{\alpha^2},$$

und schließlich

$$X = -\frac{3\alpha^4 + 8\alpha^2p^2 + 8p^4}{\alpha(\alpha^2 + 4p^2)}, \quad Y = \frac{\alpha^4 - 4p^2\alpha^2 - 8p^4}{2p(\alpha^2 + 4p^2)}.$$

Der Ort des Punktes A, die gesuchte Enveloppe, ist demnach eine rationale Kurve 5ter Ordnung; es ist leicht nachzuweisen, daß sie die oben angegebenen Singularitäten besitzt. Von projektivem Gesichtspunkte aus ist sie nicht verschieden von der dualen zu einer Quartik mit einer Spitze und zwei Doppelpunkten.

f) Eine rationale Quintik ist ferner die Kurve von der Eigenschaft, daß die Mittelpunkte der gleichseitigen Hyperbeln, die mit dieser Kurve eine Berührung dritter Ordnung haben (die sog. hyperoskulierenden Hyperbeln), auf einer Geraden liegen (Mantel).[1])

Um dies nachzuweisen, beachten wir, daß man zunächst folgende Tatsache leicht beweisen kann: „Berührt ein Kreis eine gleichseitige Hyperbel von außen, und ist sein Durchmesser gleich dem Krümmungsradius im Berührungspunkte, so geht er durch das Zentrum der Hyperbel". Hieraus geht hervor: Wenn ein Kreis eine Kurve von der konvexen Seite her berührt und hat als Durchmesser den betreffenden Krümmungsradius im Berührungspunkte, so wird er der geometrische Ort Ω der Zentren der gleichseitigen Hyperbeln sein, die in dem Punkte eine Berührung zweiter Ordnung mit der Kurve haben.

1) Das. Bd. IV, N. 113.

Betrachtet man nun zwei solche zu unendlich nahen Punkten gehörige Kreise, so wird ihr von dem Berührungspunkte verschiedener Schnitt das Zentrum einer gleichseitigen Hyperbel sein, die mit der Kurve im besagten Punkte eine Berührung dritter Ordnung hat. Die Enveloppe der genannten Kreise ist demnach die Ortskurve der Zentra der die gegebene Kurve hyperoskulierenden Hyperbeln.

Unter der Annahme, daß dieser Ort eine Gerade sei, die wir als x-Achse nehmen wollen, wird die gesuchte Kurve dargestellt durch

$$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2, \quad x-a+y\frac{db}{da}=0,$$

wo a, b die Koordinaten eines Punktes des vorhin bezeichneten Ortes Ω sind, und daher ist b eine Funktion von a. Differenzieren wir und drücken aus, daß der Krümmungsradius der gesuchten Kurve gleich dem Durchmesser jenes Kreises sein soll, so finden wir

$$2(y-b)\frac{da}{dx}=3b.$$

Setzen wir nun $x-a=b\cdot\cos\varphi$, $y-b=b\cdot\sin\varphi$, und berechnen $\frac{db}{da}$, $\frac{dx}{da}$, $\frac{d\varphi}{da}$, so findet sich

$$b=\frac{m}{(1+\sin\varphi)^3}, \quad a=3m\int\frac{d\varphi}{(1+\sin\varphi)^3},$$

wobei m eine Integrationskonstante ist, und daher

$$x=2m\int\frac{\sin\varphi\cdot d\varphi}{(1+\sin\varphi)^3}, \quad y=\frac{m}{(1+\sin\varphi)^2}.$$

Diese Integrationen lassen sich leicht ausführen, wenn man

$$\sin\varphi=\frac{1-z^2}{1+z^2}$$

setzt, und dann bekommt man

$$\alpha=\frac{m}{10}(z^5-5z), \quad y=\frac{m}{4}(z^2+1)^2.$$

Die gesuchte Kurve ist also rational und von der 5ten Ordnung; leicht zu zeigen ist auch, daß sie von der sechsten Klasse ist, indem sie vier Doppelpunkte und zwei (imaginäre) Schnabelspitzen besitzt, usw.

Weitere rationale Quintiken, die mit den Kegelschnitten verknüpft sind, wollen wir der Kürze wegen nicht anführen[1]), jedoch über einige andere, die von speziellen Kurven 3. und 4. Ordnung abgeleitet sind, berichten.

g) Der Ort der Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise, die über zwei durch die Spitze gehenden, zueinander senkrechten Sehnen einer

1) Vgl. *Intermédiaire,* VII, 1900, S. 55 und 217; VIII, 1901, S. 89 und 144.

Kissoide als Durchmesser beschrieben sind, ist eine Kurve 5. Ordnung, für welche die Spitze der Kissoide eine vierfacher Punkt ist[1]).

h) Die Tangente an die Kissoide in einem Punkte P trifft die Symmetrieachse der Kurve in Q und die Senkrechte hierzu durch die Spitze in R. Der Ort die Mittelpunkte der Strecke QR ist eine rationale Quintik, die eine Spitze in der Spitze der Kissoide hat und den unendlich fernen Punkt in senkrechter Richtung zur Achse als dreifachen Punkt hat[2]).

i) Man betrachte ein Dreieck, das die eine Ecke A in der Spitze der Kissoide hat, die andere Ecke B in irgend einem Punkte der Kurve und als dritte Ecke den Schnitt C der Normale in B mit der Symmetrieachse der Kurve (d. i. die Spitzentangente); der geometrische Ort des Höhenpunktes eines solchen Dreiecks ist eine rationale Quintik mit einer Spitze A und einem dreifachem in unendlicher Entfernung[3]).

k) Gegeben zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ in zwei verschiedenen Ebenen π und π' (die auch zusammenfallen können); man betrachte als entsprechend zwei Punkte M und M', wenn die Winkel, unter denen die Seiten $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ von M' aus gesehen werden, die gleichen sind, unter denen auch BC, CA, AB von M aus gesehen werden. Wenn nun M eine Gerade beschreibt, beschreibt M' eine rationale Quintik[4]).

l) Geht man von einer Kurve zu ihrer Fußpunktkurve oder zu ihrer Gegenfußpunktkurve (Antipedale) über — vgl. Abschn. VII, Kap. 8 — so bleibt das Geschlecht erhalten. Ist daher jene Kurve von der 5. Ordnung, so gehört sie der augenblicklich von uns betrachteten Gruppe an. Im speziellen trifft dies zu für die Antipedale einer Parabel, für die Fußpunktkurve einer kubischen Parabel, wenn der Pol in den Anfangspunkt fällt[5]), und für die Antipedale einer Kissoide, wenn der Schnitt der Achse mit der Asymptote Pol ist[6]).

m) Schließlich findet sich eine rationale Quintik mit einem vierfachen Punkte unter denjenigen, deren mechanische Erzeugung Lebeau zeigte[7]).

Kurven 5. Ordnung vom Geschlechte $p = 1$. Mit den verschiedenen Gestalten, deren die elliptischen Quintiken fähig sind, hat sich P. Field[8]) beschäftigt; ihre parametrische Darstellung

1) E. N. Barisien im *Intermédiaire* VIII, 1902, S. 88.

2) E. N. Barisien, *Interméd.* VII, 1900, S. 57.

3) E. N. Barisien, *Interméd.* VII, 1900, S. 277.

4) E. Duporcq, *Intermédiaire* VII, 1900, S. 217.

5) A. B. Basset, *An element. treatise on cubic and quartic curves* (Cambridge, 1901) S 9.

6) E. N. Barisien, *Intermédiaire,* VII, 1900, S. 278.

7) J. Neuberg, *Sur les lignes tracées par le curvigraphe V. Lebeau* (Liège Mém. III Ser. V, 1904) N. 35.

8) *Amer. Journ. Math.* XXVII, 1905, S. 243.

hat G. Humbert[1]) geliefert mit Hilfe der fünf Funktionen $\Theta\left(z + \frac{i\omega}{5}\right)$ $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ der Perioden ω, ω'. Mittels dieser zeigte er, daß eine elliptische Quintik immer erhalten werden kann durch Projektion des Schnittes zweier kubischer Flächen, der übrig bleibt, wenn die beiden Flächen sich längs eines gemeinsamen Kegelschnittes berühren derart, daß die Geraden in denen die beiden Flächen überdies noch von der Ebene des Kegelschnittes geschnitten werden, sich in einem Punkte jener Schnittkurve treffen. Durch Anwendung der allgemeinen Theorie der elliptischen Kurven gelangte derselbe Geometer zu folgendem Satze[2]): „Die eine elliptische Quintik fünffach berührenden Kegelschnitte bilden vier bestimmte Systeme, indem die Summe der Argumente der Berührungspunkte für die Kurven eines Systems dieselbe ist; drei von diesen Gruppen umfassen je 16 Kegelschnitte, während die vierte, nämlich diejenige, für welche die Summe der Argumente der Berührungspunkte gleich $\frac{5}{2}(\omega + 5\omega')$ ist, nur fünf eigentliche Kegelschnitte enthält, außer den Geraden der Ebene, die jede doppelt zu zählen sind. Sind A, B, C, D, E die Doppelpunkte der Kurve, und man legt durch vier von ihnen, z. B. A, B, C, D, einen Kegelschnitt, und bestimmt die beiden anderen Schnitte L, M mit der Kurve, so umhüllt die Gerade LM bei Variation jenes Kegelschnitts einen der genannten fünffach berührenden Kegelschnitte, und dessen Berührungspunkte liegen mit A, B, C, D auf einer Kurve 3. Ordnung, die in E den durch die Doppelpunkte der Kurve bestimmten Kegelschnitt berührt.

Die Existenz von Quintiken mit 5 Spitzen wurde zugegeben von A. Clebsch[3]) und nachgewiesen von P. del Pezzo[4]), der eine solche Kurve aus einer zweispitzigen 4. Ordnung durch eine geeignete quadratische Transformation herleitete. Die resultierende Kurve ist von der fünften Klasse und hat auch fünf Wendepunkte, ist also zu sich selber dual.

Eine elliptische Quintik, die in metrischer Beziehung spezialisiert ist, liefert der Ort der Scheitel der Hyperbeln, die alle in einem gegebenen Punkte eine feste Gerade berühren und eine Senkrechte zu dieser Geraden zur gemeinsamen Asymptote haben[5]).

Kurven 5. Ordnung vom Geschlechte $p = 2$. Hat eine Quintik vier Doppelpunkte, so wird jeder durch diese gehende Kegelschnitt die Kurve außerdem noch in zwei Punkten schneiden, deren Gesamt-

1) *Bull. Soc. Math. France* IX, 1881, S. 166.

2) *Thèse sur les courbes de genre* 1 (Paris, 1886) S. 77 und 85.

3) *Journ. f. Math.* LXIV, 1865, S. 250.

4) *Rendic. Acc. Napoli,* II. Ser. III 1889, S. 46—49. Vgl. P. Field, *On the forme of a plan quintic with five cusps* (Trans. Amer. Math. Soc. VII, 1905).

5) Barbarin, *Intermédiaire* VIII, 1901, S. 89.

heit eine quadratische Involution bildet. Die Geraden, die entsprechende Punkte verbinden, umhüllen im allgemeinen eine Kurve 2. Ordnung, den sogenannten „Fundamentalkegelschnitt". Bedeuten A, B, C drei lineare, P, Q zwei quadratische Funktionen der homogenen Koordinaten eines Punktes der Ebene, und ist λ ein Parameter, so kann eine Quintik vom Geschlechte 2 durch folgende projektive Systeme erzeugt gedacht werden

$$A + 2B\lambda + C\lambda^2 = 0, \quad P + \lambda Q = 0,$$

oder durch

$$(AQ - BP) + (BQ - CP)\lambda = 0, \quad P + \lambda Q = 0.$$

Hieraus folgt, daß die Kurve selbst folgende Gleichung haben muß:

$$AQ^2 - 2BPQ + CP^2 = 0.$$

Der Fundamentalkegelschnitt kann in speziellen Fällen als Enveloppe sich auf einen Punkt reduzieren; dann heißt die Quintik „von der II. Spezies" und kann durch ein Strahlenbüschel, der in projektiver Beziehung mit einer in einem Kegelschnittbüschel bestehenden Involution steht, erzeugt werden[1]).

Die Quintiken mit vier Doppelpunkten gehören der großen Klasse von Kurven an, für welche die homogenen Koordinaten eines Punktes durch zwei ganze lineare Funktionen und durch Quadratwurzeln zweier ganzer rationaler Funktionen eines Parameters ausdrückbar sind. Von diesem Gesichtspunkte aus wurden sie von C. Weltzien[2]) untersucht, der von einer solchen Darstellung ausgehend ihre Gleichung und die Koordinaten der Doppelpunkte bestimmt hat.

Eine derartige Quintik vom Geschlechte 2 und von der II. Spezies, die metrisch spezialisiert ist, hat folgende Entstehungsweise: „In der Ebene der drei Punkte A, B, C (s. Taf. VIII, Fig. 59) errichte man die Mittelsenkrechte auf BC, OY. Durch A ziehe man eine beliebige Gerade, die OY in M schneidet; zu beiden Seiten von M trage man auf OY die Strecken $MN_1 = MN_2 = MB$ ab, dann beschreibe man um N_1 und N_2 Kreise die durch B (und C) gehen; der geometrische Ort der Schnittpunkte P dieser Kreise mit der durch A gelegten Geraden ist die Kurve[3])". Um ihre Gleichung zu finden, nehmen wir BC als x-Achse, OY als y-Achse[4]). a und b seien die Koordinaten des Punktes A, l die Länge von BC und λ die Ordinate von M. Dann ist die Gleichung des beliebigen Strahles AM

$$\lambda(x - a) - (bx - ay) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

1) J. de Vries, *Wiener Sitzungsber.* CIV, 1895, II. Abt. S. 46.
2) *Math. Annalen*, XXX, 1887, S. 537—539 und 543—547.
3) G. Espanet, *Intermédiaire* IX, 1902, S. 3.
4) G. Loria, *Intermédiaire,* XIII, 1906, S. 265.

während die Ordinaten von N_1 und N_2 sind

$$\mu = \lambda \pm \sqrt{l^2 + \lambda^2}.$$

Nun folgt aus dieser Gleichung, daß $\lambda = \frac{\mu^2 - l^2}{2\mu}$, und wir sehen, daß zwischen den Strahlen des Büschels (A) und den Kreisen des Büschels mit den Grundpunkten B, C eine Korrespondenz (2, 1) besteht. Um die Ordnung der Kurve zu finden, kann man demnach auf das Chaslesche Korrespondenzprinzip zurückgreifen, und findet durch Anwendung desselben tatsächlich, daß die Kurve von der Ordnung 5 ist. Sie geht einmal durch A hindurch, indem nur ein einziger Kreis des Büschels durch A geht, dagegen zweimal durch jeden der Punkte B, C, indem zwei Kreise des Büschels jedem der Strahlen AB, AC entsprechen. Ebenso läßt sich zeigen, daß die Kreispunkte Doppelpunkte der Kurve sind.

In dem Kreisbüschel gibt es einen Kreis, der durch die Gerade BC und die unendlich ferne gebildet wird; der entsprechende Strahl des andern Büschels ist das von A auf BC gefällte Lot. Die Kurve geht infolgedessen auch durch den Fußpunkt F und den unendlich fernen Punkt dieses Lotes. Dies alles ergibt sich auch aus der Gleichung der Kurve, die entsteht, wenn man aus der Gleichung (1) und der folgenden

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y - l^2 = \pm 2y\sqrt{l^2 + \lambda^2} \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

λ eliminiert. Die gesuchte Gleichung wird alsdann

$$(x^2 + y^2 - l^2)^2 (x - a) - 4y(x^2 + y^2 - l^2)(bx - ay) = 4l^2y^2(x - a). \quad (3)$$

Aus dieser folgt, daß jeder Kreis durch die Punkte B und C, z. B. der mit der Gleichung

$$x^2 + y^2 - 2\varrho y = l^2,$$

die Kurve außer in den Doppelpunkten noch in zwei anderen Punkten, die der Geraden

$$(\varrho^2 - l^2)(x - a) = 2\varrho(bx - ay)$$

angehören, trifft; diese Gerade geht, welches auch der Wert von ϱ sein mag, immer durch A. Erinnern wir uns des vorhin Gesagten, so erkennen wir daraus, daß die betrachtete Quintik von der II. Spezies ist. — Für den Spezialfall, daß der Punkt A mit B oder C zusammenfällt, spaltet sich die Gleichung (3) in die beiden

$$(x - l)^2 + y^2 = 0, \quad (x + l)(x - l)^2 = y^2(3l - x);$$

die erste stellt einen Punktkreis, die zweite eine gerade Strophoide dar, so daß wir damit eine neue Erzeugungsweise dieser Kurve erhalten haben!

Kurven 5. Ordnung vom Geschlechte $p = 3$. Zu dieser Kategorie gehören die Quintiken mit einem dreifachen Punkte, die in homogenen Koordinaten durch eine Gleichung von folgendem Typus darstellbar sind:

$$A x_3^2 + 2 B x_3 + C = 0,$$

wobei A, B, C binäre Formen in x_1, x_2 vom Grade 3, 4, 5 darstellen. Bemerkenswert ist der Fall[1]), daß $C = AQ$, wo Q eine binäre quadratische Form ist; alsdann schneiden die Tangenten an die Kurve in dem dreifachen Punkte diese außerdem noch in drei Punkten, die in gerader Linie liegen, auch besitzt die Kurve selbst weitere elegante Eigenschaften.

Kurven 5. Ordnung, die eine Gruppe linearer Transformationen in sich selbst besitzen. Die Bestimmung dieser bemerkenswerten Klasse von Quintiken wurde von V. Sneyder ausgeführt[2]). Die erhaltenen Resultate finden sich zusammengestellt in der folgenden Tabelle, die analog der in Nr. **53** für die Kurven 4. Ordnung gemachten Aufstellung ist:

1.	G_{20}	$a x_1 x_2^4 + b x_3^5 = 0$
2.	G_{10}	$a x_1 x_2^2 x_3^2 + b(x_1^5 + x_3^5) = 0$
3.	G_6	$a x_3^2(x_1^3 + a x_2^3) + b x_1^2(x_1^3 + b x_2^3) = 0$
4.	G_{30}	$a x_1^2 x_2^3 + b x_3^5 = 0$
5.	G_6	$x_1^3 \varphi_2(x_2, x_3) + \varphi_5(x_2, x_3) = 0$
6.	G_{15}	$a x_1^3 x_2^2 + b x_1^5 + c x_3^5 = 0$
7.	G_{30}	$a x_1^3 x_2 x_3 + b(x_2^5 + x_3^5) = 0$
8.	G_{20}	$a x_1^4 x_2 + b(x_2^5 + x_3^5) = 0$
9.	G_{10}	$x_1^5 + \varphi_5(x_2, x_3) = 0$
10.	G_{12}	$x_3^3 x_2^2 + x_2(x_1^4 + x_2^4) = 0$
11.	G_{39}	$x_1^4 x_3 + x_2^4 x_1 + x_3^4 x_2 = 0$
12.	G_{21}	$x_1^3 x_3^2 + x_2^3 x_1^2 + x_3^3 x_2^2 = 0$
13.	G_6	$a\sigma_1^5 + b\sigma_1^3\sigma_2 + c\sigma_1^2\sigma_3 + d\sigma_1\sigma_2^2 + e\sigma_2\sigma_3 = 0$
14.	G_{150}	$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = 0.$

Hierin bedeuten a, b, c Konstanten; φ_k sind binäre Formen vom Grade k, während σ_k eine elementar symmetrische Form von der Dimension k in den Größen x_1, x_2, x_3 ist, während die Bedeutung von G_r dieselbe ist wie in Nr. **53**.

1) W. R. Westroop Roberts, *Proc. Irish. Ac.* XXIV A, 1902, S. 34—44.

2) *Plane quintic curves which possess a group of linear Transformations* (Amer. Journ. Math. XXX, 1908).

Zweites Kapitel.

Die Kurven sechster Ordnung.

a) Allgemeines.

102. Die einzigen uns bekannten Sätze über die allgemeinen Kurven 6. Ordnung — die wir kurz Sextik nennen wollen — sind die von Clebsch[1]) gefundenen über die Zahl (3^{20}) und den gegenseitigen Zusammenhang der Berührungspunkte der Quintiken, die eine solche Kurve in 10 Punkten oskulieren.

Um an einem Beispiele die Anwendung der Theorie der algebraischen Funktionen zu zeigen, hat A. Cayley[2]) eine Sextik mit 5 Doppelpunkten vom Geschlechte 5 betrachtet und die Serie g_4^1 untersucht, die gebildet wird von Quadrupeln solcher Kurvenpunkte, daß jede Kurve 3. Ordnung, die durch drei Punkte eines Quadrupels geht, infolge dessen den vierten enthält. Auf dieselbe Kurve traf G. Humbert[3]) im Verlaufe anderer Untersuchungen; als er sich nämlich mit dem System der kubischen Raumkurven beschäftigte, die durch fünf feste Punkte gehen, stieß er auf eine Raumkurve 7ter Ordnung, die von einem beliebigen ihrer Punkte auf eine Ebene projiziert, eine Sextik mit 5 Doppelpunkten liefert, derart, daß 5 der Tangenten an die Kurve in den Doppelpunkten in einen Punkt zusammenlaufen, und dasselbe für andere fünf eintritt. Die beiden Konvergenzpunkte gehören dem durch die singulären Punkte bestimmten Kegelschnitt an.

Vom Geschlechte 4 sind die Sextiken mit 2 dreifachen Punkten, deren Formen Hjelmman[4]) untersucht hat. Auf eine Sextik vom Geschlechte 3 stieß Steiner im Verlaufe seiner berühmten Untersuchungen über die zentrischen Kurven: es ist der Ort der Doppelpunkte der rationalen Kurven 3. Ordnung, die durch sieben feste Punkte gehen, die für diesen Ort zu Doppelpunkten werden[5]). Diese

---

1) *Journ. f. Math.* LXIV, 1865, S. 250.

2) *Math. Annalen*, VIII, 1825, oder *Collected Papers*, IX, S. 504.

3) *Sur un complexe remarquable de coniques* (Journ. Ec. polyt., Cah. LXIV, 1894, S. 137).

4) *Sur les courbes planes du 6ième ordre à deux points triples.* (Öfver. of Finska Soc. XL, 1897—1898).

5) Ges. Werke II S. 526. Allgemeiner und von der 6. Ordnung ist der Ort der Doppelpunkte der Kurven 3. Ordnung eines Netzes (nämlich die Jacobische des Netzes). Dagegen ist der Ort der Spitzen eines dreifach unendlich linearen Systems von Kurven zufolge eines allgemeinen Satzes von E. Caporali (*Mem. di geometria*, Napoli 1888, S. 177) 12ter Ordnung mit einem vierfachen Punkte in jedem der Fundamentalpunkte des Systems; somit hat Steiner mit seiner Behauptung (a. O.) daß sie eine Sextik mit den Fundamentalpunkten als Doppelpunkten sei, Unrecht. Der Fall, daß das lineare System aus Kurven 3. Ordnung besteht, die durch 6 feste Punkte gehen, wurde von P. H. Schoute untersucht

Kurve gehört auch zu der von Weltzien in einer schon (S. 247) zitierten Schrift betrachteten Kategorie; daselbst findet sich sowohl die Gleichung der Kurve als auch die Angaben zur Bestimmung ihrer singulären Punkte[1]).

Eine elliptische Sextik hat im allgemeinen neun Doppelpunkte, einige von diesen können Spitzen sein. Beachten wir — was leicht einzusehen — daß eine elliptische Kurve von der Ordnung n höchstens $\frac{3n}{2}$ Spitzen haben kann, so ergibt sich, daß eine elliptische Sextik höchstens neun haben kann; um zu sehen, daß diese Maximalzahl wirklich erreicht wird, genügt es, die reziproke Kurve zu betrachten, die eine allgemeine Kurve dritter Ordnung ist, da eine solche von der 6. Klasse ist und neun Wendepunkte hat. Eine solche Sextik läßt 3 Kurven 3. Ordnung zu, die sie neunfach berühren[2]).

G. Salmon[3]) hat bemerkt, daß die neun Doppelpunkte einer elliptischen Sextik nicht unabhängig voneinander sind, und daß neun beliebig gewählte Punkte nur für die Sextik Doppelpunkte sind, die gebildet wird von der zweimal gezählten Kurve 3. Ordnung, die durch jene 9 Punkte bestimmt ist. Dies Resultat wurde von Halphen[4]) praezisiert, der in verschiedener Form die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aufgestellt hat, daß die 9 Punkte die Doppelpunkte einer eigentlichen Kurve 6. Ordnung sind, indem er sie aus der allgemeinen Kurvengleichung, die wir hier angeben wollen, herleitete. Es sei

$$A = \alpha_1 x_1^2(x_2 + x_3) + \alpha_2 x_2^2(x_3 + x_1) + \alpha_3 x_3(x_1 + x_2),$$

$$P = \sum p_{ik} x_i x_k, \quad Q = \sum q_{ik} x_i x_k, \quad R = \sum r_{ik} x_i x_k,$$

$$B = x_2 x_3 P + x_3 x_1 Q + x_1 x_2 R,$$

$$\alpha = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$$

$$\beta = (q_{11} + r_{11}) x_1^2 + \left(2 p_{23} + \frac{q_{33}\alpha_2}{\alpha_3} + \frac{r_{33}\alpha_3}{\alpha_2}\right) x_2^2 x_3 + \cdots$$

$$\gamma = \lambda x_1 x_2 x_3 + \frac{a_{11} r_{11}}{\alpha_1} x_1^3 + \left(\frac{r_{22} p_{23}}{\alpha_2} + \frac{q_{33} p_{23}}{\alpha_3}\right) x_2^2 x_3 + \cdots.$$

Hierin bedeuten x_1, x_2, x_3 homogene Koordinaten, und die durch die verschiedenen Indizes variierten Buchstaben Konstanten. Dann ist das Polynom

$$\alpha B^2 - 2\beta BA + \gamma A^2$$

(Verslagen K. Acad. Amsterdam XV, 1906—1907); insbesondere hat er auch den Fall untersucht, daß die 6 Punkte die Ecken und das Zentrum eines regelmäßigen Fünfecks bilden, sowie andere bemerkenswerte Fälle.

1) *Math. Ann.* XXX, 1887, S. 540 und 544.

2) A. Clebsch, *Journ. f. Math.* LXIV, 1865, S. 250.

3) Salmon-Fiedler, *Anal. Geom. d. höh. eb. Kurven,* II. Aufl. (Leipzig, 1887) S. 42.

4) *Bull. Soc. Math. France*, X, 1882, S. 162—172.

teilbar durch $x_1 x_2 x_3$, und der Quotient gleich Null gesetzt liefert die Gleichung der fraglichen Sextik.

Elliptisch sind auch die Kurven, die R. A. Roberts[1]) aus der Betrachtung des Integrals $\int \frac{dx}{X^{\frac{2}{3}}}$ hergeleitet hat, wo

$$X = (x - a)(x - b)(x - c);$$

dies Integral ist nämlich elliptisch, aber die Differentialgleichung

$$\frac{dx_1}{X_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{dx_2}{X_2^{\frac{2}{3}}} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

besitzt ein algebraisches Integral, das man auf folgende Weise erhalten kann. Man setze

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = \varphi(x) \quad \text{und} \quad (px + q)^3 = X + \lambda\varphi(x). \ (2)$$

Betrachtet man dann x_1, x_2, x_3 als Funktionen von p und q, so erhält man durch Differenzieren

$$\lambda\varphi'(x_1) = 3(px_1 + q)(x_1 \cdot dp + dq)$$

oder, weil $px_1 + q = X_1^{\frac{2}{3}}$,

$$\frac{\lambda \cdot dx_1}{X_1^{\frac{2}{3}}} = \frac{3(x_1 \cdot dp + dq)}{\varphi'(x_1)}.$$

Da nun aus dieser Beziehung noch zwei andere entstehen, indem man x_1 in x_2, x_3 verwandelt, so schließt man, daß

$$\frac{dx_1}{X_1^{\frac{2}{3}}} + \frac{dx_2}{X_2^{\frac{2}{3}}} + \frac{dx_3}{X_3^{\frac{2}{3}}} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

welche Differentialgleichung mit (1) übereinstimmt, wenn $x_3 = const.$ Nun folgt aber aus (2)

$$\sqrt[3]{\lambda\varphi(a)} = pa + q, \quad \sqrt[3]{\lambda\varphi(b)} = pb + q, \quad \sqrt[3]{\lambda\varphi(c)} = pc + q,$$

daher

$$(b - c)\sqrt[3]{\varphi(a)} + (c - a)\sqrt[3]{\varphi(b)} + (a - b)\sqrt[3]{\varphi(c)} = 0 \quad . \quad . \quad (4)$$

und dies ist das gesuchte algebraische Integral von Gleichung (1). Setzt man jetzt

$$x_1 = x + iy, \quad x_2 = x - iy, \quad x_3 = const.,$$

so stellt Gleichung (4) ein System von Sextiken dar, derart, daß durch jeden Punkt der Ebene drei hindurchgehen; für alle Kurven des Systems sind die Kreispunkte I und J dreifache Punkte, außerdem besitzt jede noch drei Doppelpunkte in endlicher Entfernung.

---

1) *On certain curves of the sixt order* (Mess. of. Math. II, Ser. XV, 1885/86, S. 26—32).

Sie sind von der 12ten Klasse und besitzen 18 Wendetangenten, 6 von diesen gehen zu je dreien durch die beiden Punkte I und J, und je zwei konjugierte treffen sich in einem der Brennpunkte der Kurve. Bezeichnen wir die letzteren mit A, B, C, so kann die Kurve auch als der Ort derjenigen Punkte P aufgefaßt werden, für welche das Produkt $AP \cdot BP \cdot CP$ in einem konstanten Verhältnisse zu der Länge der von P an den, dem Dreiecke ABC umbeschriebenen Kreis gezogenen Tangente steht; in bezug auf den genannten Kreis ist die behandelte Sextik eine anallagmatische Kurve (s. V. Abschn., Kap. 14). Schließlich kann eine dieser elliptischen Sextiken auf drei Arten als die Enveloppe eines Kreises betrachtet werden, der einen festen Kreis orthogonal schneidet, und dessen Zentrum auf einer dreispitzigen Hypozykloide liegt.

Eine rationale Sextik entsteht als Ort der Schnitte entsprechender Tangenten zweier Enveloppen von der Klasse 2 und 4[1]); als solche kann man z. B. einen Kegelschnitt und seine Evolute nehmen, und die entsprechende Korrespondenz läßt sich herstellen a) zwischen der Tangente an den Kegelschnitt im Punkte M und der Normalen in einem Punkte M', derart, daß die Gerade MM' immer durch einen festen Punkt geht[2]), oder b) zwischen der Tangente in M und der Normale in M' derart, daß M und M' die Endpunkte zweier konjugierter Durchmesser des Kegelschnittes sind[3]).

Eine rationale Sextik ist auch die Brennlinie durch Spiegelung (Katakaustika) eines Kreises für den Fall, daß der leuchtende Punkt eine beliebige Lage hat. Sie hat vier Doppelpunkte und sechs Spitzen (also keine Wendepunkte) und wurde eingehend von A. Cayley[4]) untersucht und ferner von T. I. J. Bromwich[5]), der sie direkt als Enveloppe ihrer Tangenten betrachtete.

Zu Kurven sechster Ordnung führt auch eine Anwendung der Theorie der Charakteristiken von Chasles. Beachten wir, daß die von Kegelschnitten, die durch p Punkte gehen und t Geraden berühren, gebildeten Systeme folgende Charakteristiken haben (wenn $p + t = 4$): $(1, 2), (2, 4), (4, 4), (4, 2), (2, 1)$: demnach ist die Zahl der Kurven des Systems, die einen festen Kegelschnitt berühren, bzw. 6, 12, 16, 12, 6. Bezeichnet man daher mit C die Bedingung für einen Kegelschnitt,

---

1) Vgl. die S. 239, zitierte Diss. von Eberle.

2) P. Hendlé, im *Intermédiaire* VII, 1900, S. 228.

3) Barisien, Ler, Malo, Tafelmacher und Lez im *Intermédiaire* XI, 1904, S. 94. 225, 294; XIII, 1906, S. 20.

4) Phil. Trans. London CLXVIII (1858) oder *Collected Papers* II, S. 33—44.

5) *Americ. Journ. Mathem.* XXVI, 1904. Man kann noch bemerken, daß auch sechster Ordnung die Kaustika eines Kegeschnittes ist, wenn der leuchtende Punkt im Mittelpunkte der Kurve, oder unendlich fern auf einer Achse, oder wenn es sich um eine Parabel handelt, auf deren Achse das Licht liegt: vgl. G. Steiner, Diss. Lund 1896, S. 35—41.

daß er einen andern festen berühre, so ergibt sich aus dem Vorigen folgende Reihe von Charakteristiken der vier speziellen Kegelschnittsysteme

$$(3p, C) = (6, 12); \quad (2p, 1r, C) = (12, 16);$$
$$(1p, 2r, C) = (16, 12); \quad (3r, C) = (12, 6).$$

Wendet man nun auf die beiden ersten Systeme einen allgemeinen Satz von Chasles an, so schließt man:

Der Ort der Zentra derjenigen Kegelschnitte die einen festen Kegelschnitt berühren und durch ein und denselben festen Punkt gehen, ist eine Kurve sechster Ordnung; letztere ist rational[1].

Damit ist die Aufzählung der Sextiken, die mit der Theorie der Kegelschnitte verknüpft sind, bei weitem nicht erschöpft, wie wir in den folgenden Darlegungen zeigen werden.

b) Sextiken, die mit dem Normalen-Problem der Kegelschnitte verknüpft sind.

103. Wir betrachten einen zentrischen Kegelschnitt, z. B. die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

oder in parametrischer Darstellung

$$x = a \cdot \cos\varphi, \qquad y = b \cdot \sin\varphi. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1')$$

Setzen wir, wie üblich, $a^2 - b^2 = c^2$ und nennen u und v die Plückerschen Koordinaten einer Normalen der Kurve, so ergibt sich leicht, daß

$$u = \frac{a}{c^2 \cos\varphi}, \quad v = \frac{b}{c^2 \sin\varphi}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Eliminieren wir aus diesen Gleichungen den Winkel φ, so erhalten wir die Tangentialgleichung der Evolute der Ellipse (1) in folgender Form:

$$a^2v^2 + b^2u^2 - c^2u^2v^2 = 0.$$

Um nun die Geraden dieser Enveloppe zu finden, die durch einen Punkt mit den Koordinaten ξ, η gehen, setzen wir $\frac{y-\eta}{x-\xi} = \lambda$, d. h. wir betrachten die Gerade, die zu Plückerschen Koordinaten hat

$$u = -\frac{\lambda}{\lambda\xi - \eta}, \quad v = \frac{1}{\lambda\xi - \eta}.$$

Damit diese die Evolute berühre, muß der Parameter λ offenbar der Gleichung genügen

$$\frac{a^2 + b^2\lambda^2}{(\lambda\xi - \eta)^2} - \frac{c^4}{(\lambda\xi - \eta)} = 0,$$

---

1) Barisien, Brocard, Malo, Mathieu und Retali im *Intermédiaire:* XI, 1904, S. 239, 303; XII, 1905, S. 228; XIII, 1906, S. 40, 108.

oder auch

$$b^2\xi^2\lambda^4 - 2b^2\xi\eta\lambda^3 + (a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - c^4)\lambda^2 - 2a^2\xi\eta\lambda + a^2\eta^2 = 0. \quad (3)$$

Dies ist eine biquadratische Gleichung für λ, deren vier Wurzeln die Normalen der Ellipse geben, die durch den Punkt (ξ, η) gehen. Die linke Seite dieser Gleichung hat zwei Invarianten i, j, nämlich

$$i = \frac{1}{6}(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - c^4),$$

$$j = \frac{1}{36}\{(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - c^4)^3 + 54a^2b^2c^4\xi^2\eta^2\}.$$

Erinnern wir uns nun, daß diese Invarianten zu Null werden, wenn die Wurzeln jener biquadratischen Gleichung eine äquianharmonische oder eine harmonische Gruppe bilden, so schließen wir: I. Der Kegelschnitt $a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - c^4 = 0$ ist der Ort der Punkte in der Ebene der Ellipse, von denen man an die letztere vier äquianharmonische Normalen ziehen kann. II. Die Kurve sechster Ordnung $(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - c^4)^3 + 54a^2b^2c^4\xi^2\eta^2 = 0$ ist der Ort der Punkte, von denen man zu der Ellipse 4 harmonische Normalen ziehen kann[1]). Die absolute Invariante der linken Seite von Gleichung (3) ist $i^3 : j^2$, also gleich

$$\frac{6(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - c^4)^6}{[(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - c^4)^3 + 54a^2b^2c^4\xi^2\eta^2]^2}.$$

Setzen wir diese gleich einer Konstanten $6k$, so entsteht eine Gleichung in ξ und η, die den Ort der Punkte darstellt, von denen sich zu der Ellipse vier Normalen ziehen lassen, die ein gegebenes anharmonisches Verhältnis bilden. Nun ist nicht schwer zu erkennen, daß die besagte Gleichung zerfällt in die beiden:

$$[a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - e^4]^3 \pm \sqrt{k}\,[(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - e^4)^3 + 54a^2b^2e^4\xi^2\eta^2] = 0, \quad (4)$$

demnach wird dieser Ort gebildet von zwei gleichartigen Sextiken; jede von ihnen hat 6 Spitzen (von denen aber nur vier reell sind), keine Doppelpunkte und 24 Wendepunkte. Die Diskriminante jener biquadratischen Form in λ hat den Wert $i^3 - 6j^2$, zerfällt daher in das Produkt von $54a^2b^2c^4\xi^2\eta^2$ in

$$(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - c^4)^3 + 54a^2b^2c^4\xi^2\eta^2;$$

dieser zweite Ausdruck gleich 0 gesetzt, stellt in Punktkoordinaten die Evolute der gegebenen Ellipse dar, während der erste die Achsen derselben darstellt; dies ist leicht erklärlich, wenn man bedenkt, daß die Achsen Doppelnormalen der Kurve sind.

Die soeben betrachteten Kurven liefern als Projektionen Kurven, die sich als Evolute in einer nicht-euklidischen Maßbestimmung definieren lassen, und von diesem Gesichtspunkte aus von A. Clebsch in

---

1) *Educational Times*, Quest. 6431; aufgelöst 36 (1882), S. 75—76.

einer seiner fundamentalen Abhandlungen angetroffen wurden[1]). So sind die Evoluten der Kegelschnitte vom projektiven Standpunkt aus identisch mit den Kurven sechster Ordnung, die in homogenen Koordinaten dargestellt werden durch Gleichungen von folgendem Typus

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^{\frac{2}{3}} = 0.$$

S. Roberts, der diese in erschöpfender Weise untersucht hat[2]), bemerkte u. a., daß sie rational sind, vier Doppelpunkte und sechs Spitzen haben, demnach von der vierten Klasse und reziprok sind zu denen mit der Gleichung

$$\frac{1}{a_1{}^2 x_1{}^2} + \frac{1}{a_2{}^2 x_2{}^2} + \frac{1}{a_3{}^2 x_3{}^2} = 0,$$

daß ihre Doppelpunkte die Koordinaten haben

$$x_1 : x_2 : x_3 = a_1 : a_2 : a_3,$$

und daß ihre Spitzen auf dem Kegelschnitte

$$\frac{x_1{}^2}{a_1{}^2} + \frac{x_2{}^2}{a_2{}^2} + \frac{x_3{}^2}{a_3{}^2} = 0$$

liegen usw. — Aus der durch Gleichung (4) dargestellten Sextik wurden weitere von G. Bauer[3]) abgeleitet und zwar durch ein Verfahren, das auf eine euklidische Maßbestimmung beschränkt, sich folgendermaßen wiedergeben läßt: Man betrachte von der üblichen Ellipse die beiden Punkte $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, sowie die zugehörigen Tangenten und Normalen; sind nun ξ, η die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden ersteren, X, Y die des Schnittes der beiden letzteren, so findet man, daß die einen mit den anderen durch die Relation verknüpft sind:

$$X = \frac{c^2 \xi (b^2 - \eta^2)}{a^2 \eta^2 + b^2 \xi^2}, \quad Y = \frac{c^2 \eta (a^2 - \xi^2)}{a^2 \eta^2 + b^2 \xi^2}.$$

Man denke sich nun, daß der eine Punkt (X, Y) eine der durch Gleichung (4) dargestellten Kurven durchlaufe, dann beschreibt der andere Punkt (ξ, η) eine Kurve 18. Ordnung, deren Gleichung sich in folgender Form schreiben läßt:

---

1) *Über das Problem der Normalen bei Kurven und Oberflächen der zweiten Ordnung* (Journ. f. Math. LXII, 1863.

2) *On the sextix curves represented by* $\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{C}\right)^{\frac{2}{3}} = 0$ *and the correlative quartics* (Quart. Journ. Math. XV, 1878.)

3) *Über Systeme von Kurven 6. Ordnung, auf welche das Normalenproblem der Kegelschnitte führt* (Münchener Sitzungsber. VIII, 1878).

$$\left\{\left(\frac{\xi^2}{a^2}-1\right)\left(\frac{\eta^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}\right)-4\frac{\xi^2\eta^2}{a^2b^2}\right\}^3+\frac{54\sqrt{k}}{1+\sqrt{2}}\frac{\xi^2\eta^2}{a^2b^2}.$$

$$\left(\frac{\xi^2}{a^2}-1\right)\left(\frac{\eta^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}\right)=0. \quad \ldots \quad (5)$$

Setzt man aber

$$\left(\frac{\xi^2}{a^2}-1\right)\left(\frac{\eta^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}\right)=\varrho\,\frac{\xi^2\eta^2}{a^2b^2} \quad \ldots \quad (6)$$

so wird obige Gleichung zu

$$(\varrho-4)^3+\frac{54\sqrt{k}}{1+\sqrt{k}}\varrho^2=0 \quad \ldots \quad (7)$$

und dies zeigt, daß jene Kurve in drei Kurven sechster Ordnung zerfällt, die durch Gleichung (6) dargestellt werden, unter der Voraussetzung, daß ϱ eine Wurzel der Gleichung (7) ist. Jede von ihnen ist vom Geschlechte 7 und der Klasse 24. — Andere Kurven derselben Ordnung ergeben sich, wenn man den Punkt (X, Y) die Evolute der Ellipse durchlaufen läßt, oder den Kegelschnitt, der der Ort der Schnittpunkte von Quadrupeln harmonischer Normalen ist.

Sucht man die Bedingung dafür, daß die Gleichung (4) außer λ noch die Wurzel $-\frac{1}{\lambda}$ habe, so erhält man den Ort der Punkte, von denen Paare zueinander senkrechter Normalen der Ellipse (1) ausgehen; seine Gleichung ist[1])

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2)(a^2y^2+b^2x^2)^2=(a^2-b^2)^2(a^2y^2-b^2x^2)^2. \quad (8)$$

Das Normalenproblem ist eine wahre Fundgrube für spezielle Sextiken, und dies bezeugen uns auch noch die folgenden Sätze.

1. Der Ort der Mittelpunkte der Kreise, die den Dreiecken umbeschrieben sind, deren Ecken die Fußpunkte der drei Normalen sind, die von einem Punkte ihrer Evolute auf die Ellipse gefällt werden können, hat die Gleichung[2])

$$4(a^2x^2+b^2y^2)^3=a^2b^2(a^2-b^2)x^2y^2.$$

2. Der Ort der Punkte M, die so beschaffen sind, daß, wenn man von ihnen die Normalen auf eine Ellipse zieht und das Viereck konstruiert, das zu Seiten die entsprechenden Tangenten hat, dieses zueinander senkrechte Diagonalen hat, ist eine Sextik[3]).

3. Ebenso ist der Ort der Ecken dieses Vierecks eine Sextik.

4. Sind P, Q, R die Fußpunkte der von einem beliebigen Punkte M der Ellipse auf diese gezogenen Normalen, so ist der Ort der Schnittpunkte der Gegenseiten des Vierecks $MPQR$ eine Kurve sechster Ordnung[4]).

---

1) Vidal in *Nouv. Ann. Mathém.* II, 1848, S. 365.

2) *Educ. Times*, Quest. 6375, gelöst XXXVI, 1882, S. 77.

3) *Intermédiaire* VII 1900, S. 164 und 349.

4) Das. VIII 1901, S. 155 und 319; XIII 1906, S. 62, 207, 225.

5. Halbiert man das im Innern der Ellipse gelegene Stück der Normale, so beschreibt der Mittelpunkt eine vierblätterige Kurve sechster Ordnung, deren Gleichung

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2\left(\frac{x^2}{a^6}+\frac{y^2}{b^6}\right)-(a^2-b^2)^2\frac{x^2y^2}{a^6b^6}=0 \text{ ist.}$$

Dieselbe Kurve beschreibt auch der Schwerpunkt des Dreiecks, das von der Normale und den beiden zu ihren Endpunkten laufenden Radien gebildet wird.[1])

6. Ferner ist der Fußpunkt des vom Mittelpunkte auf die Normale gefällten Lotes eine vierblätterige Kurve mit der Gleichung

$$(x^2+y^2)^2(b^2x^2+a^2y^2)-(a^2-b^2)^2x^2y^2=0.$$ [1])

c) Fokal-Sextiken.

104. Der geometrische Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte einer Schar ist bekanntlich eine zirkulare Kurve dritter Ordnung; der analoge Ort für ein Büschel ist eine Sextik, die die Kreispunkte I und J zu Doppelpunkten hat. Dies ergibt sich als spezielle Anwendung der Chaslesschen Sätze über die Theorie der Charakteristiken; zuerst aber war dies schon von H. Faure ausgesprochen worden (1861), als *Question* 565 der *Nouvelles annales de mathématiques* Bd. XX, S. 65; der erste Beweis wurde von Cremona gegeben[2]), der zuvor bewies, daß im allgemeinen der geometrische Ort der Brennpunkte von Kurven n^{ter} Ordnung in einem Büschel eine Kurve von der Ordnung $2(n-1)[2n(n-1)-1]$ sei, die die Kreispunkte der Ebene als $2(n-1)[n(n-1)-1]$-fache Punkte und die Grundpunkte des Büschels als Doppelpunkte habe.

Der angeführte Satz von Faure findet sich in einem der klassischen Lehrbücher von Salmon[3]) bewiesen, wo auch die elegante von Möbius[4]) entdeckte Beziehung zwischen den fünf Punkten der Ebene, von denen einer der Brennpunkt der durch die vier anderen gehenden Kegelschnitte ist, aufgestellt ist. Jedoch rührt die erste tiefer gehende Untersuchung der fraglichen Kurve von Sylvester[5]) und Cayley[6]) her; der erstere fand die genannte Möbiussche Beziehung wieder auf, und beide lieferten verschiedene bemerkenswerte analy-

---

1) Brieflich mitgeteilt dem Übersetzer von cand. math. Leop. Braude.

2) *Nouv. Annales Mathém.* 2e Sér. III. 1864, S. 21.

3) Salmon-Fiedler, *Analyt. Geom. d. Kegelschnitte* VI. Aufl. (Leipzig, 1898), S. 540.

4) *Journ. f. Math.* XXVI, 1893, od. *Ges. Werke* I, S. 587.

5) *Supplemental note on the analogous in space to the cartesians ovals in plano* (Phil. Magaz., May 1866).

6) *On the locus of the conics which pass through four given points* (Phil. Magaz. XXXII, 1866, oder *Collected papers* VII).

tische Darstellungen der Kurve. — Ohne irgend Beziehung zu diesen Untersuchungen und allein mit Hilfe der reinen Geometrie wurde dieselbe Aufgabe in ausgezeichneter Weise von K. Bobeck[1]) behandelt; er bemerkte, daß außer den Kreispunkten die fragliche Kurve noch die Ecken des allen Kegelschnitten des Büschels gemeinsamen autokonjugierten Dreiecks zu Doppelpunkten habe (in jedem dieser stehen die zugehörigen Tangenten aufeinander senkrecht) und die Fußpunkte der Höhen desselben. Sie ist hyperelliptisch und vom Geschlechte $p=2$, und ferner dadurch spezialisiert, daß die sechs Doppelpunkte der entsprechenden hyperelliptischen Korrespondenz paarweise zusammenfallen. — Die erwähnte Gleichung von Möbius besteht zu Recht auf Grund neuerer Untersuchungen von S. Haller über die Fokalkurven elementarer Systeme von einfach unendlich vielen Kegelschnitten[2]), Haller hat bemerkt, daß man, wenigstens in Spezialfällen, aus ihr die Gleichung der Kurve in der gewöhnlichen Form ableiten kann; z. B. in dem Falle, daß die Grundpunkte des Büschels die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks und dessen Mittelpunkt sind; als Polargleichung der Kurve findet sich dann

$$4\varrho^6 + 4\varrho^5 \cos 3\omega - 15\varrho^4 + 8\varrho^2 - l = 0.$$

Im allgemeinen Falle läßt sich die Untersuchung der Kurve besser ausführen, wenn man eine Darstellung durch irrationale Funktionen eines Parameters benutzt; alsdann kann man beispielsweise die verschiedenen Gestalten der Kurve finden, die sie zufolge der Lage der Grundpunkte des Büschels annimmt, sowie die Singularitäten, die sie ausnahmsweise in speziellen Fällen erhält. So z. B., wenn jene Punkte ein Kreisviereck bilden, so zerfällt die Kurve in zwei zirkulare von der dritten Ordnung (Satz von Sylvester[3])); fallen zwei von ihnen zusammen, so wird die Sextik rational und erhält einen vierfachen Punkt; wenn die Verbindungslinie zweier von ihnen parallel zu der Verbindungslinie der beiden andern ist, so zerfällt die Fokalkurve in die unendlich ferne Gerade und eine Quintik, die im allgemeinen vom Geschlechte $p=2$ ist, jedoch rational wird, wenn zwei der Grundpunkte des Büschels koinzidieren usw. — Die eleganteste analytische Darstellung der Fokalkurve findet sich in der letzten Veröffentlichung von G. Bauer[4]); dort wird ein homogenes Koordinatensystem benutzt,

1) *Die Brennpunktskurve der Kegelschnittbüschels* (Monatshefte Math. Phys. III, 1892).

2) *Untersuchungen der Brennpunktskurve eines Kegelschnittbüschels mit besonderer Berücksichtigung der gestaltlichen Verhältnisse* (Dissert. München, 1903 oder Archiv Math. Phys. III. Ser., III, 1903). S. auch die spätere Arbeit desselben *Über die Brennpunktskurven von Kegelschnittsystemen* (Progr. München, 1908).

3) Vgl. Salmon-Fiedler, *Kegelschnitte* VI. Aufl., S. 555.

4) *Von der Kurve sechster Ordnung, welche der Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte ist, welche durch vier Punkte gehen* (Münchener Ber. XXXV, 1905).

dessen Fundamentaldreieck ABC mit jenem schon genannten, für alle Kurven des Büschels autokonjugiertem Dreiecke zusammenfällt. Die Gleichungen zweier Kegelschnitte des Büschels lassen sich schreiben als

$$a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 = 0, \qquad a_1' x_2 x_3 + a_2' x_3 x_1 + a_3' x_1 x_2 = 0.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$a_2 a_3' - a_1 a_2' = (2\,3), \quad a_3 a_1' - a_1 a_3' = (3\,1), \quad a_1 a_2' - a_2 a_1' = (1\,2);$$

$$x_2 x_3 + x_1(-x_1 \cos A + x_2 \cos B + x_3 \cos C) = K_1,$$

$$x_3 x_1 + x_2(x_1 \cos A - x_2 \cos B + x_2 \cos C) = K_2,$$

$$x_1 x_3 + x_3(x_2 \cos A + x_2 \cos B - x_3 \cos C) = K_1,$$

so stellen die Gleichungen $K_1 = 0$, $K_2 = 0$, $K_3 = 0$ die drei über den Strecken BC, CA, AB als Durchmessern beschriebenen Kreise dar, während die Gleichung

$$(2\,3)\, x_2 x_3 K_2 K_3 + (3\,1)\, x_3 x_1 K_3 K_1 + (1\,2)\, x_1 x_2 K_1 K_2 = 0$$

die Sextik, den Ort der Brennpunkte des betrachteten Kegelschnittbüschels darstellt. Diese eignet sich besonders gut zur Bestimmung der verschiedenen Gestalten der Kurve, der Bedingungen unter denen sie zerfällt und anderem.

Erinnern wir uns der von Plücker gegebenen Definition des „Brennpunktes eines Kegelschnittes“, so erkennen wir, daß die soeben behandelte Aufgabe auf eine beliebige Maßbestimmung ausgedehnt, sich verwandelt in die Aufsuchung des Ortes der Ecken eines vollständigen Vierseits, das einem festen Kegelschnitte und sukzessive allen Kegelschnitten des Büschels umschrieben ist. Einzelne Fälle dieser Aufgabe wurden mit mehr oder weniger Glück in den *Nouvelles Annales de Mathématiques* behandelt[1]), allgemein jedoch mit bemerkenswerter Eleganz von G. Darboux gelöst durch folgendes Verfahren[2]): Es sei $S = 0$ die homogene Gleichung des festen Kegeschnittes und $M(x', y', z')$ ein Punkt des gesuchten Ortes. Setzen wir dann

$$x' \frac{\partial S}{\partial x} + y' \frac{\partial S}{\partial y} + z' \frac{\partial S}{\partial z} = 2P,$$

so wird die zusammenfassende Gleichung der beiden von M an den festen Kegelschnitt gezogenen Tangenten sein

$$SS' - P^2 = 0$$

wo S' den Ausdruck bedeutet, den man erhält, wenn man in S an Stelle der x, y, z bzw. x', y', z' setzt. Für jeden Punkt des gesuchten Ortes gibt es einen Kegelschnitt, der die beiden vorigen

---

1) S. z. B. die Abh. von P. le Cointe, *Lieu des points de rencontre des tangentes communes à une conique et à un cercle* (Nouv. Ann. Math. XIX, 1860) sowie einige andere dort zitierte Schriften.

2) *Correspondance* (Nouv. Ann. Math. XIX, 1860, S. 184).

Geraden berührt und durch die vier Punkte A_i geht ($i = 1, 2, 3, 4$), die die Grundpunkte des betrachteten Büchels sind. Sei nun

$$P^2 - SS' = (mx + ny + pz)^2$$

die Gleichung dieses Kegelschnittes, und seien x_i, y_i, z_i die Koordinaten des Punktes A_i, und S_i, P_i die Resultate der Einsetzung der Koordinaten von A_i in S bzw. P, so bestehen die folgenden Gleichungen:

$$\pm \sqrt{P^2 - SS'} = mx + ny + pz.$$

Eliminieren wir aus diesen vier Gleichungen die Konstanten m, n, p, so erhalten wir folgende irrationale Gleichung des Ortes

$$\pm (234)\sqrt{P_1^2 - S'S_1} \pm (134)\sqrt{P_2^2 - S'S_2} \pm (124)\sqrt{P_3^2 - S'S_3} \pm (123)\sqrt{P_4^2 - S'S_4} - 0,$$

wo im allgemeinen

$$(i\,j\,k) = \begin{vmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix}.$$

Diese Gleichung, die offenbar die Möbiussche Gleichung in einer beliebigen Maßbestimmung ist, wird rational gemacht auf den achten Grad steigen, aber es ist leicht einzusehen, daß sie den Faktor S' im allgemeinen enthält. Die Kurve ist demnach, wie in der euklidischen Geometrie, von der sechsten Ordnung und hat die von den Grundpunkten an den festen Kegelschnitt gezogenen acht Tangenten zu dreifachen Tangenten; sie zerfällt in Kurven niederer Ordnung, wenn jene Grundpunkte des Büschels dem Kegelschnitte angehören.

Eine andere Sextik entsteht, wenn man beachtet, daß alle Kegelschnitte, die zwei feste Kegelschnitte doppelt berühren, drei Systeme mit den Charakteristiken 2, 2 bilden[1]). Die Mittelpunkte der Kegelschnitte dieser Systeme bilden eine Kurve zweiter Ordnung, während ihre Brennpunkte als geometrischen Ort eine bizirkulare Kurve sechster Ordnung haben. Aus der Gleichung einer von diesen Kurven, die R. A. Roberts[2]) ermittelt hat, ergibt sich, daß die Kurve durch die unendlich fernen Punkte der beiden, dem betrachteten System angehörenden, Parabeln hindurchgeht, und als Doppelpunkte außer den beiden Punkten, die einen der durch die gegebenen Kegelschnitte definierten Schar angehörenden Kegelschnitt darstellen, noch drei andere Punkte hat. Im ganzen besitzt diese Sextik sieben Doppelpunkte, ist also vom Geschlechte $p = 3$. Doppeltangenten sind die Geraden, die die beiden gegebenen Kegelschnitte von den Kreispunkten I und

1) Vgl. Salmon-Fiedler, *Kegelschnitte* (VI. Aufl.), S. 572.

2) *On the locus of the foci of conics having double contact with two fixed conics* (Bull. Amer. Math. Society II, 1896).

J aus projizieren. Bemerkenswert ist der Fall, daß die gegebenen Kegelschnitte zwei Kreise sind, der sich in einigen wohlbekannten Betrachtungen wiederfindet, die von Steiner über die sie doppelt berührenden Kegelschnitte gemacht wurden[1]).

d) Andere Kurven sechster Ordnung, die von einem Kegelschnitte abgeleitet sind.

105. Die Theorie der Kegelschnitte, die uns schon zu so vielen Kurven dritter, vierter, fünfter und sechster Ordnung geführt hat, liefert noch viele andere Kurven sechster Ordnung, die nicht mit den Brennpunkten zusammenhängen, von denen nur einige Beispiele angeführt sein mögen:

1. Die Enveloppe der Geraden, die den Oskulationspunkt mit dem anderen Schnittpunkte des Krümmungskreises in einem Kegelschnitt verbinden, hat die Gleichung

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-4\right)^3+27\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2=0$$ [2]).

Sie ist eine Sextik mit vier Spitzen in $x=a\sqrt{2}$, $y=b\sqrt{2}$ und 6 anderen Doppelpunkten, daher auch sechster Klasse mit vier Wendepunkten und sechs Doppeltangenten.

2. Man bezeichnet mit Radiale einer Kurve den Ort der Endpunkte der von einem festen Punkte ausgehenden und mit den Krümmungsradien der Kurve äquipollenten (gleich und gleich gerichteten) Strecken[3]). Man betrachte z. B. die durch die beiden Gleichungen

$$x=a\cdot\cos\varphi\,,\qquad y=b\cdot\sin\varphi$$

dargestellte Ellipse. Ist ϱ der Krümmungsradius im Punkte (φ) der Ellipse und ω der Winkel, den er mit der x-Achse bildet, so hat man

$$\varrho=\frac{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab},\qquad \operatorname{tg}\omega=\frac{a}{b}\operatorname{tg}\varphi\,.$$

Die Polargleichung der Radiale geht aus diesen beiden Gleichungen hervor, wenn man ω daraus eliminiert; die zweite liefert uns

$$\frac{\sin\varphi}{b\sin\omega}=\frac{\cos\varphi}{a\cos\omega}=\frac{1}{\sqrt{b^2\sin^2\omega+a^2\cos^2\omega}},$$

demnach wird die erste zu

1) Salmon-Fiedler, *Kegelschnitte* (VI. Aufl.) S. 73.

2) Salmon-Fiedler, *Höhere Kurven*, II. Aufl. (Leipzig, 1873) S. 90.

3) R. Tucker, *On radial curves* (Proc. Lond. math. Soc. I, 1865); Hoüel, *Cours de calcul infinitésimal* II (Paris, 1879) S. 269, Ex. 37.

$$ab\varrho = \frac{(ab)^3}{(a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega)^{\frac{3}{2}}},$$

oder

$$\varrho^2 (a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega)^3 = a^4 b^4.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung[1]); gehen wir zu kartesischen Koordinaten über, so wird sie

$$(a^2x^2 + b^2y^2)^3 = a^4b^4 (x^2 + y^2)^2.$$

Die Radiale der Ellipse ist demnach von der sechsten Ordnung, hat den Anfang als vierfachen Punkt, und die Tangenten in diesem fallen paarweise mit den bezüglichen isotropischen Geraden zusammen. — Ähnliches findet statt für die Hyperbel.

3. Ebenfalls von der Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ hat Wolstenholme eine andere Kurve sechster Ordnung abgeleitet, die bemerkenswert ist, zumal da sie zu sich selbst reziprok ist[2]). Er betrachtete einen beliebigen Punkt O der Ellipse **E** und beschrieb um O als Mittelpunkt einen Kreis **K**, so beschaffen, daß es ∞^1 Dreiecke gibt, die in **E** einbeschrieben und **K** umbeschrieben sind. Die Enveloppe aller dieser Kreise wird gebildet von der Ellipse mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\right)^2$$

und der Kurve Γ, die durch folgende Gleichungen dargestellt wird

$$x = \frac{a \cos \vartheta}{a^2 - b^2} \left\{ a^2 + b^2 + 4b^2 \frac{a^2 \sin^2 \vartheta - b^2 \cos^2 \vartheta}{a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta} \right\},$$

$$y = \frac{b \sin \vartheta}{a^2 - b^2} \left\{ b^2 + a^2 + 4a^2 \frac{b^2 \cos^2 \vartheta - a^2 \sin^2 \vartheta}{b^2 \cos^2 \vartheta + a^2 \sin^2 \vartheta} \right\}.$$

Sie ist von der sechsten Ordnung und der sechsten Klasse, hat sechs Doppelpunkte und vier Spitzen, sechs Doppeltangenten und vier Wendepunkte; Wolstenholme hat auch ihre Gestalt bestimmt.

4. Eine Kurve sechster Ordnung entsteht auch, wenn man das Zentrum einer Ellipse auf die Sehnen, die sie mit ihren Oskulationskreisen gemeinsam hat, projiziert[3]); ihre Gleichung lautet

$$(x^2 + y^2)^2 (a^2x^2 + b^2y^2) = (a^2x^2 - b^2y^2)^2,$$

somit ist das Zentrum der Ellipse ein vierfacher Punkt derselben.

5. Die durch die folgenden äquivalenten Gleichungen dargestellte Kurve

$$2(2x^2 + 2y^2 - Rx)^3 = 27R^2 (x^2 + y^2)^2,$$

oder

$$\varrho = 2R \cos^3 \frac{\pi - \omega}{3},$$

---

1) R. Tucker, *The radial of an ellipse* (Quart. Journ. Math. XVIII, 1882).

2) *On a certain envelope* (Proc. Lond. Math. Soc. XV, 1884).

3) *Progréso Mathem.*, Cuest. 93.

wurde zuerst durch Maclaurin[1]) als die Fußpunktkurve einer Kardiode in bezug auf ihre Spitze betrachtet und aus diesem Gesichtspunkt von Cayley[2]) untersucht. Aber als Ort der Scheitel der Parabeln, die einen festen Kreis — mit dem Zentrum O und dem Radius R — berühren und alle einen Punkt der Peripherie desselben zum Brennpunkte haben, wurde sie von Barisien[3]) erdacht, und dann von einigen anderen untersucht[4]); unter diesen möge Retali hervorgehoben werden[5]).

6. Fällt man von einem Punkte P der Ellipse das Lot auf den Vektor des zu P in bezug auf die große Achse symmetrischen Punktes, so beschreibt der Fußpunkt des Lotes, wenn P variiert, die vierblätterige Kurve

$$(x^2+y^2)^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)-(x^2-y^2)^2=0,$$

die eine Verallgemeinerung der vierblätterigen Rhodonee (s. Abschn. V, Kap. 4) ist.[6])

Für andere Kurven ähnlichen Ursprungs findet der Leser Hinweise in den Sammlungen von Übungsbeispielen der analytischen Geometrie; wir können uns hier bei diesen nicht aufhalten, da uns andere Linien fesseln, die wegen ihrer Wichtigkeit besondere Namen erhalten haben[7]).

Drittes Kapitel.

Kurven sechster Ordnung (Fortsetzung).

e) Astroiden und Skarabäen (Stern- und Käferkurven).

106. Die Bewegung einer Ebene in sich selbst kann dadurch definiert werden, daß man zwei feste Kurven, die Direktrizen oder Leitkurven angibt, welche von zwei festen Punkten der beweglichen

---

1) *Philos. Transactions*, London 1718.

2) *A supplementary memoir on caustics* (Phil. Trans. 157, 1867) oder *The collected Papers* V, S. 454—464). Dies ist der Grund für den von Arhibald (s. die o. a. Dissertation) vorgeschlagenen Namen von *Cayleys sextic.*

3) *Intermédiaire*, II. S. 21. Vgl. auch Nouv. Ann. Math., Question 166; aufgelöst (1848) durch P. Serret.

4) Das. S. 376.

5) *Note sur une courbe du sixième ordre* (Journ. de math. spéc. 4. Ser. VI, 1897).

6) Mitgeteilt von cand. math. Leop. Braude.

7) Unter ihnen findet sich nicht die Kurve mit der Gleichung

$$y^6-3axy^4-2a^2xy^3+3a^2x^2y^2-6a^3x^2y+a^4x^2-a^3x^3=0,$$

von der Hudde in einem Briefe an Fr. van Schooten spricht, v. 1. Dez. 1657. (*Œuvres de Huygens* II, S. 97), die aber später nicht untersucht wurde.

Ebene durchlaufen werden sollen; jeder andere Punkt der Ebene beschreibt dann eine Kurve, welche die Engländer und Franzosen Glisette nennen und die wir mit dem Namen Olistoide (von ὀλισθάνω, gleite) oder Gleitkurve bezeichnen[1]). Jede beliebige Kurve, insbesondere jede beliebige Gerade der beweglichen Ebene hingegen umhüllt eine Kurve, die Enveloppe-Glisette oder olistoidale Hüllkurve genannt wird[2]).

Wenn die Direktrizen algebraische Kurven sind, und man bezeichnet ihre Ordnung mit n und n', ihre Klasse mit ν und ν', mit d, d' die Zahl ihrer Doppelpunkte, mit k, k' die Zahl der Spitzen, so hat man für die Olistoide im allgemeinen: Ordnung $2n \cdot n'$, Klasse $2(n\nu' + n'\nu + nn')$, Zahl der Doppelpunkte $nn'(2nn' - n - n') + 2(nd' - n'd)$ und Zahl der Spitzen $2(nk' + n'k)$; wenn aber die Leitkurven zusammenfallen oder durch die imaginären Kreispunkte gehen, so erfahren diese Zahlen beträchtliche Modifikationen[3]).

Der einfachste Fall ist der, daß die beiden Leitkurven gerade Linien sind, und daß man den Ort eines Punktes, der auf der Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte liegt, betrachtet oder auch die Enveloppe dieser Verbindungslinie. Jener Ort ist bekanntermaßen eine Ellipse, diese Enveloppe dagegen eine neue Kurve, die wegen ihrer Form Astroide[4]) oder Sternkurve genannt wurde. Um ihre analytische Darstellung zu finden, nehmen wir die beiden festen Geraden als Koordinatachsen und bezeichnen den Winkel zwischen ihnen mit α (Taf. IX, Fig. 60), die Länge der Verbindungslinie der beiden bewegten Punkte A und B mit l und mit φ und ψ die Winkel, welche die Gerade AB in einer beliebigen Lage mit den beiden Achsen bildet; das Dreieck OAB ergibt dann:

$$\varphi + \psi = \pi - \alpha, \quad \frac{OA}{\sin\psi} = \frac{OB}{\sin\varphi} = \frac{l}{\sin\alpha} \cdot \quad (1)$$

Folglich ist die Gleichung der Geraden AB

$$\frac{x}{\sin\psi} + \frac{y}{\sin\varphi} = \frac{l}{\sin\alpha} \cdot \quad (2)$$

1) Beispiele von Gleitkurven vierter Ordnung enthält die Arbeit von Dewall, *Zwei geometrische Aufgaben aus der Kurvenlehre* (Arch. Math. Phys. XLII, 1864),

2) Zu dieser Klasse von Kurven gehören z. B. diejenigen, welche J. B. Pomey in dem Aufsatze *Enveloppes des côtes d'un carré dont deux sommets descrivent deux droites rectangulaires* (Nouv. Ann. Math. 3e Ser. V, 1886) betrachtete.

3) S. Roberts, *On the motion of a plane under certain conditions* (Proc. Lond. math. Soc. III, 1871).

4) Zuerst von J. J. Littrow (*Kurze Anleitung zur gesammten Mathematik*, Wien 1838, S. 299) vorgeschlagener Name; M. Simon schreibt „Astroide oder Sternlinie" (*Analytische Geometrie*, Leipzig 1900, S. 307). Für die Bibliographie nehme man die Aufsätze von Hâton de la Goupillière in den Nouv. Ann. Math. 1874, 1880 und 1885.

Differenzieren wir diese nach φ und berücksichtigen (1), so erhalten wir

$$\frac{x \cdot \cos\psi}{\sin^2\psi} = \frac{y \cdot \cos\varphi}{\sin^2\varphi},$$

welche mit (2) kombiniert ergibt

$$x = \frac{l}{\sin^2\alpha}\cos\varphi \cdot \sin^2\psi, \qquad y = \frac{l}{\sin^2\alpha}\cos\psi \cdot \sin^2\varphi. \quad . \quad . \quad (3)$$

Eliminieren wir aus (3) φ oder ψ vermittelst Gleichung (2), so erhalten wir die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Astroide in trigonometrischen Funktionen von φ oder ψ, sagen wir, um einen bestimmten Anhalt zu haben, von φ; setzen wir alsdann $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = \lambda$, so geben die Gleichungen (3) x und y als rationale Funktionen sechster Ordnung von λ. Daraus schließen wir: **Die Astroide ist eine rationale Kurve sechster Ordnung.** Beachten wir nun, daß (2) eine beliebige Tangente der Astroide darstellt, und daß, wenn man in ihr $\psi = \pi - \alpha - \varphi$ setzt und ferner $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi = \lambda$, eine Gleichung vierten Grades in λ entsteht, so schließen wir: **Die Astroide ist von der vierten Klasse.** Die Kurve hat infolgedessen sechs Spitzen und vier Doppelpunkte; sie entbehrt der Wendepunkte, hat aber drei Doppeltangenten.

Eliminieren wir φ und ψ aus den Gleichungen (1) und (3), so erhält man die Gleichung der Astroide in folgender Form:

$$[(x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha - l^2)^3 + 27l^2x^2y^2\sin^2\alpha]\sin^2\alpha$$
$$- l^2\cos\alpha\,\{(x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha - l^2)^2\cos\alpha$$
$$- 2xy\,[9(x^2 + y^2 + 2xy\cos\alpha - a^2)\sin^2\alpha - 8a^2\cos^2\alpha]\} = 0.\text{[1]} \quad . \quad (4)$$

Auch diese beweist, daß die Kurve sechster Ordnung ist, und zeigt außerdem, daß die Koordinatachsen Doppeltangenten sind mit den Punkten $x = \pm l$, $y = 0$; $x = 0$, $y = \pm l$ als Berührungspunkten. Die zyklischen Punkte der Ebene sind Spitzen mit der unendlich fernen Geraden als gemeinsamer Tangente. Außerdem hat die Kurve vier reelle Spitzen, die innerhalb des stumpfen Winkels der beiden Leitgeraden liegen und die Ecken eines Rechtecks bilden. — Im Falle der Winkel α ein beliebiger ist, wollen wir die Kurve als schiefe Astroide bezeichnen.

Der tatsächlich am häufigsten vorkommende Fall ist der, daß die beiden Leitgeraden zueinander senkrecht sind (s. Taf. IX, Fig. 61); die Kurve heißt dann allgemein reguläre Astroide oder die regelmäßige Vierspitzenkurve, während Montucci sie mit dem Namen Cubocycloïde[2]) und Matthiesen mit Paracykel[3]) bezeich-

---

1) H. F. Jentsch, *Theorie der Astroiden, einer neuen Klasse von Kurven* (Diss. Greifswald, 1860).

2) *Comptes rendus* LXX, 1865, S. 441; daselbst ist die Anwendbarkeit der Astroide auf die Lösung der Gleichungen 5. Grades gezeigt.

3) *Über die mechanische Konstruktion einiger Kurven, welche sich zur Auf-*

nete. Die reguläre Astroide hat drei Spitzendoppeltangenten, sie ist daher reziprok zu den Kurven vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten, deren homogene Gleichung $\sum\left(\frac{x_i}{a_i}\right)^{\frac{2}{3}}=0$ ist, und deshalb wurde der Name projektive Astroide[1]) für alle rationalen Kurven sechster Ordnung vorgeschlagen, die mit drei Spitzendoppeltangenten versehen sind.

Für die reguläre Astroide kann man auch leicht eine punktweise Konstruktion erhalten. Ist AB eine beliebige Lage der die Kurve erzeugenden Strecke und C die vierte Ecke des Rechtecks $OACB$, so ist ja die Gleichung von AB

$$x\cdot\sin\varphi+y\cdot\cos\varphi=\tfrac{1}{2}\,l\cdot\sin 2\varphi\,.$$

Nun erhält man den Punkt P, in dem sie ihre eigene Enveloppe berührt, indem man diese Gleichung mit ihrer Abgeleiteten nach φ kombiniert; letztere aber läßt sich schreiben als

$$(x-l\cdot\cos\varphi)\cos\varphi-(y-l\cdot\sin\varphi)\sin\varphi=0\,.$$

Somit sieht man, daß sie das von C auf AB gefällte Lot darstellt. Folglich kann man sagen: **Die Astroide ist der Ort der Fußpunkte der von den Punkten C auf die Geraden AB gefällten Lote**[2]). Da $OC=AB=l$, so liegt C überdies noch auf dem mit l um O beschriebenen Kreise (s. d. Fig. 61).

Da die reguläre Astroide zu einer Kurve vierter Ordnung mit drei Inflexionsknoten dual ist, so besteht für sie der zum Laguerre'schen Satze (Nr. 97) duale, nämlich folgender Satz: **Jede Tangente t einer Astroide schneidet die Kurve in vier weiteren Punkten, deren zugehörige Tangenten durch ein und denselben Punkt P gehen.** Wir fügen noch hinzu, ohne es zu beweisen: **Von diesen vier Tangenten (und den zugehörigen Berührungspunkten) sind nur zwei reell, und der Ort, den der Punkt P beschreibt, wenn die Tangente t sich bewegt, ist der der Astroide umbeschriebene Kreis (mit dem Zentrum O, dem Radius l)**[3]).

---

lösung des Problems von der Duplikation des Würfels verwenden lassen (Archiv XLVIII, 1868). Man hat neuerdings bemerkt (G. Carboni, *Una soluzione del problema della trisezione dell' angolo*; Il Pitagora XV, 1909), daß diese Kurve auch für die Dreiteilung des Winkels verwendbar ist.

1) V. Retali, *Intermédiaire* V, S. 68.

2) Zu demselben Resultate gelangte A. Sucharda mittelst darstellend-geometrischer Methoden in dem Aufsatze *Einige Tangentenkonstruktion zur Astroide* (Arch. Math. Phys. LXVI, 1882).

3) Über diesen Satz, den man einer Aufgabe von A. Boutin (*Intermédiaire* IV, 1897, S. 170) verdankt, siehe man die vielen Mitteilungen im *Intermédiaire* IV, 1897, S. 239; V, 1898, S. 68; VI, 1899, S. 31 und 281.

Machen wir in den Gleichungen (3) und (4) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so werden diese zu

$$x = l\cos^3\varphi, \quad y = l\sin^3\varphi, \quad \ldots \ldots \quad (3')$$

$$(x^2 + y^2 - l^2)^3 + 27l^2x^2y^2 = 0. \quad \ldots \ldots \quad (4')$$

Statt dieser Gleichung pflegt man häufig eine andere, bequemere anzuwenden[1]), obwohl sie irrational ist, die man durch direkte Elimination von φ aus (3′) erhält, nämlich folgende

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}. \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Schreibt man Gleichung (3′) in folgender Weise:

$$x = \frac{l}{4}(3\cos\varphi + \cos 3\varphi), \quad y = \frac{l}{4}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi),$$

so erkennt man, **daß die reguläre Astroide zu den Hypozykloiden gehört** (vgl. Abschn. VI, Kap. 9). Jedoch auch in der Form (3′) eignen sich die Gleichungen recht gut zur Lösung der hauptsächlichsten metrischen Probleme, die die reguläre Astroide betreffen.

Nennt man die Fläche der Kurve S, so hat man

$$\frac{1}{4}S = \int_{x=0}^{x=l} y\cdot dx = \int_{\varphi=\frac{\pi}{2}}^{\varphi=0} l\sin^3\varphi\,(-3l)\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi\cdot d\varphi$$

$$= 3l^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4\varphi\cdot\cos^2\varphi\cdot d\varphi = 3l^2\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^4\varphi\cdot d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^6\varphi\cdot d\varphi\right)$$

$$= \frac{3\pi l^2}{2}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} = \frac{3\pi l^2}{32}.$$

Also ist $S = \frac{3}{8}\pi l^2$, welches Resultat leicht in Worte zu kleiden ist, indem πl^2 gleich der Fläche des der Astroide umbeschriebenen Kreises ist.

Die allgemeine Gleichung der Tangente ist — infolge von Gl. (2) —

$$\frac{x}{\cos\varphi} + \frac{y}{\sin\varphi} = l;$$

demnach stellt die Gleichung

$$-\frac{x}{\sin\varphi} + \frac{y}{\cos\varphi} = l$$

die zu der vorigen senkrechte Tangente dar; durch Elimination von φ erhält man die Gleichung:

---

1) Dieselbe findet sich in einem Briefe von Hermann an Leibniz vom 22. Nov. 1715 (*Leibniz* herausg. v. Gerhardt IV, 1859, S. 408); vgl. auch den Brief desselben v. 6. Jan. 1716 (a. O. S. 410).

$$l^2(x^2-y^2)^2 = 2(x^2+y^2)^3;$$

da diese Gleichung in Polarkoordinaten

$$\varrho = \frac{l}{\sqrt{2}} \cos 2\omega$$

lautet, so ist (vgl. Nr. **136**) **der Ort der Scheitel der einer regulären Astroide umschriebenen rechten Winkel eine vierblättrige Rhodonee**[1]).

Bezeichnen wir mit s den Astroidenbogen, so finden wir leicht

$$ds = 3l \sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi,$$

und daher

$$s = \frac{3l}{2}\sin^2\varphi + Const.$$

Die Gesamtlänge der regulären Astroide ist das Vierfache des erhaltenen Resultates, wenn wir s nehmen zwischen $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = 0$, **also gleich** $6l$, und wenn wir den Bogen von dem Punkte $\varphi = \frac{\pi}{4}$ zählen, haben wir

$$s = \frac{3l}{2}\left(\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\right) = -\frac{3l}{4}\cos 2\varphi\,^{2}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Der Krümmungsradius ϱ wird gegeben durch

$$\varrho = \frac{3l}{2}\sin 2\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Eliminieren wir nun φ aus (6) und (7), so finden wir

$$\varrho^2 + 4s^2 = \left(\frac{3l}{2}\right)^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

welches also die natürliche Gleichung der Kurve ist; hieraus läßt sich von neuem ableiten, daß die Astroide eine Hypozykloide ist.

Bezeichnen wir schließlich mit A die Oberfläche und mit V das Volumen, welches durch vollständige Rotation der Astroide um die eine der Zweispitzentangenten entsteht, so erhalten wir

$$A = 4\pi \int_{x=0}^{x=l} x \cdot ds = -4\pi \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} l\cos^3\varphi \cdot 3l\sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi$$

$$= -12\pi l^2 \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi \cdot \sin\varphi\, d\varphi = \frac{12\pi l^2}{5} = \frac{3}{5}\cdot 4\pi l^2.$$

---

1) Barisien, *Intermédiare*, III, 1896, S. 198.

2) Die Rektifikation der reg. Astroide schien d'Alembert zu unüberwindlichen Widersprüchen zu führen (s. *Mém. de Berlin*, 1747; *Opuscules mathématiques* Bd. IV, Mém. XXIII), jedoch wurden alle diese scheinbaren Widersprüche beseitigt durch Lord Brougham in seiner Note *Sur certaines paradoxes réels ou supposés principalement dans le calcul intégral* (Comptes Rendus XLIV, 1852), wo auch die Haupteigenschaften unserer Kurve dargelegt sind.

$$V = 2\pi \int_{x=0}^{x=l} x^2 \cdot dy = 6\pi l^3 \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \cos^7\varphi \cdot \sin^2\varphi \cdot d\varphi$$

$$= 6\pi l^3 \left(\int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \cos^7\varphi \cdot d\varphi - \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} \cos^9\varphi\, d\varphi \right) = \frac{32\pi l^3}{105} = \frac{8}{35} \cdot \frac{4}{3}\pi l^3.$$

Beachtet man nun, daß $4\pi l^2$ und $\frac{4}{3}\pi l^3$ die Oberfläche und das Volumen der Kugel sind, die den der Astroide umbeschriebenen Kreis als größten Kreis hat, so lassen sich diese Resultate leicht in Worten ausdrücken[1]). — Weitere Eigenschaften der Astroide, die allgemeiner sind, findet der Leser bei den Hypozykloiden, den Laméschen Kurven und in dem Kapitel „Parallelkurven".

107. Eine bemerkenswerte Verallgemeinerung des Begriffes der Astroide, bei welchem wir hier verweilen müssen, verdankt man A. Ameseder[2]).

Gegeben ein zentrischer Kegelschnitt Γ und zwei feste Geraden. Die Enveloppe aller der Geraden, die so beschaffen sind, daß das zwischen den beiden festen Geraden gelegene Stück gleich dem parallellaufenden Durchmesser des Kegelschnittes Γ wird, ist eine Kurve, die man allgemeine Astroide nennen kann, weil, wenn Γ ein Kreis ist, sie sich auf eine gewöhnliche schiefe Astroide reduziert. Um die Gleichung derselben zu finden, nehmen wir die beiden festen Geraden zu Koordinatachsen, und nehmen

---

1) Die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen und ihrer Funktionen führt in einem Falle zu noch allgemeineren Kurven als die Astroide (Amstein, *Un exemple de répresentation conforme,* Bull. Soc. vaudoise Sciences Nat. XV, 1878). Betrachtet man nämlich die Funktion

$$w = \frac{1}{4}\left(3z + \frac{1}{z^3}\right),$$

und setzt man $w = x + iy$, $z = \varrho e^{i\omega}$, so ergibt sich

$$x = \frac{1}{4}\left(3\varrho\cos\omega + \frac{1}{\varrho^3}\cos 3\omega\right), \quad y = \frac{1}{4}\left(3\varrho\sin\omega - \frac{1}{\varrho^3}\sin 3\omega\right).$$

Setzt man nun $\varrho = Const.$, so hat man die parametrische Darstellung der (rationalen) Kurve, um die es sich hier handelt. Im Speziellen für $\varrho = 1$ hat man die Gleichungen

$$x = \frac{1}{4}(3\varrho\cos\omega + \cos 3\omega) = \cos^3\omega, \quad y = \frac{1}{4}(3\sin\omega - \sin 3\omega) = \sin^3\omega,$$

welche der regulären Astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ angehören; für $\varrho = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ würde man hingegen die Rodonee (vgl. Abschn. V, Kap. 8) mit der Polargleichung haben

$$r = \frac{3}{2\sqrt[4]{3}}\cos 2u.$$

2) S. d. Artikel *Astroiden* (Arch. Math. Phys. LXIV, 1879).

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$$

als Gleichung von Γ, und als Gleichung der einhüllenden Geraden in einer beliebigen Lage

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Die Bedingungen des Problems liefern dann die Gleichung

$$\sqrt{u^2 + v^2 - 2uv\cos\alpha} = 2\sqrt{\frac{u^2 + v^2 - 2uv\cos\alpha}{au^2 - 2huv + bv^2}}$$

oder auch

$$au^2 - 2huv + bv^2 = 4. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Um nun die Gleichung der allgemeinen Astroide zu erhalten, muß man die Enveloppe der Geraden (9) unter der Bedingung (10) suchen; durch Anwendung bekannter Regeln findet man, daß es genügt u und v aus (9), (10) und der folgenden Gleichung fortzuschaffen

$$\begin{vmatrix} x - u & bv - hu \\ y - v & au - hv \end{vmatrix} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Die Elimination vollzieht sich in sehr einfacher Weise, wenn der Kegelschnitt Γ die beiden Koordinatachsen als konjugierte Durchmesser hat. In diesem Falle, $h = 0$, wird die Gleichung (11) zu

$$au(x - u) = bv(y - v); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11')$$

setzt man in diese den aus (9) sich ergebenden Wert $v = \frac{uy}{u - x}$ ein, so ergibt sich

$$u = x + \sqrt[3]{\frac{b}{a}xy^2}, \qquad \text{und ähnlich} \qquad v = y + \sqrt[3]{\frac{a}{b}x^2y}.$$

Setzt man diese Werte in (10) ein, nachdem man daselbst $h = 0$ gemacht, so findet man nach einigen Reduktionen

$$\sqrt[3]{ax^2} + \sqrt[3]{by^2} = \sqrt[3]{4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

als Gleichung der allgemeinen Astroide. Wollen wir die beiden Fälle unterscheiden, daß die gegebene Kurve Γ eine Ellipse oder Hyperbel sei, so kann man (12) folgendermaßen schreiben

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} \pm \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12')$$

Die so dargestellten Kurven wurden von J. de la Gournerie, da sie reziprok zu den harmonischen Trinodalen (Nr. **97**) sind, trilatérales harmoniques genannt[1]); der Kurve (12') für den Fall $a = b$ hat Breton (de Champ) den Namen Developpée equilatère[2]) gegeben.

---

1) *Recherches sur les surfaces reglées tétraedrales symétriques* (Paris, 1867) S. 116.

2) *Démonstration d'un theorème sur les développées de l'ellipse et de l'hyperbole* (Nouv. Ann. Math. II, 1843, S. 227).

Die reguläre Astroide liefert den Ursprung für eine neue besondere Kurve, indem man ihre Fußpunktkurve in bezug auf einen Punkt der Halbierungslinie des von den beiden Zweispitzentangenten gebildeten Winkels betrachtet. Ohne von der Astroide auszugehen, kann man diese Kurve offenbar auch definieren: „Eine Strecke PQ von der Länge $2a$ bewegt sich mit ihren Endpunkten auf zwei rechtwinkligen Geraden Ox und Oy; von einem festen Punkte F (Taf. IX, Fig. 62) der Halbierungslinie des Winkels xOy werden die Lote FM auf die verschiedenen Lagen der Geraden PQ gefällt; der Ort der Punkte M ist dann eine Kurve, die wegen der Gestalt, die sie in gewissen Fällen hat, Skarabäe oder Käferkurve heißt.“[1]) Um sie bequem darzustellen, nehmen wir F als Pol, OF als Polarachse, und bezeichnen mit c die Länge von OF. Wir ziehen dann OH und FM senkrecht zu PQ und verbinden O mit dem Mittelpunkte R von PQ. Bezeichnen wir nun wie gewöhnlich mit ϱ und ω die Polarkoordinaten von M, so sehen wir leicht, daß Winkel $ROH = 2\omega$; und da $OR = \frac{PQ}{2} = a$, so ist $OH = a \cdot \cos 2\omega$. Anderseits ist

$$OH = OF \cdot \cos\omega + FM = c \cdot \cos\omega + \varrho$$

und also

$$\varrho = a \cdot \cos 2\omega - c \cdot \cos\omega \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

die Polargleichung der Käferkurve; diese ist demnach rational. Gehen wir zu kartesischen Koordinaten über, so erhalten wir

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + cx)^2 = a^2(x^2 - y^2)^2. \quad \ldots \quad (14)$$

Sie ist demnach von der sechsten Ordnung. F ist ein vierfacher Punkt der Kurve; Doppelpunkte derselben sind die Projektionen desselben auf Ox und Oy; die unendlich fernen Kreispunkte der Ebene sind Spitzen der Kurve, wobei die unendlich ferne Gerade Tangente in beiden ist.

Im Spezialfalle $c = 0$ wird (13) zu $\varrho = a \cdot \cos 2\omega$ und stellt dann eine spezielle Rhodonee dar (vgl. Abschn. V, Kap. 8) und zwar die vierblätterige Rosenkurve, auch Corolla genannt[2]). Setzt man nun

$$\varrho_1 = a \cdot \cos 2\omega, \qquad \varrho_2 = c \cdot \cos\omega,$$

so stellt erstere Gleichung also eine Corolla, letztere einen Kreis dar, der durch den Anfangspunkt geht und den Durchmesser c hat, und da Gleichung (13) dann gibt $\varrho = \varrho_1 + \varrho_2$, so ist es klar, daß die

1) E. Catalan, *Manuel des candidats à l'Ecole polytéchnique* I (Paris, 1857) S. 338.

2) Cf. W. J. C. Miller, *Solution of the Question 3648* (Educ. Times XIX, 1874, S. 59—62); M. Simon (*Analytische Geometrie,* Leipzig, 1900, S. 316) nennt sie vierblätteriges Kleeblatt. — S. auch die Fig. 80 auf Taf. XI.

Käferkurve als konchoidale Kurve (vgl. Nr. **69**) einer Corolla und eines Kreises angesehen werden kann.

Zum Schlusse bemerken wir, daß die Käferkurve zur Fußpunktkurve des Anfangspunktes, in bezug auf die allgemeine Astroide mit der Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

analog ist. Beachten wir daß, wenn X, Y die laufenden Koordinaten sind, die allgemeine Gleichung der Tangente an diese Kurve lautet

$$\frac{X}{a\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}}} + \frac{Y}{b\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{3}}} = 1,$$

so erkennen wir, daß die Gleichung jener Fußpunktkurve durch Elimination von x und y aus den beiden vorhergehenden und aus folgender Gleichung erhalten wird

$$a\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{3}} X - b\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{3}} Y = 0;$$

sie ist daher

$$(X^2 + Y^2)^2 (a^2 X^2 + b^2 Y^2) = a^2 b^2 X^2 Y^2. \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Die so dargestellte Kurve — deren Diskussion wir dem Leser überlassen — wurde von B. Tortolini[1]) betrachtet, der auch ihre Rektifikation mittels Ellipsenbögen ausführte.

Viertes Kapitel.

Kurven sechster Ordnung (Fortsetzung).

f) Die Koppelkurve, insbesondere die Wattsche Kurve[2]).

108. Der Leser möge sich der zu Anfang von Nr. **106** gegebenen Definition der olistoidalen Örter und Hüllkurven erinnern; dem einfachsten dort betrachteten Falle, daß die Leitkurven geradlinig seien, folgt naturgemäß der, daß die eine eine Gerade, die andere ein Kreis ist; auch dieser Fall wurde schon von uns betrachtet in Nr. **84**, indem dann eine symmetrische Polyzomalkurve vierter Ordnung entsteht. Es bietet sich nun, dem Grade der Schwierigkeit folgend, der Fall dar, daß beide Leitlinien Kreise sind. Dieser Fall

---

1) *Applicazioni dei trascendenti ellittici alla quadratura di alcune curve sferiche* (Mem. Soc. Ital. Scienze XXIV, 1850).

2) Viele bibliographische Notizen über diese Kurve finden sich im *Intermédiaire* IV, 1897, S. 184.

hat eine große praktische Bedeutung, indem er bei der Untersuchung jener bekannten, 1784 von Jacob Watt erdachten Vorrichtung auftritt, die man nach ihm das Wattsche Parallelogramm genannt hat. Bei dieser Untersuchung ist insbesondere die Lösung des folgenden Ortproblems erforderlich: „Ein Vierseit $ABCD$, dessen Grundlinie AD festliegt, ist in allen Ecken gelenkig gegliedert; es gilt, den Ort aller Lagen, die ein bestimmter Punkt M der gegenüberliegenden Seite BC annimmt, zu finden." Wir werden diesen Ort die Wattsche Kurve[1]) nennen; andere, um ihre Gestalt anzudeuten, nennen sie Lemniskoide (lemniscoïde) oder Inflexionskurve (courbe à longue infléxion[2]), welcher Name nach Chasles[3]) von Hachette in seiner *Histoire des machines à vapeur* vorgeschlagen wurde).

Um die Wattsche Kurve zu zeichnen, beschreibe man die Kreise um die beiden festen Punkte A und D als Zentren mit den Radien von der Länge der Seiten AB und CD (vgl. Taf. IX, Fig. 63). Man nehme alsdann den Punkt B auf dem ersten Kreise beliebig an und beschreibe mit dem Radius an Länge gleich der Seite BC des Gelenkvierecks einen Kreis; dieser schneidet den zweiten (Direktrix-) Kreis in zwei Punkten C' und C''; auf jeder der beiden Geraden BC' und BC'' gibt es einen Punkt M der Wattschen Kurve. Durch Variation von B erhält man unendlich viele derselben. Es ist klar, daß nicht immer alle Punkte des ersten Kreises zu reellen Punkten der Kurve führen; um das brauchbare Stück desselben zu finden, beschreibe man um den Mittelpunkt des zweiten Kreises D mit den Radien $BC \pm CD$ zwei Kreise; diese begrenzen auf dem ersten Kreise zwei Bogen, welche den besagten Bezirk ausmachen. Dieselbe Konstruktion kann man eventuell in bezug auf den zweiten Kreis wiederholen.

Nichts ist leichter, als die Normale, und demnach auch die Tangente, in einem beliebigen Punkte M der Wattschen Kurve anzugeben. Ist nämlich $ABCD$ die zugehörige Lage des Gelenkvierecks, so ist der Punkt I, in welchem sich die Geraden AB und CD schneiden, das zugehörige Zentrum der augenblicklichen Rotation; IM ist daher die Normale zu dem Orte des erzeugenden Punktes M.

Um die Gleichung der Wattschen Kurve zu finden, nehmen wir die Gerade AD als x-Achse, O als Anfangspunkt, bezeichnen mit a_1 und a_2 die Abszissen von A und D, mit R_1, R_2 die Radien der bei-

1) Ihre Gleichung scheint zum erstenmal von Prony aufgestellt zu sein; s. Koenigs *Leçons de cinématique* (Paris, 1897) S. 262, woselbst als Quelle eine Arbeit von Hâton de la Goupillière angegeben wird.

2) A. J. H. Vincent, *Essai d'une théorie du parallelogramme de Watt* (Mem. de la Soc. de Lille 1836—37) und *Note sur la théorie du parallelogramme de Watt* (Nouv. Ann. Math. VII, 1848). Dort findet sich der Name *Selenoïde* für einen besonderen Fall der fraglichen Kurven.

3) *Bull. Soc. math. France* VI, 1872—78, S. 214.

den Leitkreise, ferner mit l_1 und l_2 die Längen BM und MC, und schließlich mit ω_1, ω_2, ω die Winkel, welche die Geraden AB, CD, BC mit der positiven Richtung der x-Achse bilden. Außerdem setzen wir der Kürze halber

$$\Gamma_1 = (x - a_1)^2 + y^2, \quad \Gamma_2 = (x - a_2)^2 + y^2,$$

und daher

$$(x - a_1)(x - a_2) + y^2 = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 - (a_1 - a_2)^2}{2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Sind nun x und y die Koordinaten von M, so erhält man leicht die vier Beziehungen

$$R_1 \cos \omega_1 + l_1 \cos \omega = x - a_1; \quad R_1 \sin \omega_1 + l_1 \sin \omega = y;$$
$$R_2 \cos \omega_2 - l_2 \cos \omega = x - a_2; \quad R_2 \sin \omega_2 - l_2 \sin \omega = y.$$

Durch Elimination von ω_1 aus den beiden ersten und ω_2 aus den beiden letzten erhält man

$$2(x - a_1) l_1 \cos \omega + 2 y l_1 \sin \omega = \Gamma_1 - R_1^2 + l_1^2,$$
$$-2(x - a_2) l_2 \cos \omega - 2 y l_2 \sin \omega = \Gamma_2 - R_2^2 + l_2^2.$$

Durch Elimination von ω aus diesen beiden erhält man die Kurvengleichung. Wenn man nun der Kürze wegen setzt

$$P = 2(x - a_2) l_1 \qquad Q = 2 y l_1 \qquad R = \Gamma_1 - R_1^2 + l_1^2$$
$$P' = -2(x - a_2) l_2 \qquad Q' = -2 y l_2 \qquad R' = \Gamma_2 - R_2^2 + l_2^2,$$

so kann das Resultat der Elimination in einer der beiden folgenden Formen geschrieben werden

$$(PQ' - P'Q)^2 = (PR' - P'R)^2 + (QR' - Q'R)^2. \quad . \quad . \quad (2)$$
$$(P^2 + Q^2 - R^2) \cdot (P'^2 + Q'^2 - R'^2) = (PP' + QQ' - RR')^2. \quad (3)$$

Aus (2) geht hervor, daß die folgender Gleichung genügenden Punkte Doppelpunkte der Wattschen Kurve sind:

$$\left\| \begin{matrix} P & Q & R \\ P' & Q' & R' \end{matrix} \right\| = 0,$$

d. h. gemäß den aufgestellten Bezeichnungen

$$y = 0, \qquad \frac{l_1 (x - a_1)}{l_2 (x - a_2)} + \frac{(x - a_1)^2 - R_1^2 + l_1^2}{(x - a_2)^2 - R_2^2 + l_2^2} = 0. \quad . \quad . \quad (4)$$

Demnach hat die Wattsche Kurve drei Doppelpunkte auf der festen Seite des Gelenkvierseits. Setzen wir in (2) für die $P, \ldots, R'$ die Werte ein, so findet man

$$4 l_1^2 l_2^2 (a_1 - a_2)^2 y^2 = \{x[(l_1 \Gamma_2 + l_2 \Gamma_1) - l_1 R_2^2 - l_2 R_1^2 - l_1 l_2 (l_1 + l_2)]$$
$$- [a_2 l_2 \Gamma_2 + a_1 l_1 \Gamma_2 - 2 l_1 l_2 (a_1 l_2 + a_2 l_1) - a_1 l_1 R_2^2 - a_2 l_2 R_1^2]\}^2$$
$$+ y^2 \{(l_1 \Gamma_2 + l_2 \Gamma_1) + l_1^3 + l_2^3 - l_1 R_1^2 - l_2 R_2^2\}^2. \, (5)$$

Da diese Gleichung vom 6. Grade, so folgt: **Die Wattsche Kurve ist von der sechsten Ordnung.** Jeder Kreis schneidet die Kurve nur in sechs Punkten in endlicher Entfernung; folglich **hat die Wattsche Kurve die beiden zyklischen Punkte der Ebene als dreifache Punkte, ist also eine trizirkulare Kurve sechster Ordnung.**

Betrachten wir insbesondere einen beliebigen der durch die Gleichung

$$l_1 \Gamma_2 + l_2 \Gamma_1 = Const.$$

dargestellten Kreise, so schneidet jeder die Kurve in nur vier, im Endlichen gelegenen Punkten, ist daher doppeltberührend an die Kurve in den zyklischen Punkten der Ebene; wenn man im besonderen die Konstante gleich $-\frac{(a_1 l_2 + a_2 l_1)^2}{l_1 + l_2}$ nimmt, so erhält man den Kreis mit dem Radius Null

$$\left(x - \frac{a_1 l_2 + a_2 l_1}{l_1 + l_2}\right)^2 + y^2 = 0,$$

sein Mittelpunkt F ist daher ein außerordentlicher Brennpunkt der Kurve; beachten wir, daß

$$OA = a_2, \qquad OD = a_2, \qquad OF = \frac{a_1 l_2 + a_2 l_1}{l_1 + l_1},$$

so haben wir

$$\frac{AF}{FD} = \frac{BM}{MC}.$$

F ist daher derjenige Punkt der Strecke AD, welcher sie im Verhältnisse von $BM : MC$ teilt. Setzen wir hingegen in (3) für $P, \ldots, R'$ ihre Werte ein, so erhält man für die Wattsche Kurve folgende elegante Gleichung.

$$\begin{aligned}(\Gamma_1 - \overline{R_1 + l_1}^2)(\Gamma_1 - \overline{R_2 - l_1}^2)(\Gamma_2 - \overline{R_2 + l_2}^2)(\Gamma_2 - \overline{R_2 - l_2}^2) \\ = \{(\Gamma_1 + l_1^2 - R_1^2 + 2 l_1 l_2 (\Gamma_2^2 + l_2 - R_2^2 + 2 l_1 l_2) \\ - 4 l_1 l_2 (\overline{l_1 + l_2}^2) + \overline{a_1 - a_2}^2 - R_1^2 - R_2^2)\}^2. \quad \ldots \quad (6)\end{aligned}$$

Diese ist scheinbar vom 8ten Grade, in Wirklichkeit aber vom 6ten, da in beiden Gliedern der Ausdruck $\Gamma_1^2 \Gamma_2^2$ auftritt. Sie zeigt, daß alle Kreise mit der Gleichung $\Gamma_1 = Const.$ die Wattsche Kurve doppelt berühren; insbesondere stellt die Gleichung $\Gamma_1 = 0$ einen doppeltberührenden Nullkreis dar; sein Mittelpunkt ist also ein außerordentlicher Brennpunkt. Dasselbe gilt von $\Gamma_2 = 0$; daraus ergibt sich: **Auch die festen Punkte A und D sind außerordentliche Brennpunkte der Wattschen Kurve.**

Da die Wattsche Kurve von der sechsten Ordnung ist und zwei dreifache und drei Doppelpunkte hat, so ist sie vom Geschlechte eins; die Koordinaten ihrer Punkte lassen sich daher vermittels elliptischer Funktionen eines Parameters ausdrücken. Eine sehr geniale Weise zu einer derartigen Darstellung zu gelangen ist die folgende von

Darboux erdachte und völlig entwickelte[1]): Man bezeichne mit a, b, c die Länge der Seiten AB, BC, CD des Vierseits; mit α, β, γ die Winkel, die sie mit der festen Geraden AD bilden und mit d die Länge dieser letzteren. Projiziert man nun den Linienzug $ABCD$ auf die Gerade AD und dann auf die Senkrechte dazu, so bekommt man folgende beide Gleichungen:

$$d + a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma = 0; \quad a \sin \alpha + b \sin \beta + c \sin \gamma = 0,$$

oder auch

$$d + ae^{\pm i\alpha} + be^{\pm i\beta} + ce^{\pm i\gamma} = 0.$$

Man setze nun

$$x = e^{i\alpha}, \quad y = e^{i\beta}, \quad z = e^{i\gamma},$$

dann erhält man die beiden Gleichungen

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + d = 0.$$

Deuten wir nun die x, y, z als kartesische Koordinaten eines Punktes im Raume, so stellen diese Gleichungen die Kurve dritter Ordnung dar, in welcher die Ebene $ax + by + cz + d = 0$ die Fläche dritter Ordnung $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + d = 0$ schneidet. Jedem Punkte dieser Kurve entspricht eine Lage des Gelenksystems, d. h. ein Punkt der Wattschen Kurve. Wenn man also die Koordinaten jener durch elliptische Funktionen ausdrückt (S. 16—17), erhält man dasselbe für die hier betrachtete Kurve.

In dem bemerkenswerten Spezialfalle, in welchem $AB = CD$ und M der Mittelpunkt der Strecke BC, kann man die Gleichung der Wattschen Kurve schneller durch folgendes von E. Catalan[2]) angegebene Verfahren erhalten. Die Mitte von AD nennen wir O und setzen

$$AD = 2a, \quad AB = CD = b, \quad BC = 2c;$$

für die Existenz eines Viereckes mit diesen Seiten ist notwendig und hinreichend, daß

$$|a - b| < c < a + b,$$

und wir wollen voraussetzen, daß die Konstanten a, b, c dieser Bedingung genügen. Ziehen wir dann (Taf. IX, Fig. 63) die Gerade MO, ferner durch B und C zu ihr die Parallelen und durch O die Parallele EF zu BC, so ist das Vierseit $BCFE$ ein Parallelogramm, und wir haben $BE = CF$, $OE = OF = MB = MC$. Die Dreiecke OAE und ODF sind demnach kongruent, daher ergeben sich AE

1) *De l'emploi des fonctions elliptiques dans la theorie du quadrilatère plan* (Comptes Rendus, LXXXVIII, 1879 oder Bullet. Sciences math. II. Ser. III, 1879). Vgl. Picciati, *La funzione di Weierstrass nella cinematica del quadrilatero articolato* (Atti Ist. Veneto 40, 1900—1901).

2) *Sur la courbe de Watt* (Mathésis V, 1885).

und DF als einander gleich und die Geraden, denen diese beiden Seiten angehören, als zu einander parallel. Da nun in den Dreiecken ABE und CDF die entsprechenden Seiten einander gleich sind, so sind diese Dreiecke kongruent; im speziellen ist $\sphericalangle\ AEB = CFD$; aber diese Winkel sind gleichzeitig supplementär, daher sind sie rechte Winkel; wenn man dann DF verlängert, bis es OM in G schneidet, so wird auch der Winkel OGD ein rechter sein. — Nachdem dies vorausgeschickt, bezeichnen wir mit ϱ, ω die Polarkoordinaten von M in bezug auf O als Pol und AD als Achse. Dann ist

$$\varrho^2 = \overline{OM}^2 = \overline{CF}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{DF}^2 = b^2 - \overline{FD}^2;$$

andererseits ist

$$FD = GD - GF = a \cdot \sin\omega - GF;$$

$$\overline{FG}^2 = \overline{OF}^2 - \overline{OG}^2 = \overline{MC}^2 - \overline{OG}^2 = c^2 - a^2 \cdot \cos^2\omega .$$

Demnach ist

$$\varrho^2 = b^2 - \left\{a \sin\omega - \sqrt{c^2 - a^2\cos^2\omega}\right\}^2,$$

oder auch

$$(\varrho^2 - a^2 - b^2 + c^2)^2 + 4a^2(\varrho^2 - b^2)\sin^2\omega = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

die Polar-Gleichung dieser Wattschen Kurve. Die entsprechende kartesische Gleichung lautet:

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - a^2 - b^2 + c^2)^2 + 4a^2y^2(x^2 + y^2 - b^2) = 0 . \quad (8)$$

Diese Kurve ist demnach symmetrisch sowohl in bezug auf die Gerade AB als auch in bezug auf deren Mittelsenkrechte. Die Gleichung (8) läßt auch deutlich erkennen, daß die zyklischen Punkte dreifache Punkte sind; die zugehörigen Tangenten sind $x \pm iy = 0$, $x \pm iy = \pm a$; daher sind O, A, D außerordentliche Brennpunkte der Kurve. Sie hat außerdem als Doppelpunkte den Anfangspunkt und die Punkte $\left(\pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}, 0\right)$; sind diese reell, so sind sie isolierte Punkte, während der Anfangspunkt ein Knoten oder ein isolierter Punkt ist, jenachdem $a + c \gtrless b$. Im ersten Falle besteht die Wattsche Kurve aus zwei Blättern, die durch diesen Punkt, der ein Inflexionsknoten ist, zu einem Zuge verbunden sind; alsdann ist der Name Lemniskoide (S. 274) berechtigt. Im andern Falle haben wir zwei auseinander liegende Züge von birnförmiger Gestalt, die um so mehr abgeplattet erscheint, je kleiner c ist, dagegen zugespitzt, je mehr c sich dem Werte $a - b$ nähert (s. Fig. 64).

Bemerkenswert ist der Fall $c = a$; die Gleichung (2) zerfällt dann in die beiden folgenden

$$x^2 + y^2 = b^2, \qquad (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - b^2) + 4a^2y^2 = 0 ,$$

die erste von diesen stellt den Kreis mit dem Mittelpunkte O und

dem Radius b dar, während die zweite eine Boothsche Lemniskate darstellt (vgl. Nr. 65); wenn man überdies noch $b = a\sqrt{2}$ annimmt, so reduziert sich letzere auf eine Bernoullische Lemniskate (Nr. 93).

109. Über die Theorie der Wattschen Kurve wurde helles Licht verbreitet, als man eine Verallgemeinerung derselben betrachtete, die entsteht — im übrigen unter denselben Bedingungen, wie sie zu Anfang dieses Kapitels angegeben sind — wenn man den Ort eines Punktes M untersucht, der unveränderlich mit der Seite BC des Gelenkvierecks verbunden ist, aber nicht auf dieser Seite liegt. Nun hat S. Roberts bewiesen[1]), daß dieser Ort — der von den Engländern the three-bar curve, von den Deutschen die Koppelkurve genannt wurde — ebenfalls eine trizirkulare Kurve sechster Ordnung ist, die zu außerordentlichen Brennpunkten die Punkte A und B hat, sowie einen dritten Punkt F, derartig, daß die beiden Dreiecke ADF und BCM ähnlich sind; in bezug auf diese drei Punkte verhält sich die Kurve in ganz gleicher Weise; daher ist sie im ganzen dreier Erzeugungsweisen vermittelst eines Gelenkvierecks fähig. Sie hat drei Doppelpunkte auf dem dem Dreiecke ADF umbeschriebenen Kreise, ist daher, wie die Wattsche Kurve, eine trizirkulare sechster Ordnung vom Geschlechte eins, hängt jedoch von einer Konstanten mehr ab. Je nach den Werten der Konstanten sowie nach der Lage des erzeugenden Punktes M nimmt sie verschiedene Gestalten an[2]).

Von ganz besonderer Wichtigkeit in der Kinematik, nämlich für das Problem der sog. Geradführung ist die Koppelkurve mit sechspunktig berührender Tangente. Sie ist von R. Müller eingehend behandelt worden[3]); derselbe Geometer hat sich auch mit anderen speziellen Koppelkurven beschäftigt[4]) und die Bemerkung gemacht, daß, wenn man den Punkt M in der Ebene des Gelenkvierecks auf eine gewisse Kurve, die sog. „Polkurve“ legt, einer der Doppelpunkte zur Spitze wird; legt man ihn dagegen auf eine andere Kurve, die sog. „Übergangskurve“, so bekommt die Koppelkurve einen Selbstberührungspunkt; legt man ihn aber auf eine dritte Kurve, die sog. „Flachpunktkurve“, so bekommt sie einen Undulationspunkt. Die erste dieser Kurven wurde zuerst von S. Roberts[5]) betrachtet; sie ist im allgemeinen achter Ordnung, hat zu Spitzen die Kreispunkte I und J

---

1) S. die wichtige Abhandlung *On three-bar motion in plane space* (Proc. Lond. math. Soc. VII, 1876) und als Kommentar die beiden von Cayley, *On three-bar motion* und *On the bicursal sextic* (Daselbst, oder *Coll. math. Papers* IX, S. 551 u. 581).

2) S. die Figuren 158 und 159 in Carr, *Synopsis of elementary results in pure and applied mathematics* Bd. I, Teil II (London, 1886).

3) Zeitschr. Math. Phys. XLVIII, 1902, S. 208—19.

4) *Über einige Kurven, des mit der Theorie die ebenen Gelenkvierecks im Zusammenhang stehen* (Zeitschr. Math. Phys. XLVIII, 1902).

5) Proc. Lond. math. Soc. III, S. 312.

und zu dreifachen Punkten die beiden festen Ecken des Gelenkvierecks; da sie übrigens noch sechs andere Doppelpunkte hat, so ist sie wie auch die Koppelkurve vom Geschlechte eins. Die „Übergangskurve“ ist ebenfalls von der achten Ordnung und man erhält sie aus der „Polkurve“ durch eine konforme Transformation, die durch die Beziehung $z' = z^2$ definiert ist. Die „Flachpunktkurve“ aber ist von der zehnten Ordnung, hat die festen Ecken des Gelenkvierecks zu Doppelpunkten und die Punkte I und J zu vierfachen.

Es möge hier noch bemerkt werden, daß dieselben kinematischen Betrachtungen, denen die Koppelkurve ihre Entstehung verdankt, in geeigneter Weise modifiziert zu weiteren Kurven von noch höherer Ordnung führen. Betrachten wir nämlich ein Gelenkviereck $OO'R'R$ mit den festen Ecken OO', setzen auf die Seiten OR und $O'R'$ die Dreiecke ORS und $O'R'S'$, und lassen von den Ecken gelenkig die Stäbe SK und $S'K$ ausgehen, so beschreibt der Punkt K bei der Bewegung eine Kurve vierzehnter Ordnung, die sog. Kniekurve[1]) die I und J zu siebenfachen Punkten hat.

In dem Falle, daß die Dreiecke ORS und $O'RS'$ direkt ähnlich sind, scheidet sich von der Kurve die unendlich ferne Gerade zweimal ab und es bleibt eine sechszirkulare Kurve zwölfter Ordnung übrig. In anderen Spezialfällen scheidet sich ebenfalls die unendlich ferne Gerade eine gerade Anzahl von Malen ab, so daß man als Restkurven solche von der zehnten, achten oder sechsten Ordnung erhält, die wiederum für die Kinematik von besonderer Wichtigkeit sind.

Die Wattsche Kurve und ihre Verallgemeinerung, die Koppelkurve, haben für einige Zweige der angewandten Mathematik eine große Wichtigkeit; daher finden sich gründliche Untersuchungen derselben in moderneren Bearbeitungen der Kinematik[2]); daselbst wird der Leser genauere Details über diesen Gegenstand finden[3]).

---

1) *Über eine gewisse Klasse von übergeschlossenen Gelenkmechanismen* (Zeitschr. Math. Phys., XL 1895).

2) Außer Koenigs a. a. O. 246—62 s. auch L. Burmester, *Lehrbuch der Kinematik* I (Leipzig, 1888) S. 294 und den größten Teil von J. Ebner, *Leitfaden der technisch wichtigen Kurven* (Leipzig, 1906). Eine Klassifikation der Gelenkvierecke verdankt man J. J. Vaes (*Indeeling en theorie des Stangenvierecken*; XXXVIII Jaarverslag Nederlandsche Vereeniging, Rotterdam, 1899).

3) Eine andere Kurve sechster Ordnung von ähnlicher Definition ist der Ort der Ecke C eines Vierseits $BACD$, von welchem die Ecke A und die Halbierungslinie des Winkels BAD fest ist. S. Journ. de math. spéc. 4. Ser. V. 1896, S. 61.

Fünftes Kapitel.

Kurven sechster Ordnung (Fortsetzung).

g) Die Nephroide, die Atriphtaloide, die Kranioide usw.

110. Gegeben ein Kreis mit dem Zentrum O und dem Radius a sowie ein Punkt A seiner Peripherie (Taf. IX, Fig. 65); man ziehe durch A eine beliebige Sehne AB und verbinde deren Endpunkte mit dem Mittelpunkte O, dann trage man auf dieser Verbindungslinie (nach beiden Seiten) das Stück $BP = BA$ ab; der Ort des Punktes P ist die Nephroide oder Nierenkurve von Freeths[1]).

Nimmt man OA als Polarachse und O als Pol, so ist ersichtlich $AB = 2a \sin \frac{\omega}{2}$; daher ist die Polargleichung der fraglichen Kurve

$$\varrho = a + 2a \sin \frac{\omega}{2} \cdot \quad \dots \dots \quad (1)$$

Gehen wir zu kartesischen Koordinaten über, so wird diese

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - a^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2 - ax)^2 = 0 \quad \dots \quad (2)$$

Die Nephroide ist demnach eine Kurve sechster Ordnung mit A und den Kreispunkten der Ebene als dreifachen, und O als Doppelpunkt; daraus folgt, daß sie rational ist; die Verbindungslinien von O mit den beiden Kreispunkten sind Doppeltangenten. — Die vom Radiusvektor eines Punktes der Kurve während einer vollständigen Drehung beschriebene Fläche wird gemessen durch

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \varrho^2 \cdot d\omega = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(3a^2 - 2a^2 \cos\omega + 4a^2 \sin\frac{\omega}{2}\right) d\omega = 3 \cdot \pi a^2 + 2(2a)^2;$$

ist also gleich dem Dreifachen des gegebenen Kreises vermehrt um das Doppelte des Quadrates über dem Durchmesser dieses Kreises.

Nimmt man jetzt OA als Polarachse und A als Pol, so wird die Polargleichung der Nephroide

$$\varrho = 4a \cdot \sin \frac{2\omega}{3} \sin \frac{\omega}{3}$$

oder

$$\varrho = 2a \left(\cos \frac{\omega}{3} - \cos \omega\right);$$

infolgedessen wird ihre Inverse in bezug auf einen Kreis vom Mittelpunkt A und Radius k durch folgende Gleichung dargestellt:

---

1) S. die Abhandlung *Freeths Nephroid* in den Proc. Lond. math. Soc. V, 1879. — Früher war der Name „Nephroid" von R. Proctor zur Bezeichnung der zweispitzigen Epizykloide angewendet worden (*A treatise on the cycloid and all formes of cycloidal curves,* London 1878, S. 79).

$$\frac{k^2}{\varrho} = 2a\left(\cos\frac{\omega}{3} - \cos\omega\right);$$

geht man zu kartesischen Koordinaten über und setzt man $h = \frac{k^2}{2a}$, so bekommt man die Gleichung

$$(4x + 3h)(x^2 + y^2) - 4(x + h)^3 = 0,$$

die eine rationale, in bezug auf Ox symmetrische Kurve dritter Ordnung darstellt[1]).

Das Interesse, welches die Nephroide bietet, scheint sich ausschließlich auf ihre Anwendung für die Konstruktion der regelmäßigen Vielecke mit der Seitenzahl $7 \cdot (2^{2^\mu} + 1)$ zu konzentrieren, vorausgesetzt, daß $2^{2^\mu} + 1$ eine Primzahl ist. Um ihre derartige Anwendung klar zu legen, bezeichnen wir den Mittelpunkt des Radius OA mit F, errichten in diesem Punkte die Senkrechte, und nennen P' den Schnitt derselben mit dem äußeren Bogen der Nephroide; B' sei der Schnitt von OP' mit dem gegebenen Kreise. Wird nun die Sehne AB' gezogen, so entstehen die beiden gleichschenkligen Dreiecke OAB' und $AB'P'$. Mit φ bezeichnen wir den Winkel $B'OA$ und die gemeinsame Größe der Winkel OAB' und $OB'A$ mit ψ. Dann ist $\varphi + 2\psi = \pi$. Da nun auch Dreieck $P'OA$ gleichschenklig ist, so hat man

$$\sphericalangle\, P'AB' = B'P'A = \varphi - \psi.$$

Beachten wir schließlich, daß $OB'A$ Außenwinkel des Dreiecks $B'AP'$, so finden wir $\psi = 2(\varphi - \psi)$. Aus den beiden zwischen φ und ψ bestehenden Beziehungen ergibt sich

$$\varphi = \frac{3}{7}\pi, \quad \psi = \frac{2}{7}\pi, \quad \varphi - \psi = \frac{\pi}{7}.$$

Dies beweist, daß wenn die Nephroide gezeichnet vorliegt, man mit Zirkel und Lineal den ganzen Umfang des Kreises in sieben gleiche Teile teilen kann; ähnlich läßt sich auch die Teilung derselben in 21 und 35 Teile ausführen, wenn man berücksichtigt, daß

$$\frac{1}{21} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right), \quad \frac{1}{35} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right).$$

---

1) Die Haupteigenschaften der Nephroide besitzt auch eine andere Kurve, die man als Verallgemeinerung der Nephroide ansehen und folgendermaßen erzeugen kann. Gegeben ein Kreis K_0 mit dem Zentrum O, Radius a und ein fester Punkt A auf seiner Peripherie; ferner sei D ein fester Punkt in der Ebene des Kreises; man beschreibe um den variabeln Punkt P_0 auf K_0 mit dem Radius P_0A einen veränderlichen Kreis, der die Gerade DP_0 in den Punkten P', P'' schneidet; der Ort der Punkte P', P'' ist eine Kurve, die mit der Nephroide identisch ist in dem Falle, daß D mit O zusammenfällt; sie geht aber in ein schiefes Dreiblatt (s. S. 168) über, wenn D unendlich fern liegt. (Nach einer brieflichen Mitteilung von Dr. E. Köstlin).

Noch allgemeiner: Bekanntlich kann man mit Zirkel und Lineal einen Kreis in $2^{2^\mu}+1$ gleiche Teile teilen, wenn diese Zahl eine Primzahl ist. Wenn man nun beachtet, daß es immer zwei ganze Zahlen α, β gibt, derart daß

$$\frac{1}{7(2^{2^\mu}+1)} = \frac{\alpha}{7} - \frac{\beta}{2^{2^\mu}+1},$$

so ergibt sich daraus — wie oben angegeben — daß die Nephroide zur Teilung des Kreises in $7(2^{2^\mu}+1)$ gleiche Teile führt.

111. Auf eine andere Gruppe von Kurven sechster Ordnung traf Dr. Haughton im Verlaufe seiner Untersuchungen über die Gestalt der Oberfläche des Meeres; er gab ihnen den Namen atriphtothalassic curves (von *ἄτριπτος*, ohne Reibung, und *θάλασσα*, Meer abgeleitet). Unter diesen tritt besonders jene hervor, die in Polarkoordinaten durch die Gleichung

$$\varrho^2(\varrho - h) + \frac{k^3}{\cos^2\omega} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

wiedergegeben wird, nämlich die Atriphtaloide, die von Townsend untersucht wurde[1]) und für welche G. de Longchamps die Tangente konstruiert hat[2]). Indem die Atriphtaloide in kartesischen Koordinaten durch die Gleichung

$$(x^2+y^2)^2x^2 = (hx^2-k^3)^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

dargestellt wird, so ist sie symmetrisch zu den beiden Koordinatachsen. Die Gleichung (3) ist dritten Grades in ϱ und hat 1 oder 3 reelle Wurzeln, je nachdem

$$\sin^2\omega \lesseqgtr \frac{4h^3-27k^3}{4h^3}.$$

Wenn $4h^3-27k^3>0$ angenommen wird, so kann man durch O zwei Gerade ziehen, die mit Ox einen Winkel bilden, dessen Sinus gleich $\pm\sqrt{\frac{4h^2-27k^3}{4h^3}}$ ist; alsdann schneidet jede durch O gezogene Gerade innerhalb des von jenen beiden gebildeten Winkels die Kurve in sechs Punkten, jede Gerade außerhalb desselben in zweien. In diesem Falle besteht die Kurve aus zwei unendlichen Zweigen und zwei Ovalen (s. Taf. IX, Fig. 66). Wenn hingegen $4h^3-27k^3=0$, so werden die beiden Ovale unendlich klein, d. h. sie werden durch zwei isolierte Punkte vertreten. Wenn endlich $4h^3-27k^3<0$, so besteht die Kurve nur aus zwei Serpentinen.

1) *On the atriphtaloid and atriphtalid of Dr. Haughton* (Ed. Times XXXVII, 1882) und *On the geometrical properties of the atriphtaloid* (Proc. R. Irish Academy 1882).

2) *Construction de la tangente à l'atriphtaloïde* (Journ. math. spéc. 4e Sér. XVII, 1893).

Welches auch die relative Größe der Konstanten h und k sein möge, die Kurve hat die Kreispunkte der Ebene als Doppelpunkte; da die zugehörenden Tangenten die Gleichung haben

$$x \pm iy = \pm \frac{h}{2},$$

so sieht man, daß die beiden Punkte $x = \pm \frac{h}{2}$, $y = 0$ ausßerordentliche Brennpunkte der Kurve sind, und daß demnach, wenn man k variiert, die Gleichung (4) ∞^1 Atriphtaloiden darstellt, welche diese Brennpunkte gemeinsam haben. — Die Kulminationspunkte haben als Abszissen die Wurzeln der Gleichung

$$2x^3 \pm hx^2 \pm k^3 = 0,$$

wo die oberen und ebenso die unteren Vorzeichen zusammengehören. Da jede dieser Gleichungen eine reelle Wurzel hat, so gibt es auch zwei reelle Doppeltangenten parallel zur x-Achse. Außer den Kreispunkten hat die Atriphtaloide im Unendlichen noch einen Doppelpunkt; es ist der unendlich ferne Punkt der y-Achse; diese Achse ist die zugehörige Tangente, und da sie die Kurve anderswo nicht trifft, so bietet diese im Unendlichen eine höhere Singularität dar.

Während die Atriphtaloide ihre Entstehung einer Frage aus der mathematischen Physik verdankt, entstand aus astronomischen Fragen eine andere Kurve sechster Ordnung, die wir nunmehr erwähnen müssen.

Die Formel, welche die Zeitgleichung E in Funktionen der wahren Länge φ angibt, hat man in folgender Form aufgestellt:

$$E = -462 \sin(\varphi - \alpha) - 593 \sin 2\varphi - 3 \sin 2(\varphi - \alpha) + 13 \sin 4\varphi,$$

wo α die Länge des Aphels ist. Indem man die beiden letzten Glieder vernachlässigt und

$$\frac{1}{2}\frac{E}{593} = \varrho, \quad \frac{231}{593} \sin \alpha = a, \quad \frac{231}{593} \cos \alpha = b$$

setzt, wird diese

$$\varrho = a \cdot \cos\varphi - b \cdot \sin\varphi - \sin\varphi \cdot \cos\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Interpretieren wir ϱ und φ als Polarkoordinaten, so stellt diese Gleichung eine rationale Kurve dar, die von E. de Jonquières untersucht wurde[1]); sie ist die erste der oben erwähnten Kurven sechster Ordnung. In kartesischen Koordinaten hat sie die Gleichung

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - ax + by)^2 = x^2y^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Demnach ist der Anfang ein vierfacher Punkt mit paarweise zusammen-

1) *Note relative à une courbe du sixième ordre qui se présente en astronomie* (Ann. di Matem. I, 1858).

fallenden Tangenten; Doppelpunkte derselben sind die Punkte $A\,(a, 0)$ und $B\,(0, -b)$; Spitzen die beiden Kreispunkte der Ebene, indem die unendlich ferne Gerade gemeinsame Tangente derselben ist. Von projektivischem Standpunkte aus unterscheidet sich daher diese Kurve nicht von der Käferkurve; de Jonquières zeigte, wie man sie vermittels projektiver Büschel von Kurven niederer Ordnung erzeugen könne.

112. Zu einer anderen Kurve sechster Ordnung gelangte L. Burmester bei der Untersuchung über die Schatten der Schraubenflächen[1]); sie wird in der Ebene auf folgende Weise konstruiert: „Es seien zwei Kreise Γ und Δ gegeben, die O zum gemeinsamen Mittelpunkt und c und d als Radien haben (s. Taf. X, Fig. 67); in ihrer Ebene sei ferner ein fester Punkt G gegeben; man ziehe durch O eine beliebige Gerade, welche die Peripherie der gegebenen Kreise bzw. in C und D schneidet; man verbinde C mit G und bestimme auf der Verbindungslinie die beiden Punkte P, die von D einen gegebenen Abstand haben; der Ort der Punkte P ist eine Kurve, die aus zwei Ovalen besteht, von denen das eine innerhalb des anderen liegt, und die wegen ihrer Gestalt Kranioide (von κράνιον, Schädel) heißt[2]). Um ihre Gleichung zu finden, nehmen wir O als Anfang und OG als y-Achse. Die Strecke OG nennen wir g; die konstante Länge von DP l und φ den Winkel, den der bewegliche Radius OCD mit der x-Achse bildet; die Koordinaten von C werden dann sein $(c \cos\varphi,\ c \sin\varphi)$, die von D $(d \cos\varphi,\ d \sin\varphi)$. Die Gleichungen der Geraden CG und des Kreises mit dem Zentrum D und dem Radius l werden also sein:

$$x(g - c \sin\varphi) + cy \cdot \cos\varphi = cg \cdot \cos\varphi,$$

bzw.

$$x^2 + y^2 - 2d \cdot x \cos\varphi - 2d \cdot y \sin\varphi + d^2 = l^2;$$

wir schreiben diese folgendermaßen:

$$(g - y) \cos\varphi + x \sin\varphi = \frac{gx}{c},$$

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = \frac{x^2 + y^2 + d^2 - l^2}{2d},$$

daraus können wir ableiten

$$\left(gy - \overline{x^2 + y^2}\right) \cos\varphi = \frac{gx}{c} - \frac{x^2 + y^2 + d^2 - l^2}{2d}\, x,$$

$$\left(gy - \overline{x^2 + y^2}\right) \sin\varphi = -\frac{gx^2}{c} + \frac{x^2 + y^2 + d^2 - l^2}{2d}(g - y);$$

durch Quadrieren und Addieren ergibt sich:

---

1) L. Burmester, *Kinematisch-geometrische Construktionen der Parallelprojection der Schraubenflächen und insbesondere des Schattens derselben* (Zeitschrift Math. Phys. XVIII, 1873) S. 198.

2) L. Burmester, *Lehrbuch der Kinematik,* Bd. I (Leipzig, 1888), S. 78.

$$[gy - (x^2 + y^2)]^2 = g^2x^2\left(\frac{x^2+y^2}{c^2} - \frac{x^2+y^2+d^2-l^2}{cd}\right)$$
$$+ \frac{(x^2+y^2+d^2-l^2)}{4d^2}(x^2+y^2-2gy+g^2) \quad . \quad . \quad (7)$$

als Gleichung der Kranioide; sie zeigt, daß die Kurve in der Tat von der sechsten Ordnung ist, wie oben angedeutet: Burmester hat nicht nur zwei mechanische Konstruktionen derselben angegeben, sondern auch zwei verschiedene Weisen, in jedem Punkte die Normale und demnach auch die Tangente anzugeben[1]).

Ohne uns mit der Wiedergabe derselben aufzuhalten, wollen wir lieber einen bemerkenswerten Spezialfall der Kranioide anführen, auf welchen zu Anfang des 19. Jahrhunderts Poncelet stieß, als er sich mit ganz analogen Fragen beschäftigte, wie diejenigen, denen obige Kurve ihren Ursprung verdankt[2]). Dieser Fall entspricht der Voraussetzung, daß d und demnach auch l unendlich groß seien. Die oben angegebene Konstruktion wird dann zu folgender: „Gegeben ein Kreis mit dem Mittelpunkte O und dem Radius c und ein Punkt G seiner Ebene; man ziehe in diesem Kreise einen beliebigen Radius OC (Taf. X, Fig. 68) dann die Gerade GC und errichte in O die Senkrechte zu OC, diese beiden Geraden schneiden sich in einem Punkte P der fraglichen Kurve.“ Um deren Gleichung zu finden, könnte man auf einen Grenzübergang zurückgreifen, der auf die Gleichung der Kranioide angewendet wird, aber es ist viel leichter, sie direkt zu begründen. Behalten wir nämlich die vorigen Bezeichnungen sämtlich bei, so erkennt man, daß die Gleichungen der Geraden GC und OP sind:

$$x + y \operatorname{tg} \varphi = 0, \quad x(g - c\sin\varphi) + cy\cos\varphi = gc\cos\varphi. \quad . \quad (8)$$

Durch Elimination von φ ergibt sich

$$g^2x^2(x^2+y^2) = c^2(gy - x^2 = y^2)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

als Gleichung der gesuchten Kurve; diese ist demnach eine Kurve vierter Ordnung, die im Anfangspunkt einen Berührungsknoten und G als Doppelpunkt hat. Wir bemerken ferner, daß aus der Gleichung (11) sich ergibt

$$x = \frac{gc\sin\varphi\cos\varphi}{g\sin\varphi - c}, \qquad y = -\frac{gc\cos^2\varphi}{g\sin\varphi - c}, \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

womit es sich bestätigt, daß die Kurve rational ist. In dem Falle, daß G der Peripherie des gegebenen Kreises angehört ($g = c$), fällt die erhaltene Kurve mit einer Strophoide zusammen. Im allgemeinen

1) Daselbst S. 79ff.

2) *Application de la méthode de Roberval au tracé des tangentes aux courbes de contour apparent et de séparation d'ombre et de lumière dans l'espace de la vis à filets triangulaires.* (*Application d'analyse et de géométrie etc.* I, Paris 1864, S. 447ff.)

bemerkte Poncelet[1]): „cette courbe du quatrieme dégré que nous avions baptisée dans la salle no. 6 du nom de capricorne; courbe remarquable à plus d'un titre par sa forme symétrique élégante même, et douée de nombreuses propriétés géométriques jusqu'ici encore peu étudiée; etc.“ Indem man sich diesem vernünftigen Vorschlage des großen französischen Geometers angeschlossen hat, ist die fragliche Kurve vierter Ordnung Capricornoide genannt worden[2]); sie kann mechanisch erzeugt, und ihre Tangenten können nach der Robervalschen Methode bestimmt werden.

Eine andere Kurve sechster Ordnung, die betrachtet und schon benannt wurde, wenn auch nicht von Grund aus untersucht, ist von folgender Entstehungsweise: „Gegeben ein Kreis mit dem Radius r und dem Zentrum O (Taf. IX, Fig. 69) und darin zwei zueinander senkrechte Durchmesser AA' und BB'. Es sei MM' eine beliebige zum Durchmesser AA' parallele Sehne; von M' aus fälle man das Lot n auf die Gerade m, welche in M den gegebenen Kreis berührt; der Ort der Fußpunkte N dieses Lotes ist die fragliche Kurve.“ Um die analytische Darstellung dieses Ortes zu finden, nehmen wir AA' und BB' als Koordinatachsen; die Koordinaten von M werden dann sein $r \cdot \cos\varphi$, $r \cdot \sin\varphi$ und die von M' $-r \cdot \cos\varphi$, $r \cdot \sin\varphi$ (wo φ den Winkel MOA bedeutet). Die Tangente m wird demnach dargestellt durch

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - r = 0,$$

und die Senkrechte n durch

$$x \sin\varphi + y \cos\varphi + r \sin 2\varphi = 0;$$

lösen wir diese nach x und y auf, so erhalten wir

$$x = r\cos\varphi - r\sin\varphi \cdot \sin 2\varphi, \quad y = r\sin\varphi + r\cos\varphi \cdot \sin 2\varphi;$$

oder, wenn man will:

$$x = r\cos\varphi(1 - 2\sin^2\varphi), \quad y = r\sin\varphi(1 + 2\cos^2\varphi) \,. \,. \quad (11)$$

Dies ist die bequemste Art, die Kurve darzustellen; führt man hingegen an Stelle des Parameters φ die Größe $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ ein, so erhält man x und y als rationale gebrochene Funktion vom sechsten Grade dargestellt; daraus folgt, wie schon angegeben, daß die Kurve von der sechsten Ordnung und rational ist. Man ersieht ferner, daß sie symmetrisch sowohl in bezug auf AA' als auch BB' ist. Auf der ersten dieser beiden Geraden hat sie zwei Berührungsknoten C und C', außerdem geht die Kurve durch die Punkte B und B'. Da aus den Gleichungen (11) folgt, daß

$$x^2 + y^2 = r^2(1 + \sin^2 2\varphi),$$

1) A. a. O. S. 460.

2) Burmester, *Kinematik* I. S. 81.

so liegen alle reellen Punkte der Kurve in dem Kreisring, dessen Mittelpunkt O und dessen Radien r und $r\sqrt{2}$ sind; usw. — Die Kurve kann auch geometrisch erforscht werden, indem man sie als besonderen Fall derjenigen Kurven betrachtet, die durch einen Kegelschnitt und eine rationale Kurve vierter Klasse erzeugt werden, deren Tangenten sich projektivisch entsprechen.

A. Sanchez, der es für angebracht hielt, dieser Kurve ein besonderes Werkchen zu widmen[1]), sah ihre Gestalt als einem Horne ähnlich an, indem er nur den vierten Teil derselben, nämlich den Bogen, der in A beginnt und über C und D gehend in B endigt, betrachtete, und belegte sie daher mit dem Namen Cornoide. Aus dem Gesagten geht jedoch hervor, daß, wenn dieser in der Geometrie festen Fuß fassen soll, es ratsam wäre, der Kurve einen Namen zu geben, welcher ihrer wirklichen Form besser entspricht.

Sechstes Kapitel.

Spezielle Kurven einer geraden Ordnung höher als sechs.

113. Kurven siebenter Ordnung treten in der Geometrie fast gar nicht auf[2]). Als eines dieser seltenen Beispiele möge dienen: Der Ort der Mittelpunkte zweier einander ähnlicher konzentrischer Kegelschnitte, von denen der eine einem Dreiecke umbeschrieben, der andere einem anderen einbeschrieben ist, besteht aus einer Kurve 7. Ordnung und der unendlich fernen Geraden[3]). Die Geometrie meidet also auch hier, wie es auch die organische und unorganische Natur tut, die „heilige" Zahl 7. Selten sind auch Kurven 9[ter], noch seltener werden solche von der Ordnung 11 und 13 sein, so daß wir es hier lediglich mit Kurven gerader Ordnung zu tun haben. Die meisten entspringen wieder jener Quelle, der wir schon so oft begegnet sind, und mit ihnen wollen wir beginnen.

I. Kurven von einem Kegelschnitt abgeleitet.

a) Trägt man auf jedem Durchmesser der Ellipse vom Mittelpunkte aus eine Strecke gleich dem Krümmungsradius im Endpunkte,

---

1) *La cornoide* (San Salvador, Central-America, 1895).

2) Bei einer mechanischen Untersuchung begegnete J. I. Vaes (*Étude mathématique sur le transmission par bielle et manivelle et Étude sur la théorie de Radiger;* Ann. Ec. Pol. Delft, VII, 1897, S. 131), der durch folgende kartesische Gleichung dargestellten Kurve:

$$(x-y)(x^2+y^2)^3 = 3a^2l^2x^3;$$

sie ist rational, besteht aus einem einzigen unpaaren Zweige und wurde *Accelerationskurve* genannt.

3) Entnommen aus der S. 239 zitierten Diss. von Dörholt.

so bekommt man eine bemerkenswerte Kurve 8ter Ordnung, die, vorausgesetzt, daß die Ellipse in der üblichen Weise dargestellt ist, die Polar- bzw. kartesische Gleichung hat

$$ab\varrho = (a^2 \sin^2\omega + b^2 \cos^2\omega)^{\frac{3}{2}}, \quad a^2b^2(x^2+y^2)^4 - (a^2y^2+b^2x^2)^3 = 0. \quad (1)$$

B. Tortolini[1]) hat sie zuerst untersucht und gezeigt, daß, während sich ihre Quadratur elementar ausführen läßt, ihre Rektifikation von hyperelliptischen Funktionen abhängt.

b) Der Ort der Scheitel der einem rechtwinkligen Dreiecke einbeschriebenen Parabeln ist eine rationale Kurve 8ter Ordnung gebildet von drei Blättern, deren Fläche L. Dujardin[2]) bestimmt hat.

c) Gleichfalls 8ter Ordnung ist der Ort der Scheitel solcher Kegelschnitte, die zwei gegebene Kreise doppelt berühren[3]).

d) Der Ort der Punkte, von denen Paare zueinander rechtwinkliger Tangenten an zwei Kegelschnitte ausgehen, ist im allgemeinen 8ter Ordnung; er zerfällt jedoch in zwei Pascalsche Schnecken, wenn die gegebenen Kurven Kreise sind[4]).

e) Der Ort der Punkte P in der Ebene der Ellipse E, derart, daß der Kreis um P als Zentrum, der die Polare von P berührt, zugleich E berührt, ist eine Kurve 12ter Ordnung, deren Gleichung von V. Retali[5]) gefunden wurde.

f) Ist P ein Punkt der Ellipse E, deren Brennpunkte F und F_1 sind, so gibt es wenigstens einen Kegelschnitt, der die Geraden PF und PF_1 in F und F_1 berührt und außerdem E. Variiert man P auf E, so beschreibt das Zentrum jenes Kegelschnittes eine Kurve 12. Ordnung[6]).

g) Der geometrische Ort der Fußpunkte der vom Zentrum einer Ellipse auf die Geraden gefällten Lote, die die Endpunkte zweier konjugierter Durchmesser verbinden, ist eine rationale Kurve 14ter Ordnung; von derselben Ordnung ist auch der Ort der Fußpunkte derselben Lote, wenn sie auf die Verbindungslinien der Krümmungszentren für die Endpunkte der konjugierten Durchmesser gefällt werden[7]).

---

1) *Sulla curva luogo geometrico dei raggi di curvatura d'una ellisse data* (Annali di matem. VI, 1864).

2) *Intermédiaire* VII, 1900, S. 391.

3) Das. XII, 1905, S. 236.

4) G. Espanet im *Intermédiaire* IX, 1902, S. 217. Auch die von Elisabeth Buchanan Cowley vom topologischen Standpunkte aus untersuchten Kurven in der Diss. *Plane curves of the eight order with two real four-fold points having distinct tangents and with no other point singularities* (Columbia University, 1908).

5) Das. Bd. VIII, 1902, S. 335.

6) Welsch und Hendlé, im *Intermédiaire,* IV, 1897, S. 12.

7) Das. Bd. XIII, 1906, S. 176.

h) Unter den Kegelschnitten, die drei gegebene Geraden berühren, befinden sich 6 mit gegebenen Achsen[1]), folglich bilden die Kegelschnitte, die einem gegebenen kongruent sind, und zwei Geraden berühren, ein System, dessen zweite Charakteristik 6 ist. Wendet man hierauf einen allgemeinen Satz von Chasles an, so ergibt sich, daß der Ort der Brennpunkte eines solchen Systems von Kegelschnitten von der Ordnung 18 ist und die Kreispunkte als 6-fache Punkte hat.

i) Zieht man durch jeden Punkt einer Kurve eine Gerade, die mit der bezüglichen Tangente den Winkel α bildet und trägt auf dieser zu beiden Seiten vom Berührungspunkte aus eine Strecke von gegebener Länge l ab, so ist der Ort der Endpunkte eine neue Kurve, die man die Äquisokline der gegebenen nennen kann. Ist im speziellen $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so erhält man die Parallelkurve der ursprünglichen (s. Nr. **261**), ist hingegen $\alpha = 0$, so bekommt man die Äquitangentiale (s. Nr. **231**). — Gehen wir z. B. von der Ellipse

$$x = a \cdot \cos\varphi, \qquad y = b \cdot \sin\varphi$$

aus, und nennen x, y die Koordinaten des Punktes der Äquisokline, die dem Ellipsenpunkte entspricht, so ist leicht einzusehen, daß folgende Doppelbeziehung statt hat

$$\frac{x - a\cos\varphi}{a\sin\varphi\cdot\cos\alpha + b\cos\varphi\sin\alpha} = \frac{y - b\cdot\sin\varphi}{a\sin\varphi\cdot\sin\alpha - b\cos\varphi\cos\alpha} = \frac{l}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}, \quad \ldots \quad (2)$$

die alsbald die parametrische Darstellung der Äquisokline liefert und beweist, daß diese von der 8ten Ordnung ist. Führt man die elliptischen Funktionen ein mit dem Modul $k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ und setzt

$$\sin\varphi = cn\,u, \quad \cos\varphi = sn\,u, \quad \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\varphi} = a\,dn\,u,$$

so findet man folgende parametrische Darstellung der Kurve

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cdot sn\,u + \frac{l}{a}\,\frac{a\cos\alpha\,cn\,u + b\sin\alpha\cdot sn\,u}{dn\,u} \\ y &= b\cdot cn\,u + \frac{l}{a}\,\frac{a\sin\alpha\,cn\,u - b\cos\alpha\,sn\,u}{dn\,u} \end{aligned}\right\}, \quad \ldots \quad (3)$$

woraus hervorgeht, daß alle Äquisoklinen elliptische Kurven sind. Wir überlassen es dem Leser, diese analytische Darstellung auf das Studium dieser neuen Kurvengattung anzuwenden.

---

1) J. Steiner, *Ges. Werke* II, S. 345; G. Loria, *Giorn. di matem.* XXIV, 1886, S. 206.

k) Von der 8ten Ordnung sind auch die Konchoiden der Kegelschnitte, von denen in Nr. 69ff. die Rede war.

II. **Das Trifolium pratense.** In dieses Kapitel gehören auch einige Kurven, die bei der Betrachtung des Gelenkvierecks auftreten, wir haben diese jedoch schon besprochen: wir trafen auf die Kniekurve, die 14ter Ordnung ist und in speziellen Fällen sich auf den 6ten Grad erniedrigt. Von der 8ten Ordnung ist auch eine von H. Wieleitner[1]) erdachte Kurve, die eine Verallgemeinerung der Bernoullischen Lemniskate ist. Ganz anderen Ursprungs ist jedoch die Kurve, von der wir jetzt sprechen wollen.

Die Frage Nr. 539 der *Nouvelles Annales de Mathématiques* lautet: „trouver une courbe qui représente les trois folioles du trifolium pratense." Gelöst wurde diese von H. Brocard[2]) in folgender Weise: Wir denken uns eine geschlossene Kurve Γ, konvex und symmetrisch in bezug auf eine Achse, die auf dieser Achse eine Spitze hat und diese Achse senkreckt in O durchschneidet. O nehmen wir nun als Pol und diese Symmetrieachse als Polarachse und, ohne die Radienvektoren der einzelnen Punkte zu verändern, verdreifachen wir die Argumente derselben. Dann verwandelt sich Γ in eine aus drei gleichen und in bezug auf eine Achse symmetrischen Blättern bestehende Kurve, jedes mit einer Spitze. Jede Kurve Γ von der angegebenen Art führt demnach zu einer Lösung der gestellten Aufgabe.

Als Kurve Γ kann z. B. die Kardioide dienen, die in Polarkoordinaten r und u die Gleichung hat:

$$r = a(1 - \cos u);$$

da diese ihre Spitze im Pole hat und die Polarachse senkrecht im Punkte $u = \pi$, $r = 2a$ schneidet, so ist es nötig eine Koordinatenveränderung vorzunehmen, derart, daß dieser Punkt der neue Pol wird. Sind nun ϱ und ω die neuen Koordinaten des Punktes (r, u), so bestehen die Beziehungen

$$\frac{r}{\sin\omega} = \frac{\varrho}{\sin u} = \frac{2a}{\sin(u - \omega)}.$$

In den Koordinaten ϱ und ω wird daher die Kardioide folgendermaßen wiedergegeben

$$a^2(\varrho^2 - 4a\varrho\cos\omega + 4a^2) = (\varrho^2 - 3a\varrho\cos\omega + 2a^2)^2.$$

Verwandeln wir nun ω in 3ω, so erhalten wir

$$a^2(\varrho^2 - 4a\varrho\cos 3\omega + 4a^2) = (\varrho^2 - 3a\varrho\cos 3\omega + 2a^2)^2 \quad (4)$$

1) *Intermédiaire*, XIII, 1906, S. 34 u. 165.
2) Nouv. Ann. Math. 3e Sér. IV, 1894, S. 58*.

als Polargleichung unseres Trifolium pratense. Seine kartesische Gleichung ist infolgedessen

$$a^2\left(x^2+y^2-4ax\frac{x^2-3y^2}{x^2+y^2}+4a^2\right)=\left(x^2+y^2-3ax\frac{x^2-3y^2}{x^2+y^2}+2a^2\right)^2.$$

Aus derselben kann man entnehmen, daß die zugehörige Kurve drei Symmetrieachsen hat, die miteinander die Winkel $\frac{2\pi}{3}$ bilden und drei Spitzen, die von dem „Blattstiele“ den Abstand $2a$ haben.

III. **Die Äquipotentialkurven.** Der Name Äquipotentialkurven (auch Linien gleichen Potentials oder Niveaulinien genannt) wurde von Cayley[1]) den Kurven gegeben, die in bipolaren Koordinaten durch eine Gleichung von der Form

$$\frac{l}{\varrho}+\frac{l_1}{\varrho_1}=1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

wiedergegeben werden, wo l und l_1 gegebene Längen sind. Die Kurven sind von der 8ter Ordnung. Eine geeignete parametrische Darstellung bekommt man, indem man beachtet, daß die obige Gleichung sich durch die beiden folgenden ersetzen läßt

$$\varrho=l\frac{\lambda+\mu}{\lambda}, \qquad \varrho_1=l_1\frac{\lambda+\mu}{\mu},$$

wo λ und μ zwei Parameter sind. Nimmt man nun als x-Achse die Verbindungslinie der beiden festen Pole, die zugleich Brennpunkte der Kurve sind, und als Anfang die Mitte der Strecke $2a$ zwischen diesen, so gehen die letzten Gleichungen über in

$$x^2+y^2+a^2-2ax=\frac{(\lambda+\mu)^2}{\lambda^2}l^2,$$

$$x^2+y^2+a^2+2ax=\frac{(\lambda+\mu)^2}{\mu^2}l_1^{\,2},$$

woraus sich dann unschwer ergibt, daß

$$x=\frac{(\lambda+\mu)^2(l_1^{\,2}\lambda^2+l^2\mu^2)}{4a\lambda^2\mu^2},$$

$$y=\frac{\sqrt{-[(\lambda+\mu)(l\mu+l_1\lambda)+2a\lambda\mu][(\lambda+\mu)(l\mu-l_1\lambda)+2a\lambda\mu][(\lambda+\mu)(l\mu-l_1\lambda)+2a\lambda\mu][(\lambda+\mu)(l\mu-l_1\lambda)+2a\lambda\mu}}{4a\lambda^2\mu^2}$$

Aus einer ähnlichen Darstellung der Äquipotentialkurven hat F. Gomes Teixeira[2]) zwei bemerkenswerte metrische Eigenschaften der Kurve abgeleitet, nämlich: Die Summe der Entfernungen der Schnittpunkte einer beliebigen Geraden von einem Brennpunkte ist konstant; zweitens ist auch konstant das Produkt der Entfernungen der Schnittpunkte

1) *Phil. Magazine,* XIV, 1857, oder Collected Papers III, S. 258.

2) *Arch. Math. Phys.*, 3e Ser. III, 1902, S. 132.

der Kurven mit einer Geraden, die beliebig durch einen anderen der Brennpunkte gezogen ist.

Diese Kurven sowie die Niveaulinien

$$\frac{l}{\varrho} + \frac{l_1}{\varrho_1} + \frac{l_2}{\varrho_2} = c$$

spielen in der Physik eine große Rolle[1]).

IV. **Eine Kurve achter Ordnung, der man in der Astronomie begegnet**[2]). Die Aufgabe, die Bahn eines Kometen aus drei Beobachtungen zu bestimmen, führt zur Untersuchung folgender Gleichung

$$m - z = \frac{m}{(1 - 2z\cos\psi + 2^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

wo m und ψ aus der Beobachtung hervorgehende Konstanten sind, und z die Unbekannte. Setzt man nun $x = z - \cos\psi$ und

$$my = m - \cos\psi - x, \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

so wird die Gleichung (6)

$$y = \frac{1}{(x^2 + \sin^2\psi)^{\frac{3}{2}}}; \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

infolgedessen ist die Aufgabe, z zu finden, zurückgeführt auf die, die Schnittpunkte der Geraden (7) mit der Kurve (8) zu finden. Gl. (8) kann geschrieben werden als

$$y^2(x^2 + \sin^2\psi)^3 = 1\,.$$

Die Hilfskurve ist von der achten Ordnung und symmetrisch zu den beiden Koordinatachsen. Als Kulminationspunkte hat sie die Punkte $(0, \pm \sin^{-3}\psi)$ und als Wendepunkte die vier reellen Punkte mit der Abszisse $\pm \frac{1}{2}\sin\psi$. Der unendlich ferne Punkt von Oy ist ein sechsfacher, und der unendlich ferne von Ox ein Doppelpunkt. — Setzen wir im speziellen $\psi = \frac{\pi}{2}$, so wird (8) zu

$$y = \frac{1}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

die eine Kurve darstellt, die vor längerer Zeit von Binet[3]) zu ähnlichen Zwecken verwendet worden ist.

---

1) Vgl. z. B. Holzmüller, *Theorie der isogonalen Verwandtschaften* (Leipzig, 1882) und *Das Potential u. seine Anwendung* (Leipzig, 1898), Kap. V u. X.

2) Mrs. W. H. Young (Miss Grace Chisholm), *On the curve* $y = \left\{\frac{1}{x^2 + \sin^2\psi}\right\}^{\frac{2}{3}}$ *and its connection with an astronomical problem* (Monthly Notices of the R. Astr. Soc., March. 1897).

3) *Mémoire sur la determination des orbites des planètes et des comètes* (Journ. Éc. polyt. 20. Heft, 1831).

V. Die Erzeugende eines Körpers von kinetischer Symmetrie. Man sagt von einem Körper, er habe „kinetische Symmetrie“, wenn seine Trägheitsmomente in bezug auf alle durch seinen Schwerpunkt gehende Achsen untereinander gleich sind. Nach Laplace[1]) ist der einfachste Körper nächst der Kugel, der eine solche Symmetrie bebesitzt, der durch Rotation der Kurve

$$\varrho^5 = a^5 + b^5(7 \cos^4 \omega - 6 \cos^2 \omega) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

erzeugte. Da nun diese Polargleichung beim Übergang zu kartesischen Koordinaten sich verwandelt in

$$(x^2 + y^2)^9 = [a^5(x^2 + y^2)^2 + b^5(7y^4 - 6y^2(x^2 + y^2))]^2,$$

so handelt es sich um eine Kurve achtzehnter Ordnung, für die der Anfang ein 8-facher, die Kreispunkte aber 9-fache Punkte sind. Die verschiedenen Gestalten, die sie annehmen kann zufolge der Werte a und b, wurden eingehend von T. Heller[2]) untersucht.

VI. In einem Anhange zu einem Briefe, den Tschirnhausen an Huygens unterm 12. Mai 1687 schrieb, findet sich die Figur einer sehr komplizierten zu einer Achse symmetrischen Kurve die 25 Doppelpunkte besitzt.[3]) Welches ihre Entstehungsweise ist, ist uns unbekannt, eine von Barbarin über sie gemachte Hypothese führt zu der Vermutung, daß es sich um eine Kurve 16. Ordnung handelt.[4])

Siebentes Kapitel.

Spezielle Kurven einer ungeraden Ordnung höher als fünf.

114. a) Zwei Kurven fünfzehnter Ordnung. Wir bemerkten schon im vorigen Kapitel, daß Kurven siebenter Ordnung fast gar nicht, elfter und dreizehnter Ordnung überhaupt nicht auftreten. Dies beweisen uns die vorigen Kapitel, als auch zeigt es uns die Geschichte der Geometrie. Hier wie auch in der Arithmetik werden die größeren Primzahlen, ja auch schon die ungeraden Zahlen gemieden. Darum ist es bemerkenswert, wenn Kurven fünfzehnter Ordnung auftreten.

Die eine von ihnen wurde von Steiner[5]) angegeben. Sie ist der Ort der Mittelpunkte der Strecken, die auf den Tangenten einer Kurve dritter Ordnung vom Berührungspunkte und dem Schnittpunkte begrenzt werden. Ist aber die Ausgangskurve eine Strophoide,

1) S. das III. Buch der *Mécanique céleste.*

2) *Der einfachste Körper, welcher kinetische Symmetrie besitzt* (Programm, Nürnberg 1902—3).

3) *Œuvres complètes de Huygens* IX, S. 152.

4) *Une curiosité géométrique* (Procès Verbaux de la Soc. de Bordeaux, 1905).

5) *Gesammelte Werke,* II, S. 488.

so erniedrigt sich der Grad jenes Ortes auf 8[1]). — Zu der anderen Kurve fünfzehnter Ordnung führte die Untersuchung des Ortes der Paare von Punkten P, Q derart, daß durch jeden von beiden drei Kegelschnitte je eines gegebenen Büschels hindurchgehen. F. Schuh, der sie (sowie die Enveloppe sechster Klasse der Geraden PQ) untersuchte[2]), hat bemerkt, daß in speziellen Fällen, wenn A, B, C, D die Basispunkte des Büschels sind, jener Ort in die beiden Geraden AB, CD und in eine Kurve fünfter Ordnung mit A, B, C, D als Doppelpunkten zerfällt. Derselbe Geometer hat auch den entsprechenden Ort für drei Büschel einer beliebigen Ordnung betrachtet.

b) **Eine Kurve neunter und eine fünfundzwanzigster Ordnung.** Die Theorie der Funktionen einer komplexen Variabelen, die, wie wir gesehen haben, bei der Untersuchung der spirischen Linien (Nr. **64**), der Pascalschen Schnecke (Nr. **71**) und der regulären Astroiden (Nr. **104**) auftritt, und die uns noch zu vielen bemerkenswerten speziellen Kurven geleiten wird (Abschn. V, Kap. 15), führt auch zur Betrachtung einer Kurvenfamilie, deren erster Sprößling eine interessante Kurve neunter Ordnung ist; es ist die letzte Kurvenfamilie, die in diesem Abschnitte ihren Platz findet.

Man erinnere sich, daß man den Namen „lemniskatische Funktionen“ den elliptischen Funktionen, welche den Modulus i haben, gegeben hat. Setzt man daher

$$u = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^4}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

so wird $x = snu$ die erste der lemniskatischen Funktionen sein, und $cnu = \sqrt{1-x^2}$, $dnu = \sqrt{1+x^2}$ die beiden anderen. Aus (1) ergibt sich:

$$iu = \int_0^x \frac{id\xi}{\sqrt{1-\xi^4}},$$

oder auch, wenn $i\xi = \eta$ gesetzt wird

$$iu = \int_0^{ix} \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^4}};$$

daraus folgt $$ix = sn(iu),$$

das heißt
infolgedessen

$$\left.\begin{aligned} sn(iu) &= isnu, \\ cn(iu) &= dnu, \\ dn(iu) &= dnu. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

---

1) *Intermédiaire,* VII, 1900, S. 357; VIII, 1901, S. 73.
2) Verhandelingen der Kon. Akad. Amsterdam XV, 1906—7.

Die erstere zeigt, daß, wenn man setzt

$$x + iy = sn(m + ni)u, \quad \ldots\ldots (3)$$

sein wird

$$y + ix = sn(mi + n)u \quad \ldots\ldots (4)$$

daher werden die Kurven, die aus der geometrischen Darstellung der Funktion $sn(m + ni)u$ sich nicht unterscheiden — es sei denn durch ihre Lage in bezug auf die Achsen — von denjenigen, die aus der Funktion $sn(mi + n)u$ in analoger Weise hervorgehen. Die durch Gleichung (3) dargestellten Kurven sind es nun, die, vorausgesetzt, daß n und m ganze, relativ prime Zahlen sind, die oben genannte Kurvenfamilie bilden[1]).

Wenn man in Gleichung (3) u in $-u$ verwandelt, so wechseln x und y nur ihr Vorzeichen, und demnach sind diese Kurven symmetrisch in bezug auf den Anfangspunkt der Koordinaten; dieser ist für alle ein Wendepunkt.

Im einfachsten Falle, $m = n = 1$ erhält man, wenn der Kürze wegen $sn\,u = \lambda$ gesetzt wird,

$$x + iy = \frac{\lambda + i\lambda}{\sqrt{1-\lambda^4}}, \quad \text{daher ist} \quad x = y = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^4}};$$

die entsprechende Kurve ist eine Gerade.

Um den nächstliegenden Fall, $m = 1$, $n = 2$, zu behandeln, beachten wir zunächst, daß

$$sn((1+i)u) = \frac{\lambda + i\lambda}{\sqrt{1-\lambda^4}}, \qquad cn((1+i)u) = \frac{1 - i\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^4}},$$

$$dn((1+i)u) = \frac{1 + i\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^4}};$$

wenden wir nun das Additionstheorem an, so finden wir

$$x + iy = sn((1+2i)u) = \frac{\lambda(1+2i) - \lambda^5}{1 - (1+2i)\lambda^4},$$

welche Gleichung sich in die beiden anderen trennt

$$x = \frac{\lambda - 6\lambda^5 + \lambda^9}{1 - 2\lambda^4 + 5\lambda^8}, \quad y = \frac{2\lambda - 2\lambda^9}{1 - 2\lambda^4 + 5\lambda^8}. \quad \ldots\ldots (5)$$

Diese stellen eine rationale Kurve Γ_9 von der neunten Ordnung dar; durch Elimination von λ findet man die Gleichung von Γ_9 als

$$(2x + y)(x^2 + y^2)^4 + 2y(5y^4 + 10x^2y - 3y^4) - 2x + y = 0. \quad . \, (6)$$

Sie beweist, daß die fragliche Kurve die zyklischen Punkte der Ebene

1) W. Krimphoff, *Über eine neue Kurvengattung, welche aus der lemniskatischen Funktion entspringt* (Diss. Münster, 1890).

als vierfache Punkte, dagegen den unendlich fernen der Geraden $2x + y = 0$ als einfachen Punkt hat; der Parameter dieses Punktes ist $\lambda = \infty$, der jener Punkte $\sqrt[4]{\frac{1}{1 \pm 2i}}$, (es sind diese die Wurzeln der Gleichung $1 - 2\lambda^4 + 5\lambda^8 = 0$). Da die Kurve Γ_9 rational ist, so hat sie außer jenen beiden vierfachen Punkten noch 16 Doppelpunkte oder Spitzen. Um die zugehörigen Parameter zu finden, beachte man, daß einem Doppelpunkte oder einer Spitze zwei verschiedene Werte desselben zukommen; nennen wir diese λ_1 und λ_2, so muß also sein

$$\frac{\lambda_1 (1 + 2i) - \lambda_1^5}{1 - (1 + 2i)\lambda_1^4} = \frac{\lambda_2 (1 + 2i) - \lambda_2^5}{1 - (1 + 2i)\lambda_2^4}.$$

Diese Gleichung ist teilbar durch $\lambda_1 - \lambda_2$; der Quotient zerfällt in die beiden folgenden reellen Gleichungen

$$(\lambda_1^2\lambda_2^2 - 1)^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)^2 - 4\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = 0,$$
$$(\lambda_1^2\lambda_2^2 + 1)^2 + 2\lambda_1\lambda_2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) = 0.$$

Diese Gleichungen sind algebraisch lösbar und ergeben 4 reelle und 12 imaginäre Lösungen; Γ_9 hat daher 4 reelle Doppelpunkte (s. Taf. X, Fig. 70). Zu demselben Resultate gelangt man auf transzendentem Wege; man erkennt so, daß die Bestimmung der Doppelpunkte von Γ_9 mit dem Probleme der Fünfteilung der Lemniskate äquivalent ist.

Nehmen wir nun den Fall $m = 1$, $n = 3$, so erhalten wir eine Kurve, die nicht rational ist; setzt man aber $m = 2$, $n = 3$, so erhält man auf ähnliche Weise wie oben eine rationale Kurve von der Ordnung 25[1]). Die zyklischen Punkte sind vielfache Punkte derselben von der Ordnung 12; im Unendlichen hat die Kurve auch einen reellen Punkt, außerdem sind von den 144 Doppelpunkten 12 reell (s. Taf. X, Fig. 71)[2]).

Diese Hinweise genügen, um zu zeigen, daß die Theorie der lemniskatischen Funktionen eine reiche Quelle höchst bemerkenswerter rationaler Kurven ist.

---

1) W. Krimphoff, *Neue geometrische Darstellung der lemniskatischen Funktion* (Crelles Journ. CX, 1892).

2) Durch Induktion schließt man, daß wenn m und n relative Primzahlen sind, die eine gerade, die andere ungerade, man zu einer Kurve von der Ordnung $(m + n)^2$ gelangt, die im Unendlichen einen einfachen reellen Punkt hat, und für welche die Kreispunkte vielfache Punkte von der Ordnung $\frac{(m + n - 1)(m + n + 1)}{2}$ sind; die Kurve hat außerdem $\left\{\frac{(m + n - 1)(m + n + 1)}{2}\right\}^2$ Doppelpunkte, von denen nur $\frac{(m + n - 1)(m + n + 1)}{2}$ reell sind.

Schlußbemerkung. Dem Leser, der in diesem Abschnitte manche wichtige oder sehr bekannte Kurve vermissen sollte, sei bemerkt, daß wir eine große Reihe anderer spezieller Kurven höherer als vierter Ordnung im folgenden Abschnitte besprechen werden, weil wir sie dort nicht vom Gesichtspunkte ihrer Ordnung, sondern von anderen allgemeinen Gesichtspunkten betrachten. So gehört z. B. die Kurve sechster Ordnung, welche in tripolaren Koordinaten die Gleichung

$$\varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3 = c$$

hat, zu den allgemeinen Cassinoiden (Nr. **162**); die Kurve achter Ordnung mit der tripolaren Gleichung

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 = c$$

zu den Polyzomalkurven (Nr. **128**) usw. Noch andere, wie die Katakaustiken, die Fußpunkt- und Parallelkurven, werden im II. Bande in einem besonderen Abschnitte als abgeleitete Kurven zur Besprechung kommen.

V. Abschnitt.

Spezielle algebraische Kurven beliebiger Ordnung.

Erstes Kapitel.

Einleitung.

115. Die heutige Geometrie besitzt außer der großen Zahl algebraischer Kurven von bestimmter Ordnung noch einen großen Reichtum an Kurven beliebiger Ordnung, die jedoch spezielle Eigenschaften besitzen, zu denen man gelangt, indem man von den verschiedensten Begriffen ausgeht. Zu einigen gelangt man durch Verallgemeinerung der Konstruktion schon bekannter Kurven: die kissoidalen Kurven und die allgemeinen Kissoiden (Nr. **29**), die strophoidalen Linien und allgemeinen Strophoiden (Nr. **41**), die konchoidalen Kurven und die Konchoiden mit beliebiger Basis (Nr. **69**) können als Beispiele trefflicher Ergebnisse dienen, zu denen ein solcher Verallgemeinerungsprozeß führen kann, wenn er geschickt angewendet wird. Zu anderen kommt man durch Verallgemeinerung der Gleichung einer Kurve[1]): so erhält man durch Verallgemeinerung der Gleichung des Cartesischen Foliums unzählig viele Kurven verschiedener Ordnung (Nr. **34**); in ähnlicher Weise gelangt man zu den Sternkardioiden (Nr. **72**) und den Knoten (Nr. **85**); wir werden in den Kap. 2 bis 6 dieses Abschnittes sehen, wie derselbe Weg zu den Parabeln und Hyperbeln beliebiger Ordnung führt, zu den Perlkurven, den triangulären von Lamé, und den Polyzomalkurven, alles Kurven, die als analytische Verallgemeinerungen der Kegelschnitte angesehen werden können[2]). Jedoch hat diese Methode, eine der Gleichungen, durch welche die Kurve dargestellt wird, zu verallgemeinern, den Übelstand, daß sie unendlich vieldeutig ist, da die Zahl der Arten, auf welche man eine Kurve analytisch darstellen kann, eine unbegrenzte

---

1) Zahlreiche Anwendungen dieser Erzeugungsweise finden sich in J. B. Caraccioli, *De lineis curvis liber* (Pisis, MDCCXL).

2) Weitere Anwendungen desselben Verfahrens findet man bei E. N. Barisien (*Sur deux familles de courbes;* Mathésis, III. Ser., I, 1900), der die Kurven

$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{x^m}{a^m - x^m} \quad \text{und} \quad \frac{y^2}{x^2} = \frac{a^m + x^m}{a^m - x^m}$$

untersuchte, die für $m = 0$ eine Kissoide bzw. eine Strophoide darstellen.

ist. Daher haben einige es vorgezogen die Definition der Kurve zu verallgemeinern, indem sie sich auf einige bemerkenswerte geometrische Eigenschaften, die die Kurve besitzt, beschränkten. So entstanden die Kurven von Darboux und die Equilateren von P. Serret, die wir in kurzem (Kap. 7 dieses Abschnittes) als tatsächliche geometrische Verallgemeinerungen der Kegelschnitte kennen lernen werden. Andere neue Kurven erhält man, wenn man die Linien aufsucht, die vorher aufgestellte Eigenschaften der Gestalt haben; es ist dies ein Begriff, dem namentlich Auguste Comte eine große Bedeutung verlieh, und den wir schon bei der Untersuchung des Trifolium pratense (Nr. **113**) angewendet gesehen haben und der uns in diesem Abschnitte (Kap. 8—10) als Ausgangspunkt der Theorie der Rhodoneen begegnen wird, sowie der geometrischen Blätter, der orbiformen, der triangulären Kurven von Euler und der Ovale. Außerordentlich fruchtbar für neue und wichtige Kurven waren auch das verallgemeinerte Delische Problem, sowie das der Teilung eines Winkels in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile: diese führten zu den Multiplikatrix- und Mediatrix-Kurven und zu der ausgedehnten Klasse der Sektrix-Kurven, deren Untersuchung dem Kap. 11 und 12 dieses Abschnittes zufällt. Eine andere reiche Quelle neuer Kurven entspringt aus der Lehre der geometrischen Transformationen; wir werden uns im allgemeinen hier nicht mit den Kurven aufhalten, die aus der Anwendung bekannter Transformationen auf schon bekannte Linien entstehen, da deren Studium im großen und ganzen weder Schwierigkeiten noch Interesse bietet[1]); die wichtigeren von ihnen werden wir im Ab-

---

1) Eine Ausnahme soll gemacht werden, und zwar mit einer algebraischen Transformation, die mit der Geometrie des Dreiecks zusammenhängt, und die man folgendermaßen erhält (Vgl. G. Loria, *Sur deux classes d'enveloppes* in Archives des mathématiques I Année, 1907). Bekanntlich liegen in jedem Dreieck ABC der Schwerpunkt, der Höhenpunkt und der Mittelpunkt des Feuerbachschen Kreises auf einer Geraden e der sog. Eulerschen Geraden. Hält man nun die Punkte A und B fest und läßt die Ecke C auf einer bestimmten Kurve laufen, so wird e eine andere Kurve umhüllen. Zwischen den Punkten C (x, y) und den Geraden e (u, v) besteht demnach eine Korrespondenz. Um deren Natur zu bestimmen, nehmen wir die Gerade AB als x-Achse und deren Mitte O als Anfangspunkt. Sind nun X, Y laufende Koordinaten, so wird die Gleichung von e sein

$$X(3x^2 + y^2 - 3a^2) + 2xyY + x(a^2 - x^2 - y^2) = 0;$$

daher ist

$$u = \frac{3x^2 + y^2 - 3a^2}{x(a^2 - x^2 - y^2)}, \quad v = \frac{2y}{a^2 - x^2 - y^2},$$

oder auch

$$ux + vy + 3 = 0 \quad \text{und} \quad v(a^2 - x^2 - y^2) = 2y.$$

Hieraus folgt, daß jene Korrespondenz die Charakteristik (1, 2) hat. Einige Anwendungen derselben finden sich in der Dissertation von F. Mühlmann, *Enveloppen der Eulerschen Geraden* (Bern, 1905).

schnitt VII behandeln; wohl aber werden wir in diesen Abschnitt die Betrachtung derjenigen Kurven einschließen, die die Eigentümlichkeit haben, bei gewissen geometrischen Transformationen sich selber zu entsprechen. Solche Kurven sind die, welche ein Zentrum oder auch mehrere Durchmesser haben, die autopolaren und die anallagmatischen Kurven, von denen im Kap. 13 und 14 die Rede sein wird. Die geometrische Darstellung komplexer Größen, aus der wir schon in Nr. **64**, **71**, **103** und **114** Nutzen gezogen haben, wird uns hier zu wichtigen Klassen von Kurven führen (Kap. 15) und zu anderen (Kap. 16—18) die Untersuchung solcher Kurven — einen Spezialfall derselben sahen wir schon in Nr. **20** von Raffy ausgeführt — deren Bogen vermittelst Transzendenten von vorher bestimmter Natur ausgedrückt werden kann. Schließlich sind bei der Behandlung physikalischer Fragen Kurven erdacht worden (Kap. 19), mit denen wir zu der großen Schar der physikalisch-mathematischen Kurven übergehen (s. Nr. **17**).

Bevor wir an die Entwickelung des in den vorigen Zeilen skizzierten Programms herantreten, bemerken wir, daß man auch zu vielen speziellen Kurven gelangt, wenn man die auf gewisse spezielle Theorien bezüglichen Formeln geometrisch darstellt. Zwei Beispiele einer derartigen Entstehung bieten uns die in Nr. **112** definierten Kurven. Eine andere Gruppe bilden die Hermiteschen Kurven, deren Gleichung

$$\frac{\partial^{m+n}(x^2+y^2-1)^{m+n}}{\partial x^m \cdot \partial y^n}=0$$

ist[1]) und die einer erschöpfenden Untersuchung noch warten[2]). Eine andere Gruppe von viel größerem Werte entspringt der Theorie der elliptischen Funktionen. Es ist bekannt, daß, wenn man auf eine derartige Funktion eine Transformation von bestimmter Ordnung anwendet, zwischen dem Modulus p der ursprünglichen Funktion und dem Modulus q der transformierten eine algebraische Beziehung stattfindet; diese stellt nun, wenn man p und q als kartesische Koordinaten eines Punktes auslegt, eine Kurve dar. Eben diese Modular-Kurven wurden in den einfacheren Fällen von Cayley[3]) betrachtet und in ihrer ganzen Allgemeinheit von H. J. S. Smith[4]), dem es gelang, alle

---

1) Comptes Rendus LX, 1865.

2) Vgl. P. Appell, *Sur le degré réalité d'une courbe algébrique à coefficients réells* (Arch. Math. Phys., III. Reihe, IV, 1902).

3) *A memoir on the transformation of elliptic functions* (Phil. Trans. CLXIV, London, 1874). S. auch die neuere Abhandlung *On the transformation of elliptic functions* (Amer. Journ. Math. IX, 1887), woselbst auch die multiplier-modular curves oder *MM*-curves betrachtet werden.

4) *On the singularities of modular-equations and curves* (Proc. Lond. math. Soc. IX, 1878). Vgl. auch die frühere *Mémoire sur les équations modulaires* (Mem. Acc. Lincei 3. Ser. I, 1877) und die spätere *Memoir on the theta- and omegafunctions* (Collected math. Papers, II. Oxford 1894, S. 415 ff.).

Plückerschen Charakteristiken derselben zu bestimmen. Weiteres als diesen Hinweis auf ein Thema, das den Analytiker mehr interessiert als den Geometer, können wir hier nicht bieten.

Erinnern wir uns schließlich, daß unter den Kurven gegebener Ordnung die vom Geschlechte Null oder die rationalen eine besonders wichtige Stelle einnehmen; die Koordinaten der Punkte einer solchen Kurve lassen sich immer als rationale Funktionen eines Parameters ausdrücken und zwar durch ein allgemeines Verfahren, welches Clebsch in einer berühmten Abhandlung[1]) gelehrt hat. Aber, auch ohne gerade auf diese zurückzugehen, kann man in gewissen besonderen Fällen denselben Zweck erreichen: folgende Beispiele mögen dieses zeigen[2]).

Man betrachte die Kurve n^{ter} Ordnung Γ, die durch folgende Gleichung dargestellt wird

$$\sum_{r=0}^{r=n} f_r(x, y) = 0,$$

wo f_r eine binäre Form vom Grade r in x und y ist. Setzt man

$$y = tx, \quad f_r(1, t) = T_r,$$

so wird die vorige Gleichung

$$\sum_{r=0}^{r=n} x^r T_r = 0;$$

lösen wir diese nach x auf und setzen den so gefundenen Wert in $y = tx$ ein, so bekommen wir x und y in Funktionen des Parameters t; die so erhaltenen Ausdrücke sind im allgemeinen transzendent; aber wenn man es durch eine geeignete Änderung des Parameters dahin bringen kann, daß sie rational werden, so ist dann auch Γ rational.

Wenden wir dieses Rechnungsverfahren an auf die Kurve[3])

$$x^{n+1} = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} a_{n-r} y^r,$$

so erhalten wir die Gleichungen

$$x = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} a_{n-r} t^r, \qquad y = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} a_{n-r} t^{r+1};$$

dagegen bei Anwendung auf die Kurve

---

1) *Über diejenigen Kurven, deren Koordinaten rationale Funktionen eines Parameters sind* (Crelles Journ. LXIV, 1865).

2) Hahn, *Eulers Methode der Parameterdarstellung algebraischer Kurven* (Progr. Berlin, 1889).

3) Vgl. G. Cramer, *Introduction etc.* S. 636.

$$x^{n-1} = \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} a_{n-r} x^{n-r} y^2$$

bekommen wir

$$x = \frac{1}{\sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} a_{n-r} t^r}, \qquad y = \frac{t}{\sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} a_{n-r} t^r}.$$

Nehmen wir ferner die Kurve[1])

$$f_m^2 - f_2 \cdot f_{m-2} = 0,$$

so erhalten wir die folgenden Formeln:

$$x = \frac{T_{m-2}}{T_m} \sqrt{T_2}, \qquad y = t \frac{T_{m-2}}{T_m} \sqrt{T_2};$$

bekanntlich kann man nun an Stelle von t einen anderen Parameter τ einführen derart, daß sowohl t wie auch $\sqrt{T_2}$ rationale Funktionen von τ werden; infolgedessen werden auch x und y rationale Funktionen von τ. In ähnlicher Weise erhält man bei den Gleichungen

$$f_m^2 - 2 f_1 f_m f_{m-2} + f_2 f_{m-2}^2 = 0$$

die Formeln

$$x = \frac{T_{m-2}}{T_m} \left(T_1 + \sqrt{T_1^2 - T_2}\right), \qquad y = \frac{T_{m-2}}{T_m} \left(T_1 + \sqrt{T_1^2 - T_2}\right),$$

die durch andere rationale ersetzt werden können, wenn man den Parameter geeignet wählt. U. s. w.

Zweites Kapitel.

Die Parabeln beliebiger Ordnung.

116. Aus der Gleichung $y^2 = px$, welche in kartesischen Koordinaten eine Parabel darstellt, ergeben sich durch Verallgemeinerung Kurven, die durch die Gleichung

$$y^n = p^{n-1} \cdot x \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

dargestellt werden, wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet: es sind die Paraboloiden oder die Parabeln höherer Ordnung, rechtwinklig oder schiefwinklig genannt, jenachdem die Achsen recht- oder schiefwinklig sind. Erdacht und untersucht wurden sie von mehreren berühmten Geometern in der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts. Die bekannteste Erwähnung derselben findet sich einem Briefe, den Descartes am 13. Juli 1638 schrieb[2]), in welchem schon

---

1) C. Hermite, *Cours d'analyse,* I Partie (Paris, 1873) S. 242.

2) *Œuvres de Descartes* éd. Adam et Tannery, II (Paris, 1898) S. 246.

Sätze über den Schwerpunkt und die Volumina, die sie durch Rotation erzeugen, ausgesprochen sind. Wenig späteren Datums ist ein vor dem Jahre 1644 von Fermat[1]) an Cavalieri, durch Vermittelung von P. Mersenne, gerichtetes Schreiben, worin ein Ausdruck für die Fläche eines Parabelsegmentes angegeben ist, sowie für das von ihr durch Rotation um die Achse erzeugte Volumen, ebenso die Schwerpunkte jener Fläche und dieses Körpers. Verbreitet wurden diese wichtigen Resultate von P. Mersenne durch ihre Wiedergabe in der Praefatio ad mechanicam seiner *Cogitata physico-mathematica* (1644). Bemerkenswert ist, daß diese Untersuchungen Fermats aus einer Zeit stammen, die beträchtlich vor 1644 liegt. In einem Briefe, nämlich den er am 22. September 1636 an Roberval richtete[2]), wird auf die von ihm ausgeführte Quadratur hingewiesen, im speziellen auf die Parabel $\frac{y^3}{x} = Const.$ „que M. Beaugrand . . . . appelle parabole solide“; in der Antwort — datiert vom 11. Oktober 1636 — sagt Roberval, daß er den Beweis der von seinem berühmten Korrespondenten entdeckten Sätze gefunden habe[3]). Darauf kündet Fermat — Brief vom 4. November 1636 — die Entdeckung von Sätzen an, die „le centre de gravité de toutes ces nouvelles figures“ betreffen[4]). Und auf dieses selbe Thema kommt er zurück in den Briefen an denselben Roberval vom 16. Dezember 1636[5]) und an Mersenne vom 10. August 1638[6]) und dann mit aller nur wünschenswerten Ausführlichkeit in der berühmten Arbeit, die handelt *De aequationum localium transmutatione et emendatione*, die erst 1679 erschienen ist[7]). Berücksichtigen wir das Datum der Veröffentlichung, so würde die Priorität einiger Resultate in erster Linie dem Bonaventura Cavalieri zukommen, der sie in der vierten seiner *Exercitationes mathematicae* (Bononiae, 1647) bekannt gab; in zweiter Linie dem Stefano degli Angeli, dem Verfasser einer wichtigen Arbeit *De infinitis parabolis, de infinitisque solidis ex variis rotationibus ipsarum etc.* (Venetiae, 1654); endlich dem Wallis, der sich in seiner *Arithmetica infinitorum* (Oxford, 1655) und dann in seinem Lehrbuche über die Kegelschnitte (1665) eingehend mit den höheren Parabeln beschäftigt hat. Diese Übereinstimmung der Resultate verursachte bittere Klagen seitens Cavalieri[8]) und einen Briefwechsel zwischen Wallis und

1) Zuerst veröffentlicht in den *Œuvres de Fermat* (éd. Tannery et Henry) I, S. 195—198.

2) *Œuvres de Fermat*, II, S. 73. 3) Das. S. 81. 4) Das. S. 85.

5) Das. S. 95. 6) Das. S. 165.

7) In den *Varia opera*; s. auch *Œuvres de Fermat*, I, S. 255—285, und III, S. 216—37.

8) In einem Brief, den er unter dem 17. Okt. 1646 an Rocca schrieb, steht nämlich: „Il signor Torricelli . . . . ha dimostrata anch' egli la quadratura delle infinite parabole (come le hanno chiamate in Francia) . . . per via diversissima;

Fermat[1]); das richtige scheint uns zu sein, auf keiner von beiden Seiten eine „mala fides“ vorauszusetzen, indem man sich nicht zu wundern braucht, wenn, wie wir glauben, weil eben jene Zeiten sozusagen reif für die Untersuchung der höheren Parabeln gewesen sind, sich mehrere an die Ausführung derselben gemacht haben.

Es möge vermerkt werden, daß die ersten, die sich mit den höheren Parabeln beschäftigen, die Gestalt derselben nicht untersuchten; sie überließen somit de l'Hospital[2]) und Maclaurin[3]) die Bemerkung, daß sie verschiedene Gestalt darbieten, jenachdem n gerade oder ungerade ist; im ersten Falle ist die Kurve symmetrisch in bezug auf die x-Achse und hat im Anfange mit der anderen Achse eine Berührung von der Ordnung $n-1$; im zweiten Falle ist sie symmetrisch in bezug auf den Anfang und hat daselbst einen Wendepunkt. Es soll auch bemerkt werden, daß sich die ursprüngliche Definition der Parabel leicht noch mehr verallgemeinern läßt, indem man zuläßt, daß der Exponent n, statt ganzzahlig und positiv zu sein, einfach rational und positiv sei; mit anderem Ausdruck: es läßt sich statt der Gleichung (1) auch folgende betrachten:

$$y^{m+n} = p^m \cdot x^n, \quad \dots \dots \dots \quad (2)$$

wo m relativ prim zu n ist. Die entsprechenden Kurven werden in einer Abhandlung von Kuntzen[4]), dem bekannten Lehrer Kants, mit dem Namen parabolae parametrales bezeichnet. Der Anfang ist ein n-facher Punkt, und der unendlich ferne von Ox ein m-facher; das Geschlecht der Kurve ist immer gleich Null, denn aus (2) ergibt sich folgende parametrische Darstellung derselben:

$$x = p\lambda^{m+n}, \quad y = p\lambda^n. \quad \dots \dots \quad (3)$$

117. Die metrischen Sätze über die Parabeln höherer Ordnung sind größtenteils nur Erweiterungen von Sätzen, die schon seit den Zeiten des Archimedes über die Parabel zweiter Ordnung bekannt sind, und können mit wenigen Zeilen Rechnung aufgestellt werden. Wir werden nun diese auf Grund der Gleichung (1) beweisen, ohne jedoch vorauszusetzen, daß n — was wir von nun an den Index der

---

il quale teorema ella sa ch'io lo proposi in Francia, sebbene ora si fanno là inventori del medesimo: ma io cito per testimonio il P. Mersennio al quale lo mandai, ed il P. Niceroni che vedendo l'ultimo problema della mia centuria dove io lo accenno, disse di volerlo proporre colà, siccome lo propose al Beaugrand. In somma, si vede in loro anche in questa parte una emulazione grande cogli Italiani“. G. Piola, *Elogio di Bonaventura Cavalieri* (Milano, 1844) S. 55—56.

1) S. das *Commercium epistolicum de quaestionibus quibusdam inter J. Wallis et alios viros* (Oxon., 1658) und den III. Bd. der *Œuvres de Fermat.*

2) *Sections coniques* (Paris, 1770) S. 339—342.

3) *A treatise of algebra* (London, 1748) S. 317—18.

4) *Theoremata nova de parabolis infinitis eodem parametro et circa eandem axim descriptis* (Acta eruditorum Lips. 1737).

Kurve nennen wollen — ganzzahlig sei, noch auch, daß der Winkel der Koordinatachsen α ein rechter sei.

Bezeichnen wir mit S_t die Subtangente, so ergibt sich aus (1)

$$S_t = x - y\frac{dx}{dy} = x - \frac{ny^n}{p^{n-1}} = x - nx = -(n-1)x;$$

demnach genügt es, **um die Tangente in einem beliebigen Punkte P der Parabel mit dem Index n zu konstruieren, auf der Abszissenachse eine Strecke gleich $-(n-1)$mal der Abszisse abzutragen; die Verbindungslinie ihres Endpunktes mit P liefert die Tangente**[1].

Ist F die Fläche des gemischtlinigen Dreiecks, das zu Seiten einen vom Anfang gerechneten Kurvenbogen und die Koordinaten seines Endpunktes hat, so ist

$$F = \sin\alpha\int_0^x y\cdot dx = \sin\alpha\int_0^x p^{\frac{n-1}{n}} x^{\frac{1}{n}}\cdot dx = \frac{n}{n+1}\frac{y^{n+1}}{p^{n-1}}\sin\alpha.$$

Ist nun anderseits T die Fläche des geradlinigen Dreiecks, welches dieselben Ecken wie das vorhin beschriebene gemischtlinige hat, so ist

$$T = \frac{1}{2}\sin\alpha\cdot xy = \frac{y^{n+1}}{2p^{n-1}}\sin\alpha,$$

und daher

$$\frac{F}{T} = \frac{2n}{n+1},$$

eine elegante Beziehung[2]), die für $n = 1$ mit einer Entdeckung des Archimedes identisch ist (*Quadratur der Parabel*, Prop. 24).

Nehmen wir jetzt $\alpha = \frac{\pi}{2}$ und nennen V das durch Rotation des vorgenannten krummlinigen Dreiecks um Ox erzeugte Volumen, so haben wir

$$V = \pi\int_0^x y^2\cdot dx = \pi\int_0^x p^{\frac{2(n-1)}{n}} x^{\frac{2}{n}}\cdot dx = \frac{n\pi}{n+2} p^{\frac{2(n-1)}{n}} x^{\frac{n+2}{n}};$$

Nun wird das Volumen U, das durch Rotation des Rechtecks mit den Seiten x und y um Ox erzeugt wird, dargestellt durch

$$U = x\cdot\pi y^2 = \pi\cdot p^{\frac{2(n-1)}{n}} x^{\frac{n-2}{n}};$$

infolgedessen ist

$$\frac{V}{U} = \frac{n}{n+2}$$

1) Wallis, *Opera omnia* I. (Oxon. 1695) S. 351—353; de l'Hopital, *Sections coniques*, S. 156. Vgl. auch den I. Abschnitt der Abhandlung von J. Sobotka, *Zur infinitesimalen Geometrie einiger Plankurven* (Prager Ber., 1898), wo auch die Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes gegeben wird.

2) Wallis, *Opera* I, S. 353.

eine Beziehung, die einen leicht in Worte zu kleidenden Satz ausdrückt[1]). Nennen wir g die Abszisse des Schwerpunktes eines Segmentes, das von dem Parabelbogen und einer Parallelen zur y-Achse begrenzt wird, so haben wir

$$g = \frac{\int_0^x xy \cdot dx}{\int_0^x y \cdot dx} = \frac{\int_0^x x\,(p^{n-1}x)^{\frac{1}{n}} \cdot dx}{\int_0^x (p^{n-1}x)^{\frac{1}{n}} \cdot dx} = \frac{\int_0^x x^{\frac{n+1}{n}} \cdot dx}{\int_0^x x^{\frac{1}{n}} \cdot dx} = x\,\frac{n+1}{2n+1},$$

welches Resultat auch für schiefe Achsen gültig ist und für $n = 2$ schon dem **Archimedes** bekannt war (s. o. a. O.).

Bezeichnen wir schließlich mit s den Kurvenbogen, so haben wir

$$ds = \frac{1}{p^{n-1}}\,dx\,\sqrt{p^{2n-2} + n^2 x^{2n-2}};$$

ds ist also durch ein binomisches Differential ausgedrückt, das durch einen endlichen Ausdruck integrierbar ist, wenn eine der Zahlen $\frac{1}{2n-2}$, $\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2}$ eine ganze ist; bezeichnet man daher mit ν eine ganze Zahl, so hat man

$$\frac{1}{2n-1} = \nu, \quad \text{oder auch} \quad \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2} = \nu;$$

schreibt man dieses so:

$$n = 1 + \frac{1}{2\nu}, \quad n = 1 + \frac{1}{2\nu - 1},$$

so sieht man, **daß, wenn $n = 1 + \frac{1}{\mu}$, wo μ eine beliebige ganze Zahl ist, die Parabel mit dem Index n rektifizierbar ist**; variiert μ, so erhält man unzählig viele Kurven, die mit dieser Eigenschaft versehen sind.

118. Betrachten wir die parametrale Parabel, welche folgender parametrischen Darstellung (vgl. Nr. **116**) fähig ist:

$$x = p\lambda^{m+n}, \quad y = p\lambda^n; \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

als allgemeine Gleichung der Tangente kann man dann folgende nehmen:

$$nx - (m+n)\,\lambda^m y + mp\lambda^{m+n} = 0;$$

die Plückerschen Koordinaten einer beliebigen Tangente sind also

$$\xi = \frac{n}{mp\lambda^{m+n}}, \quad \eta = -\frac{m+n}{mp\lambda^n};$$

---

1) Wallis, *Opera* I, S. 353.

daher ist die Tangentialgleichung der Kurve von folgender Form:

$$\eta^{m+n} = \pi^m \xi^n. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Da diese von derselben Gestalt ist wie (2), so schließen wir: **Jede Parabel erweist sich als gleich ihrer eigenen Polarreziproken in bezug auf einen passend gewählten Kreis**[1]). — Eine Parabel mit ganzzahligem Index n hat als Evolute eine rationale Kurve von der Ordnung $3(n-1)$, während die Ordnung der Evolute der allgemeineren Kurve (2) durch die größere der Zahlen $3m$ und $2m+n$ ausgedrückt wird.

Betrachten wir jetzt noch eine Parabel mit gebrochenem Index, z. B. die durch Gleichung (2) dargestellte, so hat die Normale im Punkte (x, y) die Gleichung:

$$(m+n)(X-x)\, y^{m+n-1} + np^m (Y-y)\, y^{n-1} = 0, \quad . \quad . \quad (5)$$

wo X, Y die laufenden Koordinaten sind. Ist nun umgekehrt der Punkt (X, Y) gegeben, so muß man, um die von ihm an die Kurve gezogenen Normalen zu finden, diejenigen Werte von x, y bestimmen, welche dieser Gleichung und der Gleichung (2) genügen; multiplizieren wir nun (5) mit y und berücksichtigen (2), so wird diese

$$(m+n)(X-x)\, x + n(Y-y)\, x = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5')$$

welche (5) ersetzen kann. Da diese nun einen Kegelschnitt darstellt, der durch den Anfang geht, und da der Anfang ein n-facher Punkt der betrachteten Parabel ist, so hat man die Grundlagen für folgenden Satz: **Durch jeden Punkt P der Ebene einer Parabel mit dem Index $\frac{m+n}{n}$ gehen $2m+n$ Normalen der Kurve; ihre Fußpunkte liegen auf einem Kegelschnitte, der durch den Anfang und den Punkt P selbst geht**[2]).

Jede Parabel mit ganzzahligem oder gebrochenem Index — die also durch eine der Gleichungen (1), (2) dargestellt werden kann — ist bestimmt, wenn außer den Achsen der Parameter bekannt ist. Statt diese Konstante zu geben, kann die Kurve auch dadurch bestimmt werden, daß man einen Punkt derselben gibt; sind x_0, y_0 die Koordinaten desselben, so treten an Stelle von (1) und (2) folgende Gleichungen

$$\left(\frac{y}{y_0}\right)^n = \frac{x}{x_0} \quad . \quad . \quad (1'), \qquad \left(\frac{y}{y_0}\right)^{m+n} = \left(\frac{x}{x_0}\right)^n. \quad . \quad . \quad (2')$$

Aus der ersteren kann man eine punktweise Konstruktion für alle Parabeln mit ganzzahligem Index ableiten[3]). Ist nämlich A der Punkt

---

1) G. Genocchi, in den Nouv. Ann. Mathem. XIII, 1854, S. 132—36.

2) S. Nouv. Ann. Mathem. Question 1131, vorgelegt von Painvin und gelöst in XIII. (2. Ser.) 1874.

3) Vgl. G. Peano, *Applicazioni geometriche del calcolo infinitesimale* (Torino,

(x_0, y_0) und sei $OB = y_0$, $BA = x_0$ (s. Taf. X, Fig. 72), so nehme man die Ordinate $OM = y$ beliebig an und ziehe durch M die Gerade m parallel zu Ox; man projiziere A von O aus auf m in $P_1(x_1, y)$; da nun O, A, P_1 kollinear sind, so ist

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{y}{y_0}.$$

Man projiziere nun P_1 rechtwinklig in A_1 auf die durch B zu Ox gezogene Parallele b und dann A_1 von O aus auf m in $P_2(x_2, y)$; da nun auch die Punkte O, A_1, P_2 kollinear sind, hat man ebenso

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y}{y_0}.$$

Operiert man in ähnlicher Weise mit P_2, so entstehen die Punkte A_2, $P_3(x_3, y)$ usw. schließlich A_{n-1}, $P_n(x_n, y)$ und es bestehen die Beziehungen

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{y}{y_0}, \quad \frac{x_4}{x_3} = \frac{y}{y_0}, \ldots\ldots \frac{x_{n-1}}{x_{n-2}} = \frac{y}{y_0}, \quad \frac{x_n}{x_{n=1}} = \frac{y}{y_0}.$$

Multipliziert man alle diese Gleichungen miteinander, so findet man

$$\frac{x_n}{x_0} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^n,$$

welches beweist, daß der Punkt P_n der durch Gleichung (1') dargestellten Parabel mit dem Index n angehört. Variiert man die Ordinate $OM = y$, so erhält man beliebig viele Punkte der fraglichen Kurve. Wir können noch hinzufügen: Wenn man A rechtwinklig auf m projiziert in P_0, dann P_0 von O aus auf b in A_{-1}, dann A_{-1} rechtwinklig auf m in P_{-1} usw., so erhält man die Reihe der Punkte

$$P_0(x_0, y), \quad A_{-1}(x_{-1}, y_0), \quad P_{-2}(x_{-2}, y) \ldots\ldots A_{-n}(x_{-n}, y_0), \quad P_{-n}(x_{-n}\, y)$$

und die Reihe der Gleichheiten

$$\frac{x_0}{x_{-1}} = \frac{y}{y_0}, \quad \frac{x_{-1}}{x_{-2}} = \frac{y}{y_0}, \ldots\ldots, \quad \frac{x_{-n-1}}{x_{-n}} = \frac{y}{y_0},$$

woraus folgt

$$\frac{x_0}{x_{-n}} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^n, \quad \text{oder auch} \quad \left(\frac{x_{-n}}{x_0}\right) = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-n};$$

infolgedessen gehört der Punkt P_{-n} der Parabel mit dem Index $-n$ an, die durch die Gleichung $\frac{x}{x_0} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{-n}$ dargestellt wird.

Die oben angeführte Methode, alle Parabeln mit ganzzahligem Index zu konstruieren, führt uns zur Punktkonstruktion aller para-

---

1887) S. 74. — Die im Texte angegebene Konstruktion setzt rechtwinklige Koordinaten voraus; mit leicht ersichtlichen Modifikationen kann sie jedoch dem Falle der schiefen Achsen angepaßt werden.

bolischen Kurven[1]), d. h. aller derjenigen Kurven, die durch eine Gleichung von folgendem Typus dargestellt werden können

$$y = \sum_{r=1}^{r=n} \frac{x^r}{p_r^{r-1}}.$$

Konstruieren wir nämlich alle die r Parabeln, die durch die Gleichungen

$$x^r = p_r^{r-1} y_r$$

dargestellt sind und addieren die Ordinaten, so hat man

$$y = \sum_{r=1}^{r=n} y_r.$$

Derartige Kurven haben eine gewisse Bedeutung für die Analysis: In erster Linie, weil das Problem der Auflösung einer algebraischen Gleichung äquivalent ist mit dem der Auffindung der Schnitte einer parabolischen Kurve mit der zugehörigen Abszissenachse; man hat zu dem Zwecke auch Instrumente erfunden, mittelst derer man sie in kontinuierlichem Zuge zeichnen kann[2]). In zweiter Linie, weil sie bei der näherungsweisen Berechnung der ebenen Flächen auftreten; infolgedessen hat die Flächenbestimmung der parabolischen Kurven die Veranlassung auch zu neueren wichtigen Untersuchungen gegeben[3]). Hervorragende geometrische Eigenschaften treten bei diesen Kurven nicht auf[4]), wir erachten es daher für angebracht, uns nicht weiter mit diesen zu befassen, und wollen vielmehr dieses Kapitel mit der Aufzählung der bemerkenswertesten speziellen Parabeln schließen.

119. I. Die berühmteste ist unzweifelhaft die erste der rektifizierbaren Parabeln, auf welche wir am Schlusse von Nr. **117** stießen; sie hat als Index $n = \frac{3}{2}$ und als Gleichung $y^3 = px^2$. Gewöhnlich wird sie semikubische Parabel genannt nach einem Vorschlage von

1) *Neutonis Opuscula mathematica philosophica et philologica* I. (Lausanne et Genevae, 1744) S. 271—282, woselbst das Problem gelöst wird: „invenire lineam curvam generis parabolici, quae per data quotcunque puncta transibit." Vgl. auch Magnus, *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie* (Berlin, 1883) S. 260.

2) Segner, *Methodus simplex et universalis omnes omnium aequationum radices detegendi* (Nov. Comment. Petrop. VII, 1761); Rowning, *A machine for finding the roots of equations* (Phil. Trans., London 1770).

3) Schoute, *L'aire des paraboles d'ordre supérieur* (C. R. CXXII, 1896); Kortweg, *Sur le theorème enoncé par M. P. H. Schoute* (Das.); Manoury, *Sur la note de M. Schoute* (Das.).

4) Die hervorragendste ist etwa die folgende: die Parabeln höherer Ordnung sind die einzigen algebraischen Kurven deren vorletzte Polarkurven in bezug auf jeden Punkt der Ebene apollonische Parabeln sind; m. s. E. Kasner, *Determination of the algebraic curves whose polar conics are parabolas* (Am. Journ., Mathem., XXVI, 1904).

J. Wallis; sie ist die älteste rektifizierbare algebraische Kurve[1]). Daß sie rektifizierbar sei, wurde schon von dem Franzosen Fermat bemerkt[2]), von dem Engländer Neil[3]) und von dem Holländer Heuraet[4]); daher rühren auch die verschiedenen Namen, mit welcher diese Kurve bezeichnet wird[5]).

Die semikubische Parabel erfreut sich auch deswegen großer Berühmtheit, weil sie folgendes mechanische Problem löst, welches Leibniz im Verlaufe seines berühmten Streites mit den Cartesianern aufstellte: „Eine Linie zu finden, so beschaffen, daß ein sie durchlaufender Punkt sich gleichförmig bewegt, indem er in gleichen Zeiten sich um gleiche Strecken der Horizontalen nähert.“ Dieses Problem wurde alsbald (8. Oktober 1687) von Huygens gelöst[6]), dessen Lösung von Leibniz[7]) kommentiert wurde; später haben sich sowohl Jakob[8]) als auch Johann Bernoulli[9]) mit demselben beschäftigt, während Maupertius[10]) es in bemerkenswerter Weise verallgemeinerte. Die semikubische Parabel führt auch, als lösende des angeführten Problems der Mechanik betrachtet, den Namen isochrone Kurve oder auch Curva decensus aequabilis. — Auch bei der Theorie der Evoluten findet sich diese Kurve; wenn man nämlich den Ort der Krümmungsmittelpunkte der Parabel $y^2 = 2px$ sucht, so erhält man die Kurve $(x-p)^3 = \frac{27}{8}py^2$, die offenbar eine semikubische Parabel ist; dieser Umstand wurde von Huygens benutzt, um die Rektifizierbarkeit dieser Kurve zu beweisen[11]). — Alle Punkte der

---

1) S. A. Christensen, *The first determination of the length of a curve* (Bibl. math. 1887).

2) S. d. Abh. *De linearum curvarum cum lineis rectis comparatione* (Œuvres de Fermat, I, S. 211—253, und III, S. 181—215).

3) Die Entdeckung Neils wurde 1659 von Wallis veröffentlicht (vgl. Wallis, *Opera math.* I, S. 550—54; außerdem einen Brief von ihm an Huygens unter dem 9. Juni 1673 geschrieben und veröffentlicht im VII. Bd. der *Œuvres de Huygens* S. 305—309).

4) S. die von Schooten im J. 1659 besorgte Ausgabe der *Geometria* von Descartes.

5) „Sic Rectificata Curva Nelii, et Curva Heuratii, et Curva demum Fermatii eadem est cum mea Paraboloide Semi-cubicali“ schrieb Wallis an Leibniz unterm 6. April 1697 (*Leibniz* ed. Gerhardt, IV, S. 18).

6) *Nouvelles de la République des Lettres,* Oktober 1687 (*Leibniz* ed. Gerhardt IV, S. 237).

7) *Leibniz* ed. Gerhardt, V, S. 234—243.

8) *De inventione lineae descensus a corpore gravi percurrendae uniformiter* (Acta eruditorum 1690; *Jacobi Bernoulli opera*, I, S. 421—426).

9) S. die XXXIII und XXXIV der *Lectiones mathematicae* (*Joh. Bernoulli opera omnia* III, S. 482—486).

10) *La courbe de descensus aequabilis dans un milieu résistant comme une puissance quelconque* (Mém. de Paris 1730).

11) *Opera varia* (Leiden, 1724), S. 100.

Geraden $3y + p = 0$ haben Kreise als erste Polarkurven in bezug auf die Parabel $y^3 = px^2$. — Man kennt auch eine Vorrichtung, sie auf mechanischem Wege zu zeichnen[1]).

II. In einem Manuskripte von Leibniz, datiert vom 11. Nov. 1675, betitelt *Methodi tangentium inversae exempla*, steht folgende Aufgabe: „Die Kurve zu finden, bei welcher der Achsenabschnitt zwischen der Normale und Ordinate umgekehrt proportional der Ordinate selbst ist“[2]); diese führt auf folgende Differentialgleichung: $y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{m^2}{y}$; schreibt man diese nun als $y^2 \cdot dy = m^2 \cdot dx$, so integriert man sie leicht und bekommt: $y^3 = 3m^2(x - x_0)$; demnach ist die Kurve nichts anderes als die kubische Parabel. Sie ist nicht rektifizierbar (vgl. den Schluß von Nr. **117**), jedoch hat Johann Bernoulli entdeckt, daß es auf ihr Paare von Bogen gibt, deren Differenz rektifizierbar ist[3]); wir werden dies in kurzem (S. 314—316) als die Folge eines allgemeineren Satzes nachweisen. Die Brennpunkte der kubischen (sowie der semikubischen) Parabel sind von A. Fuchs[4]) bestimmt worden. Die Kurve kann auch mechanisch gezeichnet werden[5]). Schließlich ist zu bemerken, daß Monge die fragliche Kurve benutzte, um jede Gleichung dritten Grades aufzulösen[6]).

III. Der biquadratischen Parabel $p^3 y = x^4$ begegnete E. Torricelli 1644 als der Erzeugenden der Oberfläche einer Flüssigkeit, die sich in einem rotierenden Gefäße befindet, während sie aus diesem gleichmäßig ausfließt, indem das Gefäß unten eine kleine Öffnung hat.

IV. In einem Briefe an Huygens vom 29. Okt. 1637[7]) lenkt F. Schooten die Aufmerksamkeit des großen holländischen Geometers auf eine Kurve, die durch die Gleichung

$$x + y = \sqrt[4]{ax^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

dargestellt wird, und Huygens seinerseits teilte sie in einem folgen-

1) Matthiesen, *Über die mechanische Construction einiger Curven, welche sich zur Auflösung des Problemes von der Duplication des Würfels verwenden lassen* (Arch. Math. Phys. XLVIII, 1868).

2) Gerhardt, *Geschichte der Mathematik in Deutschland* (München, 1877) S. 147.

3) S. die wichtige Abhandlung *Theorema universale rectificationi linearum curvarum inserviens* (Acta erudit. October 1698; *Joh. Bernoulli opera* I, S. 249—253). Daselbst wird die kubische Parabel „parabola cubica primaria“ und die semikubische „parabola cubicalis secunda“ genannt.

4) *Untersuchungen der Brennpunktseigenschaften der höheren algebraischen Kurven, insbesondere der dritten und vierten Ordnung* (Diss. Marburg, 1887).

5) Foucaut, *Construction mécanique de la parabole cubique* (Nouv. Ann. Math. XVII, 1858).

6) *Solution graphique de l'équation du troisième degré* (Corr. sur l'École polyt., III, 1814—16).

7) *Œuvres de Huygens*, II, S. 76.

den Briefe vom 2. November[1]) R. de Sluse mit. Keiner der angeführten Geometer erkannte, daß die in Rede stehende Kurve eine Parabel mit dem Index $\frac{3}{4}$ sei, bezogen auf zwei Achsen, die miteinander den Winkel $\frac{\pi}{4}$ bilden; auch die Gestalt der Kurve blieb ihnen unbekannt: Huygens betrachtete nämlich nicht nur den Kurvenbogen OFG, der innerhalb des Winkels der positiven Achsenrichtungen liegt, sondern fügte willkürlich einen Bogen $OF'G$ hinzu, der zum ersten symmetrisch in bezug auf die x-Achse liegt, und erhielt infolgedessen, daß der Schwerpunkt des von der Kurve begrenzten ebenen Teiles auf dieser Achse liegen müßte[2]). Der genannte Bogen OFG geht durch den Punkt G der x-Achse, der vom Anfangspunkte den Abstand a hat und durch den Punkt F, dessen Koordinaten $x = \frac{81}{256} a$ und $y = \frac{27}{256} a$ sind, und der ein Kulminationspunkt der Kurve ist. Diese erstreckt sich dann jenseits von O und G ins Unendliche vermittels zweier Züge, die innerhalb des Winkels gelegen sind, der von der positiven x-Achse und der negativen y-Achse gebildet wird. Die durch den Bogen OFG und die x-Achse begrenzte Fläche wird gegeben durch

$$\int_{x=0}^{x=a} y \cdot dx = \int_{x=0}^{x=a} \left(-x + \sqrt[4]{ax^3}\right) dx = \frac{a^2}{14},$$

infolgedessen, und weil er nun den Bogen $OF'G$ hinzugefügt hatte, glaubte Huygens sich zu der Annahme berechtigt, daß die Fläche der Kurve durch $\frac{a^2}{7}$ ausgedrückt würde. — Die irrige Ansicht über die Gestalt der biquadratisch-kubischen Parabel von Schooten hatte also einen unglücklichen Einfluß auf die Lösung einiger metrischen Fragen, welche diese Kurve betreffen, jedoch keinen Einfluß auf die Bestimmung der Tangente; Huygens entdeckte nämlich eine Konstruktion derselben, die nicht nur bemerkenswert ist wegen ihrer Eleganz und Einfachheit, sondern auch, weil sie aus der Untersuchung des Punktes hervorgeht, in welchem die Tangente, nicht die Koordinatachsen, sondern eine besonders gewählte Gerade schneidet[3]). Betrachten wir nämlich die Tangente an die Kurve (6) im Punkte (x, y), so ist, wenn X, Y die laufenden Koordinaten derselben sind, ihre Gleichung

$$\frac{Y + x - \sqrt[4]{ax^3}}{X - x} = -1 + \frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{a}{x}};$$

1) Das. S. 80. Vgl. auch einen Brief von Hudde an Schooten v. 1. Dez. 1652 (Das. II, S. 97).

2) Brief an R. de Sluse vom 7. Dez. 1657 (*Œuvres de Huygens*, II, S. 92).

3) *Œuvres de Huygens* II, S. 90 u. 93.

setzen wir nun $X = -\frac{x}{3}$, so findet man $Y = +\frac{x}{3}$; dies zeigt, **daß die Tangente an die biquadratisch-kubische Parabel (6) im Punkte mit der Abszisse x durch den Punkt mit den Koordinaten $\left(-\frac{x}{3}, \frac{x}{3}\right)$ geht**; es ist demnach nichts leichter, als diese zu konstruieren. — Wir können noch bemerken, daß die Kurve folgender parametrischer Darstellung fähig ist:

$$x = \frac{a}{(1+\lambda)^4}, \quad y = \frac{a\lambda}{(1+\lambda)^4}.$$

V. Unzählige weitere bemerkenswerte Parabeln wurden vom Grafen von Fagnano entdeckt. Veranlaßt durch einen auf die kubische Parabel bezüglichen und von Joh. Bernoulli (s. oben) entdeckten Satz, stellte er im Jahre 1714 (*Giornale de' letterati d'Italia*, XIX, S. 438) folgende Aufgabe: „Gegeben sei eine biquadratische Parabel erster Art (*primaria*), welche die Gleichung $x^4 = y$ hat, und ferner sei ein Teil derselben gegeben; verlangt wird, einen anderen Teil derselben Kurve anzugeben, so daß die Differenz der angegebenen Teile rektifizierbar ist.“ Da niemand auf die gestellte Frage antwortete, so veröffentlichte Fagnano selbst die Lösung in der wichtigen Schrift: *Nuovo metodo per rettificare la differenza di archi (uno dei quali è dato) in infinite specie di parabole irrettificabili*[1]), aus welcher wir hier wenigstens die Grundzüge wiedergeben müssen.

Man betrachte die Parabel mit der Gleichung:

$$y = \frac{2}{m+2} \frac{x^{\frac{m+2}{2}}}{a^{\frac{m}{2}}}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

wo m eine rationale Zahl, und a eine gegebene Konstante ist. Bezeichnen wir mit t die Länge der Tangente im Punkte (x, y) vom Berührungspunkte bis zum Schnitt mit der x-Achse, und mit s die Länge des Kurvenbogens, so ist

$$t = \frac{y}{y'}\sqrt{1+y'^2} = \frac{2x}{m+2}\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m},$$

$$s = \int dx\sqrt{1+y'^2} = \int\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}\cdot dx;$$

durch teilweise Integration ergibt sich daraus

$$\frac{m+2}{2}s = x\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m} + \frac{m}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}}$$

1) *Giornale de' letterati d'Italia*, XXII, 1715; oder auch *Produzioni matematiche*, II. (Pesaro 1750) S. 317—330.

oder auch
$$\frac{m+2}{m}(s-t)=\int\frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{a}\right)^m}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Nehmen wir das Integral auf der rechten Seite zwischen zwei bestimmten Grenzen, so ist seine Bedeutung folgende: Abgesehen von dem konstanten Faktor $\frac{m+2}{m}$ ist dieses gleich einem Bogen der Parabel (7), vermindert um die Differenz zwischen den Längen der Tangenten in seinen Endpunkten, wenn man, wie gewöhnlich, unter „Länge der Tangente" die Strecke zwischen dem Berührungspunkte und dem Schnitte mit der x-Achse versteht. Nehmen wir daher auf der Parabel vier Punkte P_0, P_1, Q_0, Q_1, welche den Abszissen p_0, p_1, q_0, q_1 entsprechen und ziehen die Tangenten P_0R_0, P_1R_1, Q_0S_0, Q_1S_1, so können wir aus (8) die beiden folgenden Gleichungen ableiten:

$$\text{Bogen } P_0P_1-(P_1R_1-P_0R_0)=\frac{m}{m+2}\int_{p_0}^{p_1}\frac{dp}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{a}\right)^m}};$$

$$\text{Bogen } Q_0Q_1-(Q_1S_1-Q_0S_0)=\frac{m}{m+2}\int_{q_0}^{q_1}\frac{dp}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{a}\right)^m}}.$$

Kann man nun zwischen den p und q eine Beziehung aufstellen, derart, daß das Integral in der ersten dieser Gleichungen identisch wird mit dem in der zweiten, so hat man

$$\text{Bogen } P_0P_1-(P_1R_1-P_0R_0)=\text{Bogen } Q_0Q_1-(Q_1S_1-Q_0S_0),$$

und die Bogen P_0P_1 und Q_0Q_1 haben dann eine rektifizierbare Differenz. Die Frage ist demnach auf die Integration folgender Differentialgleichung zurückgeführt:

$$\frac{dp}{\sqrt{1+\left(\frac{p}{a}\right)^m}}+\frac{dq}{\sqrt{1+\left(\frac{q}{a}\right)^m}}=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

worin die Wurzeln beliebige Vorzeichen haben. Fagnano hat die Integration in den Fällen $m=4, 3, 6$ ausgeführt, indem er bzw. die Parabeln erhielt

$$y=\frac{x^3}{3a^2}, \quad y=\frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5a^{\frac{3}{2}}}, \quad y=\frac{x^4}{4a^3}.$$

Das Auftreten der ersteren beweist den S. 312 angeführten Satz von Joh. Bernoulli, während die dritte den Schlüssel zur Lösung des von Fagnano gestellten Problems liefert; die zweite ist eine Kurve fünfter Ordnung, die Bogen mit rektifizierbaren Differenzen enthält. Alle

entsprechenden Kurven wird man erst dann kennen, wenn man alle die Fälle weiß, in welchen die Differentialgleichung (9) integrierbar ist[1]).

Drittes Kapitel.

Die Hyperbeln beliebiger Ordnung.

120. Wie man durch Verallgemeinerung der kanonischen Gleichung $y^2 = px$ der Parabel zum Begriffe der Parabeln höherer Ordnung kommt, so gelangt man durch Betrachtung der Gleichung $xy = a^2$ einer auf die Asymptoten bezogenen Hyperbel zu den Kurven, die durch eine Gleichung von folgendem Typus dargestellt werden:

$$x^n y^p = a^{n+p}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo n, p positive ganze Zahlen sind. Sie heißen Hyperboloiden oder Hyperbeln höherer Ordnung[2]), rechtwinklige oder schiefwinklige, je nachdem die Achsen senkrecht oder schief zueinander sind[3]), monosinguläre, wenn $p = 1$, bisinguläre, wenn $p = 2$ ist[4]). — Schreiben wir die Gleichung in der Form

$$y^{-\frac{p}{n}} = a^{-\frac{p}{n}-1} \cdot x,$$

so zeigt sich deutlich die Analogie mit der Gleichung (1) in Nr. **116**, und demnach kann man eine Hyperbel von der Ordnung $n + p$ als Parabel mit dem Index $-\frac{p}{n}$ betrachten. Aber auch, wenn wir die

---

1) Den obigen Ausführungen fügen wir noch hinzu, daß in einigen neueren Werken (Reuschle, *Praxis der Kurvendiskussion* I, Stuttgart 1886; Haas, *Kleyers Lehrbuch der Differentialrechnung*, Stuttgart 1894) für einige Parabeln spezielle Namen eingeführt sind, die mit Rücksicht auf ihre Gestalt gewählt wurden; es sind folgende: Wendeparabel ($p^2y = x^3$), Flachparabel ($p^3y = x^4$), Spitzparabel ($py^3 = x^4$), Wendespitzparabel ($y^5 = p^2x^3$) und Wendeflachparabel ($p^4y = x^5$).

2) Leibniz nannte sie gelegentlich Hyperboloeides (*Leibniz* ed. Gerhardt, V, Halle 1858, S. 90). Andere, wie der Marquis de l'Hôpital (*Analyse des infiniment petits*, 2. Aufl., Paris 1705, S. 14), Caraccioli (*De lineis curvis liber*, Pisis 1740, S. 37) und Maclaurin (*Traité d'Algèbre*, Paris 1753, S. 183) nannten Hyperbeln die Kurven $Ay^{m+n} = B(a+x)^m x^n$, von denen das folgende Kapitel handeln wird (s. auch *Encyclopédie méthodique* II, Paris 1875, S. 33; Montferrier, *Dictionnaire des Sciences mathématiques* II, S. 102, und Hoffmann, *Mathematisches Wörterbuch* III, Berlin 1861, S. 276).

3) Zu den Hyperbeln gehören auch die Kurven $y = x^{-1{,}41}$, $y = x^{-\frac{9}{8}}$, denen man in der mathematischen Physik unter dem durch Rankine vorgeschlagenen Namen der adiabatischen Diagrammkurven oder kurz Adiabaten begegnet (Holzmüller, *Die Ingenieur-Mathematik*, I. Teil, Leipzig 1897, S. 136), ebenso die Newtonsche Gravitationskurve mit der Gleichung $x = py^{-2}$ (daselbst, II. Teil, Leipzig 1898, S. 15ff.).

4) Reuschle, das o. a. Werk, S. 54—55.

Gleichung (1) dieser Nr. in ihrer ursprünglichen Form beibehalten, erkennt man die Analogie mit Gleichung (2) in Nr. **116**, eine Analogie, die August Comte veranlaßte, aus den Parabeln und Hyperbeln eine einzige Klasse zu bilden, deren Elemente er binomische Kurven (courbes binômes) nannte[1]).

Aus Gleichung (1) geht hervor, daß die entsprechende Kurve im Unendlichen von Ox einen p-fachen und im Unendlichen von Oy einen n-fachen Punkt hat; sie kann daher durch zwei Büschel paralleler Strahlen, zwischen denen eine Korrespondenz (n, p) besteht, erzeugt werden. Im Endlichen besitzt sie keinen vielfachen Punkt; sie ist immer rational und folgender parametrischen Darstellung fähig:

$$x = a\lambda^p, \quad y = \frac{a}{\lambda^n}. \quad \dots\dots\dots \quad (2)$$

Als Tangentialgleichung der Kurve findet man folgende

$$\xi^n \eta^p = \frac{(-1)^{n+p} \cdot n^n \cdot p^p}{[(n+p)a]^{n+p}};$$

infolgedessen ist die Hyperbel zu sich selbst reziprok, und kann dahin gebracht werden, mit ihrer eigenen Polarreziproken in bezug auf einen passend gewählten Kreis zusammenzufallen[2]). Es ist leicht zu beweisen, daß die Evolute der Kurve (1) von der Ordnung $3(n+p)$ ist, und daß (vgl. S. 308) durch jeden Punkt P der Ebene $2(n+p)$ Normalen gehen, deren Fußpunkte auf einem Kegelschnitte liegen, welcher durch P und den Anfang geht.

Die zu Anfang von Nr. **117** gemachte Rechnung beweist, **daß bei der durch Gleichung (1) dargestellten Hyperbel das Verhältnis der Subtangente zur Abszisse durch $\frac{n+p}{n}$ ausgedrückt wird.** Daraus ergibt sich eine sehr einfache Art die Tangente zu konstruieren[3]). Läßt man in den Gleichung (1) den Parameter a variieren, so erhält man ∞^1 Hyperbeln; und es ist leicht zu beweisen (s. S. 308), daß **der Ort der Fußpunkte der von einem Punkte auf sie gefällten Normalen eine (gewöhnliche) Hyperbel ist.**[4]) Wir überlassen es dem Leser, die in Nr. **117** ausgeführte Flächenberechnung der Parabeln auf die der Hyperbeln anzuwenden, und bemerken nur noch, daß die Quadratur der Hyperbeln höherer Ordnung sich in einem Briefe von Fermat an Digby vom 20. April 1657 findet, der auch den Hauptinhalt anderer Briefe, von Fermat an Torricelli gegen Ende des Jahres 1646 gerichtet,

---

1) *Traité élémentaire de géometrie analytique* (Paris, 1843) S. 239.

2) A. Genocchi in Nouv. Ann. Math. XIII, 1854, S. 132—36.

3) Vgl. de l'Hopital, *Sections coniques* S. 157 und die auf S. 306 zitierte Abh. von Sobotka.

4) De l'Hopital a. a. O. S. 264.

wiedergibt[1]); die Methode, mittels derer der große französische Geometer jenes wichtige Resultat erhielt, erfährt man aus der schon erwähnten Arbeit *De aequationum localium transmutatione et emendatione*[2]). Mit derselben Sache beschäftigte sich auch Wallis, wobei er auf offenbare Widersprüche stieß, die zu beseitigen Varignon[3]) sowie der Graf von Fagnano[4]) mit Erfolg sich bemüht haben.

Setzen wir die Achsen als rechtwinklig voraus, so ist das durch Rotation um die x-Achse des von einem Hyperbelbogen, seiner Projektion auf diese Achse und den zugehörigen Ordinaten begrenzten Vierseits erzeugte Volumen gegeben durch:

$$\pi \int_{x=x_0}^{x=X} y^2 \cdot dx = \pi \int_{x=x_0}^{x=X} a^{2\frac{n+p}{n}} x^{-\frac{2n}{p}} \cdot dx = \frac{\pi p a^{\frac{2(n+p)}{n}}}{p-2n} \left(X^{\frac{p-2n}{p}} - x_0^{\frac{p-2n}{p}} \right).$$

Im speziellen Falle der apollonischen Hyperbel ist $p = n = 1$, daher wird jener Wert $\pi a^4 \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{X} \right)$; setzen wir $X = \infty$, so finden wir $\frac{\pi a^4}{x_0}$, einen endlichen Wert, welches auch die Anfangsabszisse x_0 sei. Es ist dies eine bemerkenswerte Tatsache, die E. Torricelli entdeckt hat[5]). Sie ist einbegriffen in einem anderen allgemeinen Satz, der für alle Hyperbeln gilt, und der von Roberval entdeckt ist[6]). Setzt man nämlich $p - 2n < 0$ voraus, so erhält man aus dem vorigen allgemeinen Ausdruck für $X = \infty$

$$V = \frac{\pi p a^{\frac{2(n+p)}{n}}}{2n-p} \frac{1}{x_0^{\frac{2n-p}{p}}},$$

einen endlichen Wert für alle endlichen Werte von x_0. Wäre hingegen $n - 2p < 0$, so würde das durch Rotation der entsprechenden Hyperbel entstehende Volumen unendlich sein. Im Grenzfalle $p = 2n$ ist das durch Rotation der Hyperbel $xy^2 = a^3$ um Oy erzeugte Volumen

---

1) *Œuvres de Fermat*, II, S. 338. Vgl. auch einen Brief von Fermat an Digby (das. S. 377), wo auch die von Wallis aufgestellten Prioritätsrechte auf Grund seiner *Arithmetica infinitorum* bezeugt werden.

2) *Œuvres de Fermat* I, S. 255 ff.; III, S. 216 ff.

3) *Réflexions sur les espaces plus qu'infinis de M. Wallis* (Mém. de Paris, Année MDCCVI).

4) *Riflessioni in occasione della quadratura degli spazi iperbolici* (Produzioni matematiche II, Pesaro 1750).

5) Torricelli teilte sie im J. 1643 dem P. Niceron mit und im folgenden Jahre dem Publikum in seinen *Opera geometrica*.

6) *Epistola Aegidii Personerii de Roberval ad Evangelistam Torricellium* Mém. de Paris, VI, 1666—1699).

endlich, während die Hyperbel $x^2y = a^3$ nur dann ein endliches Volumen erzeugt, wenn sie um Ox rotiert[1]).

Das Bogendifferential der Hyperbel (1) wird gegeben durch

$$ds = \frac{1}{p} dx \sqrt{p^2 + n^2 a^{\frac{2(n+p)}{p}} x^{-\frac{2(n+p)}{p}}};$$

wird also ausgedrückt durch ein binomisches Differential; da nun die drei Zahlen $\frac{1}{2}$, $\frac{n}{2(n+p)}$, $-\frac{p}{2(n+p)}$ alle immer gebrochene Zahlen sind, so ist die Integration nicht und niemals in geschlossener Form ausführbar; **es existiert daher keine rektifizierbare Hyperbel.**

121. Die Hyperbel (1) ist vollständig bestimmt, wenn man außer den ganzen Zahlen n und p die Konstante a kennt; statt a zu geben, kann man auch einen Punkt x_0, y_0 angeben, durch den sie geht; alsdann kann man (1) schreiben

$$\left(\frac{x_0}{x}\right)^n = \left(\frac{y}{y_0}\right)^p.$$

Wenn im besonderen $n = 1$, so haben wir eine Kurve, der wir schon in Nr. **118** als Parabel negativer Ordnung begegneten, und deren Punktkonstruktion wir kennen lernten. In dem noch spezielleren Falle, daß $n = 1$, $p = 2k$, und der Winkel der Achsen ein rechter ist, kann die entsprechende Kurve punktweise durch ein Verfahren konstruiert werden, das Vincenz Viviani[2]) für $k = 1$ anwandte, d. h. zur Konstruktion der Kurve $xy^2 = a^3$, die von ihm iperbola mesolabica genannt wurde wegen der Anwendung, die er von ihr auf die Lösung des Delischen Problems machte. Dieses Verfahren besteht in Folgendem: Wir betrachten einen Halbkreis mit dem Durchmesser $AC = a$ (Taf. X, Fig. 73) und ziehen durch A eine beliebige Gerade, welche die Peripherie des Halbkreises in B und die ihn in C berührende Gerade in D schneidet. Es sei nun BG senkrecht zu AC, GB_1 senkrecht zu AD, B_1G_1 senkrecht zu AC, G_1B_2 senkrecht zu AD und so weiter. Endlich tragen wir auf der letzten so erhaltenen Geraden $B_{k-1}G_{k-1}$ die Strecke $GM = AD$ ab: der Ort des Punktes M ist die Hyperbel $xy^{2k} = a^{2k+1}$. Aus der angeführten Konstruktion ergeben sich nämlich, wenn wir den Winkel DAC φ nennen, und x, y die Koordinaten des Punktes M sind, die folgenden Relationen:

---

1) Die Notwendigkeit verschiedene Fälle derselben zu unterscheiden, auf die man gemäß der Größe der Zahlen n und p trifft, scheint zuerst von G. Fontana bemerkt zu sein im Art. III der *Ricerche analitiche sopra diversi soggetti* betitelten Abhandlung (Mem. Soc. Ital. Scienze III, 1786); daselbst werden die fraglichen Kurven iperboloidi genannt.

2) *Quinto libro di Euclide o Scienza universale delle proporzioni spiegata colla dottrina del Galileo* (Firenze, 1647) S. 278—79.

$$y = AD = \frac{a}{\cos\varphi}$$

$$AB = a\cos\varphi, \qquad AG = a\cos^2\varphi,$$
$$AB_1 = a\cos^3\varphi, \qquad AG_1 = a\cos^4\varphi,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$AB_{k-1} = a\cos^{2k-1}\varphi, \qquad AG_{k-1} = x = a\cos^{2k}\varphi.$$

Nach Elimination von φ aus der ersten und der letzten Gleichung ergibt sich

$$xy^{2k} = a^{2k+1},$$

womit die Behauptung bewiesen ist. — Nebenher erkennt man aus den angeführten Relationen, daß wenn man eine Kurve konstruiert derart, daß die Koordinaten x, y eines ihrer erzeugenden Punkte P gleich AB_{k-1} und AD sind, man hat

$$x = a\cos^{2k-1}\varphi, \qquad y = \frac{a}{\cos\varphi},$$

woraus durch Elimination von φ sich ergibt

$$xy^{2k-1} = a^{2k};$$

demnach ist der Ort der Punkte P eine Hyperbel gerader Ordnung.

Wir beschließen dieses Kapitel mit der Bemerkung, daß die Hyperbeln für $p = 1$ Spezialfälle der hyperbolischen Kurven mit der Gleichung

$$y = \sum_r \frac{a_r}{x^r}$$

sind, und daß die hyperbolischen wie die parabolischen Kurven (Nr. **118**) besondere Fälle von den Kurven sind, die durch eine Gleichung von folgendem Typus dargestellt werden

$$y = \frac{p_0 x^m + p_1 x^{m-1} + \cdots\cdots + p_m}{q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \cdots\cdots + q_n},$$

von denen Maclaurin wichtige Anwendungen machte[1]). Er bemerkte auch, daß, wenn $n > m$, sie die x-Achse zur Asymptote haben, wovon man sich unschwer überzeugen kann; wenn dann $n > m + 1$, und man schreibt

$$x^{n-m}y = \frac{p_0 x^n + p_1 x^{n-1} + \cdots\cdot p_m x^{n-m}}{q_0 x^n + q_1 x^{n-1} + \cdots\cdot q_n} = \frac{p_0 + \frac{p_1}{x} + \cdots + \frac{p_m}{x^m}}{q_0 + \frac{q_1}{x} + \cdots + \frac{q_n}{x^n}},$$

so sieht man, daß für alle positiven Werte von x die Größe $x^{n-m}y$ kleiner ist als eine bestimmte endliche Konstante; infolgedessen ist

1) *Treatise on fluxions* (Edinburgh, 1742) § 327; *Traité des fluxions* (trad. Pézénas) I, S. 209.

nach einem bekannten Satze[1]) $\int_{x_0}^{\infty} y \cdot dx$ eine endliche Größe, daher ist die zwischen einer Ordinate, der Kurve, und der Abszissenachse belegene Fläche von endlichem Werte. Es ist dieses eine weitere Eigentümlichkeit der fraglichen Kurven, die Maclaurin aufgefunden hat.

Viertes Kapitel.

Die Perlkurven.

122. Ein zentraler Kegelschnitt, der durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \varepsilon \frac{y^2}{b^2} = 1$$

gegeben ist (wo $\varepsilon = +1$, wenn es sich um eine Ellipse, $\varepsilon = -1$, wenn es sich um eine Hyperbel handelt), kann auch durch folgende Gleichung dargestellt werden, wenn man als Anfang einen Scheitel der Kurve nimmt:

$$x(2a \pm x) = \mp \varepsilon \frac{a^2}{b^2} y^2.$$

Wenden wir auf diese den Verallgemeinerungsprozeß an, der uns zu den höheren Parabeln und Hyperbeln führte, so kommt man auf Kurven, die folgende allgemeine Gleichung haben:

$$x^s (a \pm x)^r = \frac{a^{r+s}}{b^p} y^p, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wo a und b zwei gegebene Strecken sind und p, r, s drei positive ganze Zahlen, die alle keinen gemeinsamen Faktor haben. Diese heißen Perlkurven; die Parabeln sind spezielle Perlkurven, wie man sieht, wenn man in Gleichung (1) $r = 0$ oder $s = 0$ setzt. Andere speziellere Kurven erhält man, indem man $r = 1$, $s = n$, $p = n$, $b = a$ setzt; dann wird Gleichung (1) zu

$$y^n = \frac{(a \pm x)x^n}{a} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

und ist die allgemeine Gleichung der sogenannten Perlkurven von der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung; wenn schließlich wieder $b = a$, aber $p = r + s$, und man das $-$ Zeichen nimmt, so erhält man die Kurven

$$y^{r+s} = (a - x)^r x^s,$$

die man Kreise höherer Ordnung genannt hat[2]).

---

1) S. z. B. Serret-Harnack-Scheffers II (Leipzig, 1907), S. 120.

2) Caracciolι, *De lineis curvis liber* (Pisis, 1740) S. 51; *Encyclopédie méthodique* I. (Paris, 1784) S. 336; Montferrier, *Dictionnaire des Sciences math.* I. (Bruxelles, 1838) S. 316.

Einige spezielle Perlkurven erwähnt R. de Sluse in vier an Huygens gerichteten Briefen vom 14. Aug. 1657, 8. Jan., 19. Febr. und 12. April 1658[1]); in einem anderen Briefe von ihm an denselben (15. Juli 1659) wird das Wort „elliptoides" angewandt, um die betreffenden Kurven zu bezeichnen mit der Anmerkung „perlas vocat Detonvillius"[2]); dies veranlaßt uns auf den Briefwechsel zwischen Sluse und Pascal hinzuweisen, deren Briefe vom 6. April und 29. Juni 1658 die hier behandelten Kurven betreffen[3]). Es scheint daher, daß, wenn der Begriff derselben eine Schöpfung Sluses ist, der von uns angewendete Name von Pascal herrührt.

Aus der Gleichung (1) geht hervor, daß die durch sie dargestellte Perlkurve eine algebraische Kurve von der Ordnung gleich der größeren der beiden Zahlen $r+s$ und p ist; der Anfang ist ein Punkt von der Vielfachheit gleich der kleineren der Zahlen s und p, während der Punkt $x = \pm a$, $y = 0$ eine Vielfachheit besitzt, die durch die kleinere der Zahlen r und p ausgedrückt wird. Wenn $r + s < p$, so sind alle unendlich fernen Punkte der Kurve in dem unendlich fernen von Ox vereinigt, wenn dagegen $r + s > p$, so vereinigen sie sich im unendlich fernen von Oy; wenn endlich $p = r + s$, so hat die Kurve die $r + s$ Punkte auf der unendlich fernen Geraden derartig liegen, daß $\frac{x}{y} = \omega \frac{a}{b}$, wo ω eine $(r+s)^{\text{te}}$ Wurzel der Einheit bedeutet.

In dem oben zitierten Briefe vom 12. April 1658 behauptet Sluse, daß er imstande sei die Tangenten an alle Perlkurven zu konstruieren; aber welches die von ihm zu dem Zwecke formulierte „unica et brevis regula" gewesen, ist uns nicht bekannt. Jedenfalls ist es leicht, sich davon zu überzeugen, daß er sich wohl nicht gerühmt habe, etwas erreicht zu haben, das er nicht imstande gewesen zu leisten. Beachten wir nämlich, daß aus (1) folgt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{p}\left[\frac{s}{x} \pm \frac{r}{a \pm x}\right];$$

daher wird die Subtangente gegeben durch

$$x - y\frac{dx}{dy} = x\frac{a(s-p) \pm (r+s-p)x}{as \pm (r+s)x},$$

welcher Ausdruck sich mit Zirkel und Lineal konstruieren läßt, welches auch die ganzen Zahlen p, r, s sein mögen; die Regel von de Sluse konnte nichts anderes sein, als ein spezieller Ausdruck dieser Konstruktion.

---

1) *Œuvres de Huygens*, II, S. 46, 121, 134 u. 167.

2) Das. S. 458.

3) C. Le Paige, *Correspondance de F. R. de Sluse, publiée pour la première fois et précédée d'une introduction* (Bullettino di Bibl. e Storia etc. XVII, 1887) S. 494—98.

In demselben Briefe vom 16. April bekannte Sluse, daß er nicht wüßte die Quadratur und die Schwerpunkte aller Perlkurven zu finden; es ist leicht einzusehen, daß er hier auf eine Schwierigkeit stieß, die erst die moderne Analysis völlig aufzuklären imstande ist. Man beachte nämlich, daß die Gleichung (2) ergibt:

$$\int y \cdot dx = b\,a^{-\frac{r+s}{p}} \int x^{\frac{s}{p}} (a + x)^{\frac{r}{p}}\, dx;$$

und finden wir auf der rechten Seite ein binomisches Differential, welches nur dann in geschlossener Form integrierbar ist, wenn eine der Größen $\frac{r}{p}, \frac{s}{p}, \frac{r+s}{p}$ eine ganze Zahl ist.

Diese drei Umstände treten gleichzeitig ein, wenn $p = 1$. In diesem Falle hat man

$$\int y \cdot dx = \frac{b}{a^{r+s}} \int x^s (a \pm x)^r \cdot dx = \frac{b}{a^{r+s}} \int x^s \cdot dx \sum_{k=0}^{k=r} (\pm 1)^k \binom{r}{k} a^{r-k} x^k$$

$$= \frac{b}{a^{r+s}} \sum_{k=0}^{k=r} (\pm 1)^k \binom{r}{k} a^{r-k} \int x^{k+s} \cdot dx$$

$$= \frac{b}{a^{r+s}} \sum_{k=0}^{k=r} (\pm 1)^k \binom{r}{k} a^{r-k} \frac{x^{k+s+1}}{k+s+1}.$$

Integriert man zwischen $x = 0$ und $x = \mp a$, so findet man für die Fläche A folgenden Wert:

$$A = (\mp 1)^{s-1} ab \sum_{k=0}^{k=r} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{1}{k+s+1}; \quad . \; . \; . \quad (3)$$

im speziellen für die Kurve

$$x (a - x)^r = b^r y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

findet man

$$A = \left(\frac{a}{b}\right)^r a^2 \sum_{k=0}^{k=r} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{1}{k+2}; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Nun beachte man, daß für $x = \frac{a}{2}$ die Gl. (4) ergibt $y = \frac{a}{2^{r+1}} \left(\frac{a}{b}\right)^r$ und daß die Fläche T des Rechtecks, dessen Seiten a und dieser Wert von y sind, gegeben ist durch

$$T = \frac{a^2}{2^{r+1}} \left(\frac{a}{b}\right)^2;$$

infolgedessen ist

$$\frac{A}{T} = 2^{r+1} \sum_{k=0}^{k=r} (-1)^k \binom{r}{k} \frac{1}{k+2}, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

eine elegante Relation, die sich in einem Aufsatze befindet, der einem

Briefe an Huygens vom 31. Jan. 1659 beigefügt ist, und betitelt ist *La Quadrature des Perles de Monsieur Sluse par Cl. Mylon. En Juin 1658*[1]). Beispielsweise liefert Gleichung (6): für $r = 2$, $\frac{A}{T} = \frac{2}{3}$; für $r = 3$, $\frac{A}{T} = \frac{4}{5}$ usf.

Einer analytischen Schwierigkeit von demselben Grade, wie sie die Quadratur der Perlkurven bietet, begegnet man auch bei der Kubatur der durch Rotation derselben um die x-Achse erzeugten Körper; man bekommt nämlich

$$V = \pi \int y^2 \cdot dx = \pi b^2 a^{-2\frac{r+s}{p}} \int x^{\frac{2s}{p}} (a \pm x)^{\frac{2r}{p}} \cdot dx.$$

Die Berechnung von V hängt daher von einem binomischen Differential ab, welches in geschlossener Form nur dann integrierbar ist, wenn eine der Größen $\frac{2r}{p}$, $\frac{2s}{p}$, $\frac{2(r+s)}{p}$ eine ganze Zahl ist; dies tritt im speziellen auch hier wieder ein, wenn $p = 1$. — Ähnliche Verhältnisse wiederholen sich bei der Bestimmung der Schwerpunkte.

123. Die Perlkurven erfreuen sich nicht besonderer geometrischer Eigentümlichkeiten, sie besitzen daher vom wissenschaftlichen Standpunkte nur geringes Interesse. Jedoch die Seiten des gelehrten Briefwechsels von Huygens, die dieselben erwähnen, haben eine ziemliche, bis jetzt noch unbeachtete Bedeutung für den Historiker, der sich aus ihnen ein Bild der kartesischen Geometrie, wie sie in ihrem ersten Entwicklungsstadium gewesen ist, rekonstruieren kann; es dürfte daher gerechtfertigt sein, wenn wir an dieser Stelle dabei verweilen, einiges über die speziellen Perlkurven, die auf jenen Briefseiten betrachtet werden, anzuführen.

Es ist Sluses Brief vom 14. Aug. 1657, in welchem sich die erste Perlkurve[2]), nämlich die mit der Gleichung

$$x^2 (a - x) = b^2 y \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

findet. Daselbst wird die Bestimmung der Tangente und des Schwerpunktes vorgelegt, und die Kurve irrtümlicherweise als symmetrisch in bezug auf Ox bezeichnet, wie man es in der Figur 74 sieht; dies veranlaßte wahrscheinlich den Namen Perlkurve; eine leichte Diskussion zeigt dagegen, daß die Gestalt der Kurve durch Fig. 75 (Taf. X) wiedergegeben wird[3]). In der vom 3. Sept. 1657 datierten Antwort an

1) *Œuvres de Huygens*, II, S. 337.

2) *Œuvres de Huygens*, II, S. 47. Unabhängig von Sluse wurde die durch die Gleichung $x^3 \pm a^2 x = b^2 y$ dargestellte Kurve für Zwecke der Analysis vom Abte Caluso untersucht (*De la résolution des équations numeriques de tous les degrés*, Mem. Accad. Torino, VI, 1792—1800); er schlug vor, ihr den auf ihre Gestalt bezüglichen Namen Anacampis zu geben.

3) Die Kurve berührt die x-Achse im Anfangspunkte, sie hat den unendlich

Sluse[1]) zeichnet Huygens exakt den begrenzten Bogen OMA (Fig. 75) — in welchem auch der Wendepunkt mit der Abszisse $\frac{a}{3}$ markiert ist — aber er unterdrückt die unendlichen Zweige und fügt willkürlich den zu Ox symmetrischen Bogen hinzu. — Mit der ersten Perlkurve hat sich auch Fr. van Schooten beschäftigt[2]), indem er seine Betrachtungen auf den Bogen OMA beschränkte. Er fand, wenn man die zum Punkte mit der Abszisse x gehörende Subtangente mit d bezeichnet, daß dann $d = \frac{2x^2 - ax}{2a - 3x}$, was leicht zu verifizieren ist; als Folgesatz leitet er die Bestimmungsgleichung für die (drei) durch einen beliebigen Punkt der Ebene laufenden Tangenten an die Perlkurve ab. Der Wert für d zeigte Schooten, daß die Tangente im Punkte mit der Abszisse $\frac{a}{2}$ durch den Anfangspunkt gehe, und daß der Punkt M mit der Abszisse $\frac{2a}{3}$ ein Kulminationspunkt sei. Aus demselben Werte für d ergibt sich:

$$2x^2 + (3d - a)x - 2ad = 0,$$

welche Gleichung, wenn d gegeben ist, die Abszissen derjenigen beiden Kurvenpunkte bestimmt, deren Tangenten durch den Punkt $(d, 0)$ gehen[3]). Die Diskriminante hat nun den Wert $(a + d)(a + 9d)$, ist also immer positiv, wenn $d > 0$ ist; demnach **gehen von jedem Punkte der positiven x-Achse zwei reelle Tangenten an diese Perlkurve.** Schooten bemerkte diese Eigentümlichkeit nur für das Stück OA. — Nicht weniger bemerkenswert sind die von Schooten für die Quadratur aufgestellten Sätze. Vor allem hat er bemerkt, daß das Doppelte der Fläche $OFMAO$ gleich dem Rechteck ist, dessen Länge $OA = a$ und dessen Breite gleich $\frac{9}{8}$ der Maximal-Ordinate ist; diese beiden Flächen sind nämlich an Inhalt gleich $\frac{1}{12}\frac{a^4}{b^2}\cdot$ Ferner bemerkte er, daß, wenn man die Geraden OF, FM zieht, diese mit den zugehörigen Bögen der Perlkurve zwei gleich große Flächen begrenzen, wovon man sich durch eine Integration leicht überzeugen kann.

Am Schlusse des oben erwähnten Briefes schlägt Fr. van Schooten die Untersuchung dreier neuen Kurven vor; die erste derselben hat folgende Gleichung

---

fernen von Oy als Spitze mit der unendlich fernen Geraden als zugehöriger Tangente, sie ist demnach vom Geschlecht 0, von der Klasse 3.

1) *Œuvres de Huygens,* II, S. 49; s. a. S. 116. Dieselbe Figur findet man in der *Inventio methodi ad tangentes linearum curvarum,* einem Anhange zu einem Briefe Huygens an J. de Witt (das. IV, S. 312 ff.).

2) Brief an Huygens vom 29. Okt. 1657 in *Œuvres de H.* II, S. 73.

3) Man beachte, daß, da die x-Achse Tangente ist, durch jeden ihrer Punkte zwei andere Tangenten der Perlkurve gehen.

$$ax^2 = y^3 + 2ay^2 + a^2y;$$

setzen wir in dieser $x = -\eta$, $y = \xi - a$, so wird diese zu

$$a^2\eta = \xi^2(a - \xi); \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

demnach ist die betreffende Kurve ein Spezialfall der durch Gleichung (7) dargestellten. Dies hat Schooten nicht bemerkt — er glaubte, daß die Kurve von parabolischer Form sei[1]), während sie das in Taf. X, Fig. 76 gezeichnete Aussehen hat — auch Sluse und Huygens erkannten dies nicht[2]) und gaben zwei Konstruktionen für die Tangente derselben an, die sich auf die Untersuchung derjenigen Punkte gründeten, in denen diese Gerade die Koordinatachsen schneidet. Über die eleganten Formeln für die Quadratur dieser Kurve zu berichten sowie diese darzulegen, dazu gebricht es uns hier an Raum.

In dem o. a. Briefe vom 8. Jan. 1658 machte R. de Sluse die Bemerkung, daß die Perlkurve (8) zu einer Serie von Kurven gehöre, deren erste Elemente folgende Gleichungen haben:

$$ay - y^2 = ax, \qquad ay - y^2 = x^2, \qquad ay^2 - y^3 = a^2x, \qquad ay^2 - y^3 = ax^2,$$

und fügte hinzu, daß man auch die analoge Serie betrachten könne,

$$ay + y^2 = ax, \qquad ay + y^2 = x^2, \qquad ay^2 + y^3 = a^2x, \qquad ay^2 + y^3 = ax^2;$$

nun ist klar, daß die Kurve $ay^2 + y^3 = a^2x$ eben nur das Spiegelbild in bezug auf Ox zu der homologen in der ersten Serie ist, die von (8) nicht verschieden ist. Dies hat de Sluse nicht bemerkt und daher hat er sich damit aufgehalten, direkt einige Eigenschaften derselben aufzufinden. Wir werden seinem Beispiele nicht folgen, sondern bemerken, daß weiterhin in demselben Briefe die Rede ist von einer Perlkurve vierter Ordnung, nämlich von der durch folgende Gleichung dargestellten:

$$ay^3 - y^4 = a^2x^2. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (9)$$

Sie ist eine in bezug auf Oy symmetrische Kurve, welche Gerade Tangente im Anfangspunkte ist, der eine Spitze ist; de Sluse betrachtete nur die im Winkel der positiven Koordinatachsen gelegene Hälfte, indem er bemerkte, daß die größte Abszisse der Ordinate $\frac{3a}{4}$ entspricht; die Punkte $x = \frac{\pm a}{4}$, $y = \frac{a}{2}$ sind Wendepunkte (s. Fig. 76). Über die Fläche der halben Perlkurve bemerkt de Sluse[3]) „hoc spatium si fuerit dimensum, scias, te circulum ipsum facile metiri posse"; in der Tat beträgt diese Fläche

$$F = \int_{y=0}^{y=a} x \cdot dy = \frac{1}{a} \int y \sqrt{ay - y^2} \cdot dy = \pi \left(\frac{a}{4}\right)^2,$$

---

1) *Œuvres de Huygens* II, S. 76. 2) Das. S. 88, 89, 90 u. 93.
3) *Œuvres de Huygens*, II, S. 121.

ist demnach gleich einem Kreise mit dem Radius $\frac{a}{4}$. In demselben Briefe legt Sluse seinem berühmten Korrespondenten auch die Frage vor nach dem Verhältnis zwischen dem Volumen V, das durch Rotation dieser Fläche um Oy entsteht und dem Volumen U des Zylinders, dessen Grundfläche der Kreis mit dem Radius gleich der zur Ordinate $\frac{3}{4}a$ gehörenden Abszisse, und dessen Höhe a ist. Huygens antwortet unterm 22. Jan. 1658, daß dieses Verhältnis gleich 64 : 135 sei, „nisi me calculus fallit"[1]). Da nämlich

$$V = \pi \int_{y=0}^{y=a} x^2 \cdot dy = \frac{\pi}{a^2} \int_{y=0}^{y=a} (ay^3 - y^4)\, dy = \frac{\pi a^3}{20}, \qquad U = \frac{27\pi a^3}{256}$$

ist, so ergibt sich in der Tat $\frac{U}{V} = \frac{64}{135}$.

Von der vierten Ordnung ist ferner die Perlkurve, die die Gleichung hat

$$ay^3 - y^4 = x^4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

und von der de Sluse in dem Briefe an Huygens vom 19. Febr. 1658[2]) spricht. Von ihr sowie von der vorigen ist auch die Rede in den Briefen, die zwischen den beiden genannten Geometern gewechselt wurden am 4., 12. und 14. März 1658[3]). Aus dem Inhalte derselben ergibt sich eine bemerkenswerte Konstruktion der fraglichen Kurve. Schreibt man nämlich die Gleichung (10) folgendermaßen

$$y^2(ay - y^2) = x^4,$$

und betrachtet den Kreis mit der Gleichung $ay - y^2 = x_1^2$, so ergibt sich $x = \sqrt{x_1 \cdot y}$; demnach ist x die mittlere Proportionale zwischen x_1 und y. Man nehme daher auf der y-Achse die Strecke $OA = a$, beschreibe über OA als Durchmesser einen Kreis, greife auf OA einen beliebigen Punkt M heraus (Taf. XI, Fig. 77) und ziehe die Sehne NN' parallel zu Ox durch M. Dann trage man auf Oy $ML = MN$ ab und beschreibe über dem Durchmesser OL einen Kreis; dieser schneidet die Gerade NN' in zwei Punkten PP' der Perlkurve. — Betrachten wir der Analogie folgend denselben Kreis $ay - y^2 = x_1^2$, so läßt sich Gleichung (9) schreiben $x_1 y = ax$. Beschreibt man daher wie vorhin den Kreis über OA als Durchmesser (Taf. XI, Fig. 78) und zieht eine beliebige, dazu senkrechte Sehne NMN', nimmt auf Oy $ML = a$, so wird die durch O zu LN gezogene Parallele die Sehne NN' in einem Punkte P der Perlkurve (9) schneiden. — Weitere Details über die speziellen Perlkurven finden sich in dem gelehrten Briefwechsel von Huygens.

1) *Œuvres de Huygens,* II, S. 124. 2) Das. S. 134.
3) Das. S. 144, 148 u. 150.

Fünftes Kapitel.

Die Laméschen und die triangulär-symmetrischen Kurven.

124. Die Gleichungen

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,\quad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1,\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1,\quad \sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1,$$

die bezüglich eine Gerade, eine Hyperbel, einen zentrischen Kegelschnitt und eine Parabel darstellen, sind offenbar Spezialfälle von folgender Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m+\left(\frac{y}{b}\right)^m=1, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wo a und b beliebige Größen und m eine rationale Zahl ist, die man den Index oder Exponenten nennen kann. Dasselbe kann man wiederholen in bezug auf die Gleichungen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{-2}+\left(\frac{y}{b}\right)^{-2}=1,\quad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}=1,$$

die resp. eine Kreuzkurve (Nr. **97**) und die Evolute eines zentrischen Kegelschnittes oder die Tetrakuspide von G. Bellavitis[1]) darstellen, jenachdem die Koordinatachsen rechtwinklig oder schiefwinklig sind.

Die Kurven (1) (wie die Perlkurven $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordn. Nr. 122) kommen in der Kategorie der trinomischen Kurven von A. Comte[2]) vor; sie werden, wenn die Koordinatachsen rechtwinklig sind, gewöhnlich Lamésche Kurven genannt[3]) zur Erinnerung an den großen Mathematiker der sie zuerst betrachtet hat[4]); sie spielen eine wichtige Rolle in der Theorie der verallgemeinerten Hyperbelfunktionen[5]).

Wendet man auf die Kurve (1) die (affine) Transformation an[6]),

---

1) *Sposizione del metodo delle equipollenze* (Mem. Soc. Ital. Scienze, XXV, 2. Teil, 1850) oder *Exposition de la méthode des equipollences*, trad. Laisant (Paris, 1874) S. 229. Vgl. den Aufsatz von J. Gomes Teixeira, *Sur la tetracuspide de Bellavitis* (Mathésis, III Sér., I, 1901).

2) *Géométrie analytique* (Paris, 1843) S. 249.

3) Ausnahme von dieser Regel machen C. F. A. Leroy (*Traité de géométrie descriptive,* VI. Aufl. Paris 1862, S. 203 Fußnote), der sie Storoïdes nennt, und L. Aoust, der den Namen Strophoïdes gebraucht (*Analyse infinitésimale des courbes planes,* Paris 1873, S. 58).

4) *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de geometrie* (Paris, 1818) S. 105ff. — Auf eine spezielle Lamésche Kurve, nämlich die mit der Gleichung $x^3+y^3=c^3$, wandte Barrow seine Tangentenmethode an; s. die *Lectiones geometricae*, zuerst herausgeg. London 1670 und reproduziert in *The math. Works of Is. Barrow ed. Whewell* (Cambridge, 1860).

5) S. Kap. VIII des Werkes von S. Günther, *Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Hyperbelfunktionen* (Halle a. S., 1881).

6) Vgl. für das Folgende die Abh. von G. Loria, *Topologia delle curve di Lamé e delle spirali sinusoidi algebriche* (Atti dell' Accad. Pontaniana, XXXIX, 1909).

die durch
$$\frac{x}{a} = \frac{x'}{l}, \quad \frac{y}{b} = \frac{y'}{l}$$
analytisch definiert ist, wobei l eine beliebige Länge bedeutet, die man auch gleich 1 setzen kann, so erhält man die (affine) Kurve mit der Gleichung
$$x'^m + y'^m = l^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$
und da diese dieselben projektiven Eigenschaften hat wie (1) und sich auch ebenso in bezug auf die unendlich ferne Gerade verhält, so kann sie ebensowohl dazu dienen, die typischen Formen der Laméschen Kurven zu bestimmen. Wir bedienen uns daher im folgenden zunächst dieser Gleichung, indem wir uns der Einfachheit halber in der Gl. (1) die Akzente weg denken.

Den Index m wollen wir als rational annehmen und seinen absoluten Wert durch $\frac{p}{q}$ ausdrücken, wo p und q relative Primzahlen sind.

Da die Gleichung (1) sich nicht ändert, wenn man x und y miteinander vertauscht, so ist die Kurve in allen Fällen symmetrisch zur Geraden $x = y$; d. i. die Halbierungslinie der positiven Achsenrichtungen. Ist p eine gerade Zahl, so ist die Kurve überdies symmetrisch zu den Koordinatachsen; da sich nun die Gleichung auch nicht ändert, wenn man x und $-y$ miteinander vertauscht, so ist auch die zweite Halbierungslinie $x = -y$ eine Symmetrieachse der Kurve. **Folglich haben die Laméschen Kurven vier Symmetrieachsen, wenn p eine gerade Zahl ist; in allen anderen nur eine.**

Nehmen wir zuerst an, daß m positiv sei; dann läßt sich Gl. (1) auch in der Form:
$$\sqrt[q]{\left(\frac{x}{l}\right)^p} + \sqrt[q]{\left(\frac{y}{l}\right)^p} - 1 = 0$$
schreiben. Die linke Seite hat nun q verschiedene Werte, deren Produkt gleich Null gesetzt, uns die rationale Gleichung der Kurve liefert; diese ist also:
$$\prod_{\varepsilon}\prod_{\varepsilon'}\left(\varepsilon\sqrt[q]{x^p} + \varepsilon'\sqrt[q]{y^p} - \sqrt[q]{l^p}\right) = 0,$$
wo ε und ε' zwei q^{te} Wurzeln der Einheit, und $\sqrt[q]{l^p}$ den absoluten reellen Wert der q^{ten} Wurzel aus der positiven Zahl l^p bedeuten. Da nun jeder der Faktoren in den Koordinaten vom Grade p ist, so steigt das Produkt, also die linke Seite der Gleichung auf den Grad $p \cdot q$. **Folglich sind die Laméschen Kurven mit positivem Index $m = \frac{p}{q}$ von der Ordnung $n = pq$.**

Nehmen wir jetzt an, daß der Index negativ ($= -m$) sei; dann läßt sich die Gl. (1') in der Form schreiben
$$\frac{1}{x^m} + \frac{1}{y^m} = \frac{1}{l^m} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1'')$$

Die eine Gleichung geht aus der anderen hervor durch eine geometrische Transformation, die durch die Beziehungen

$$x \cdot x' = l^2, \quad y \cdot y' = l^2$$

dargestellt wird. Sie ist eine quadratische Korrespondenz, die zu Fundamentalpunkten den Koordinatenanfang und die unendlich fernen Punkte der Achsen hat, und die sich folgendermaßen konstruieren läßt: „Man beschreibe um das Zentrum O mit l als Radius einen Kreis; ist P ein beliebiger Punkt seiner Ebene, Q und R seine Projektionen auf die Achsen, so zeichne man die Polaren von Q und R in bezug auf den Kreis; diese schneiden sich in einem Punkte P', der dem P in dieser Korrespondenz entspricht. Da nun die Kurve (1') weder durch den Anfangspunkt, noch durch die unendlich fernen der Achsen geht, so ist zufolge bekannter Sätze über quadratische Transformationen die Ordnung von (1'') das Doppelte der von (1'). **Die Laméschen Kurven mit negativem Index $m = -\frac{p}{q}$ sind also von der Ordnung $n = 2pq$.**

Diese Sätze ermöglichen uns die Bestimmung der Zahl der verschiedenen Spezies der Laméschen Kurven von einer bestimmten Ordnung n.

Zu diesem Zwecke zerlegen wir die Zahl n in ihre verschiedenen Primfaktoren und setzen demnach

$$n = n_1^{\nu_1} \cdot n_2^{\nu_2} \cdot n_3^{\nu_3} \cdot \ldots \ldots n_k^{\nu_k},$$

wobei die Primzahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ nach der wachsenden Größe geordnet sein mögen. Es ist nun zweckmäßig folgende Fälle zu unterscheiden:

I. n_1 ist nicht 2, also n ungerade;
II. $n_1 = 2$, $\nu_1 = 1$, also n einfach gerade;
III. $n_1 = 1$, $\nu_1 > 2$, also n vielfach gerade.

Im I. Falle muß der Index notwendig positiv sein, also $m = \frac{p}{q} > 0$ und $n = p \cdot q$. Es kann also p, außer der Einheit, noch die Werte der k Zahlen $n_1^{\nu_1}, n_2^{\nu_2}, \ldots, n_k^{\nu_k}$ haben, ferner eines der Produkte von zwei dieser Zahlen, von drei derselben, usw. bis schließlich $p = n$. Ist aber die Zahl p gewählt, so ist damit q bestimmt $\left(q = \frac{n}{p}\right)$; dadurch ist jedesmal eine Spezies von Laméschen Kurven individualisiert. Folglich ist die Gesamtzahl dieser Spezies

$$S = 1 + \binom{k}{1} + \binom{k}{2} + \binom{k}{3} + \ldots \binom{k}{k} = 2^k.$$

Im II. Falle haben wir ebenfalls die 2^k Spezies wie im vorigen Falle, außerdem noch die mit negativem Index. Um die Zahl der letzteren zu finden, beachten wir, daß alsdann

$$n = 2 \cdot n_2^{\nu_2} \cdot \nu_3^{\nu_3} \ldots n_k^{\nu_k},$$

und setzen wir $m = -\frac{p}{q}$, so wird $p \cdot q = n_2^{\nu_2} n_3^{\nu_3} \ldots n_k^{\nu_k}$. Machen wir dieselben Überlegungen wie vorhin, so sehen wir, daß sich die Zahlen p und q auf 2^{k-1} verschiedene Weisen wählen lassen; folglich ist die Gesamtzahl der Spezies $S = 2^k + 2^{k-1} = 3 \cdot 2^{k-1}$.

Im III. Falle schließlich bekommen wir zunächst die 2^k Spezies mit positivem Index von den beiden vorigen Fällen wieder, außerdem solche mit negativem Index, deren Zahl sich wie folgt ergibt: Wir können setzen:

$$n = 2^{\nu_1} \cdot n_2^{\nu_2} \cdot n_3^{\nu_3} \ldots n_k^{\nu_k} \text{ (wo } \nu_1 > 1)$$

und sehen, daß

$$p \cdot q = 2^{\nu_1 - 1} \cdot n_2^{\nu_2} \cdot n_3^{\nu_3} \ldots n_k^{\nu_k};$$

also kann das Zahlenpaar p, q auf 2^k Arten gewählt werden; im ganzen ist also die Zahl der Spezies $S = 2^k + 2^k = 2^{k+1}$. Also können wir aussprechen den folgenden **Satz:**

Die Zahl der verschiedenen Spezies der Laméschen Kurven von der Ordnung n ist 2^k, $3 \cdot 2^{k-1}$ oder 2^{k+1}, jenachdem n ungerade, einfach gerade oder mehrfach gerade ist, wobei k die Anzahl der in n als Faktoren enthaltenen Primzahlen ist.

Demnach ist z. B. die Zahl der Spezies Laméscher Kurven erster Ordnung 1, zweiter Ordnung 3 $\left(\text{nämlich die mit dem Index, } 1, \frac{1}{2}, -1\right)$, dritter Ordnung 2 $\left(\text{nämlich die mit dem Index } 3 \text{ und } \frac{1}{3}\right)$, von der vierten Ordnung 4 $\left(\text{nämlich die mit dem Index } 4, \frac{1}{4}, -2, -\frac{1}{2}\right)$, von der sechsten Ordnung 6 $\left(\text{nämlich die mit dem Index} = \frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 6, -\frac{1}{3}, -3\right)$ u. s. w.

Die Gleichung der Tangente an die Kurve (1′) im Punkte (x, y) lautet:

$$x^{m-1} X + y^{m-1} Y - l^m = 0,$$

wo X, Y die laufenden Koordinaten sind. Bezeichnen wir nun die Plückerschen Koordinaten der Tangente mit u und v, so haben wir $u = -\frac{x^{m-1}}{l^m}$, $v = -\frac{y^{m-1}}{l^m}$. Eliminieren wir nun aus diesen Gleichungen und (1′) die x, y, so erhalten wir die Tangentialgleichung der fraglichen Kurve, nämlich

$$u^{\frac{m}{m-1}} + v^{\frac{m}{m-1}} = \left(-\frac{1}{l}\right)^{\frac{m}{m-1}}. \quad \ldots \ldots \quad (1^*)$$

Sie hat dieselbe Form wie die Gl. (1′), nur mit dem Unterschiede, daß

ihr Exponent „der Tangentialindex“ jetzt $\mu = \frac{m}{m-1}$ ist. Dieser ist rational, wenn m es ist und positiv, wenn $m > 1$ oder < 0 ist; μ ist negativ, wenn $0 < m < 1$ ist. Die Tangentialgleichung läßt sich durch ein ähnliches Verfahren, wie wir es bei der Punktgleichung angewendet haben, rational machen; aus dem Resultate läßt sich ein Ausdruck für die Klasse der Kurve finden, nämlich: **Die Klasse einer Laméschen Kurve mit dem Index $m = \frac{p}{q}$** (in absolutem Werte) **ist gegeben durch $p(p+q)$, wenn m negativ ist, durch $p(p-q)$, wenn $m > 1$, durch $2p(p-q)$, wenn m zwischen 0 und 1 liegt.**

Der Richtungskoeffizient der Tangente im Punkte (x, y) wird gegeben durch

$$y' = -\left(\frac{x}{y}\right)^{m-1}.$$

Hieraus folgt, wenn $m > 1$, so ist $y' = 0$ oder ∞, jenachdem $x = 0$, oder $y = 0$. Wenn hingegen $0 < m < 1$, so ist $y' = 0$ oder ∞, jenach $y = 0$ oder $x = 0$. Wir schließen daraus: **Liegt der Index m der Laméschen Kurve zwischen 0 und 1, so sind die einzigen Tangenten, die zu den Achsen parallel laufen, die Achsen selbst, ist er hingegen größer als 1, so haben die zu Ox und Oy parallelen Tangenten ihre Berührungspunkte auf Oy und Ox beziehungsweise; ist m schließlich negativ, so berühren die Achsen die Kurve im Unendlichen und sind die einzigen Tangenten dieser Richtung.**

Differenzieren wir die obige Beziehung noch einmal und berücksichtigen die Gl. (1'), so erhalten wir

$$y \cdot y'' = (1-m)\, x^m \frac{l^m}{(xy'^{\,m-1})^2}.$$

Nun ist bekanntlich eine Kurve konvex oder konkav gegen die x-Achse, jenachdem das Produkt $y \cdot y''$ dort positiv oder negativ ist. Beachten wir nun die rechte Seite der obigen Formel, so sehen wir: **Ist m negativ, so ist die Kurve in allen Punkten, für die $x > 0$, konvex gegen die x-Achse; ebenso wenn $0 < m < 1$. Ist hingegen $m > 1$, so ist die Kurve konvex gegen Ox in den Punkten, für die $x < 0$.** Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, die drei Fälle auseinander zu halten, in denen m in die Intervalle $-\infty \ldots 0$, $0 \ldots 1$, $1 \ldots \infty$ fällt.

Es sei nun wieder m positiv, und wir wollen die Gleichung der Kurve in folgender Form schreiben

$$x = \sqrt[p]{\left(\sqrt[q]{l^p} - \sqrt[q]{y^p}\right)^q};$$

dann sehen wir leicht ein: 1. Sind p und q beide ungerade Zahlen, so entspricht jedem reellen Werte von y immer ein einziger reeller Wert von x, und dies besagt geometrisch, daß jede Parallele zu Ox

die Kurve in einem reellen Punkte trifft. Dasselbe gilt für jede Parallele zu Oy. — 2. Ist p gerade und q ungerade, so entsprechen jedem reellen Werte von y, dessen absoluter Wert kleiner als l ist, zwei reelle (entgegengesetzt gleiche) Werte von x; d. h. geometrisch, daß jede innerhalb des von den Geraden $y = \pm l$ begrenzten Streifens gelegene Parallele die Kurve in zwei reellen Punkten schneidet; dasselbe gilt auch von Parallelen zu Ox. — 3. Ist endlich p ungerade und q gerade, so entsprechen jedem positiven Werte von y immer zwei reelle und positive Werte von x; d. h. geometrisch, daß jede Parallele mit positiver Ordinate die Kurve in zwei Punkten mit positiver Abszisse schneidet, und umgekehrt.

Diese Bemerkungen lassen sich unmittelbar auf den Fall ausdehnen, daß m negativ ist, wenn man alsdann die Kurvengleichung in folgender Form schreibt:

$$\frac{1}{x} = \sqrt[p]{\left(\sqrt[q]{\frac{1}{l^p}} - \sqrt[q]{\frac{1}{y^p}}\right)^q}.$$

Die unendlich fernen Punkte der Kurve sind charakterisiert durch die Gleichung

$$x^{\frac{p}{q}} + y^{\frac{p}{q}} = 0.$$

Ist nun m positiv und p gerade, so kann diese Gleichung durch reelle Werte nicht befriedigt werden; folglich ist die entsprechende Kurve geschlossen. Ist m positiv und p ungerade, und schreiben wir die obige Relation als

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{p}{q}} = 0,$$

so sehen wir, daß der absolute Wert des Verhältnisses $\frac{y}{x}$ gleich Eins sein muß.

Setzen wir demnach zunächst $\frac{x}{y} = +1$, so wird die Relation zu

$$(1)^{\frac{p}{q}} = -1,$$

oder wenn k eine ganze Zahl bedeutet,

$$\cos\frac{2pk\pi}{q} + i\sin\frac{2pk\pi}{q} = -1.$$

Diese wird aber nur erfüllt, wenn

$$\frac{2pk\pi}{q} = (2h+1)\pi,$$

oder wenn

$$\frac{p}{q} = \frac{2h+1}{2k}$$

ist, wobei h eine neue, ganze Zahl bedeutet.

Setzen wir aber $\frac{x}{y} = -1$, so finden wir auf dieselbe Weise, daß

$$(-1)^{\frac{q}{q}} = -1, \quad \cos\frac{p(2k+1)\pi}{q} + i \sin\frac{p(2k+1)\pi}{q} = -1,$$

oder $\frac{p}{q} = \frac{2h+1}{2k+1}$ sein muß. Aus allem geht hervor: **Eine Laméscbe Kurve mit positivem Index $m = \frac{p}{q}$ ist geschlossen, wenn p gerade ist; sie geht durch den unendlich fernen Punkt der Halbierungslinie des Winkels der positiven Achsen, wenn p ungerade ist, dagegen durch den unendlich fernen Punkt der anderen Halbierungslinie, wenn p und q beide ungerade sind.** Ist dagegen m negativ, so gibt es unendlich ferne Punkte nur auf den Achsenrichtungen.

Nach diesen Bemerkungen sind wir imstande die sämtlichen Typen der Laméschen Kurven aufzuzählen und zu beschreiben. Wir teilen sie zweckmäßig in die zwei Gruppen $m > 0$, $m < 0$, und erhalten dann je nach den arithmetischen Formen, die der Index annehmen kann, die folgenden neun Typen.

A) Kurven mit positivem Index.

1. $m = \frac{2h}{2k+1} > 1$. Die Kurve hat vier Symmetrieachsen, nämlich die Koordinatachsen und die beiden Halbierungslinien der Achsenwinkel; sie besteht demnach aus acht kongruenten Bogen. Die Schnittpunkte mit den Achsen (die wir auch im Folgenden immer bzw. A, A' und B,B' nennen wollen) sind sog. Flachpunkte. Jede Parallele zu Ox (bzw. Oy), deren Abstand absolut kleiner als l ist, schneidet die Kurve in zwei reellen Punkten. Die genannten Bogen wenden den Achsen ihre konkave Seite zu, und sie schmiegen sich den Geraden $x = \pm l$, $y = \pm l$ um so mehr an, je größer m ist. Die Fig. 91, Taf. XII, stellt den Fall $m = 4$ dar.

2. $m = \frac{2h}{2k+1} < 1$. Die Bogen wenden den Achsen ihre konvexe Seite zu; die Punkte $A \ldots B'$ sind Spitzen und die Kurve schmiegt sich den Achsen um so mehr an, je kleiner m ist. Fig. 92 stellt die Gestalt für $m = \frac{2}{5}$ dar. Zu diesem Typus gehört auch die reguläre Astroide (s. Taf. IX, Fig. 61), für die $m = \frac{2}{3}$.

3. $m = \frac{2h+1}{2k} > 1$. Die Kurve hat als einzige Symmetrieachse die Gerade $x = y$, deren unendlich ferner Punkt der einzige reelle unendlich ferne der Kurve ist. Alle reellen Punkte der Kurve liegen zwischen den positiven Achsen. Die Kurve besteht aus drei Bögen: der eine liegt zwischen den Punkten A und B und ist konkav gegen die Achsen. Die beiden anderen sind unendlich; der von A ausgehende ist konkav, der von B ausgehende konvex gegen Ox. A und B sind

Spitzen der Kurve mit den Geraden $x = l$ und $y = l$ als Tangenten. Fig. 93 (Taf. XII) stellt die Gestalt für $m = \frac{3}{2}$ dar.

4. $m = \frac{2h+1}{2k} < 1$. Der Bogen AB ist konvex gegen Ox, ebenso der von A ausgehende; der dritte ist konkav, derart, daß die Kurve aus einem einzigen parabelähnlichen Zuge besteht, der die Achsen in A und B berührt, wie es Fig. 94 (Taf. XII) für $m = \frac{3}{4}$ zeigt. Alles übrige ist wie bei 3.

5. $m = \frac{2h+1}{2k+1} > 1$. Die Gerade $x = y$ ist die einzige Symmetrieachse der Kurve, während $y + x = 0$ die einzigen unendlich fernen Punkte der Kurve enthält und für diese eine Wendeasymptote ist. Das Kurvenstück AB zwischen den positiven Achsen ist konkav gegen beide Achsen, das zweite von A ausgehende, das die Punkte $x > l$, $y < 0$ enthält, ist konkav gegen Ox, konvex gegen Oy; das dritte von B ausgehende, das die Punkte $x < 0$, $y > l$ enthält, ist konvex gegen Ox, konkav gegen Oy. A und B sind Wendepunkte mit $y = l$, $x = l$ als Wendepunktstangente. Fig. 95 zeigt die Gestalt für $m = 5$.

6. $m = \frac{2h+1}{2k+1} < 1$. Der Bogen AB ist konvex gegen die Achsen; ebenso verhalten sich die beiden anderen Kurvenstücke umgekehrt, wie im vorigen Falle. A und B sind Wendepunkte mit den Achsen als Tangenten. Fig. 96 zeigt den Fall $m = \frac{1}{3}$.

B) Kurven mit negativem Index.

7. $m = -\frac{2h}{2k+1}$. Diese Kurven haben vier Symmetrieachsen. Zieht man die vier Geraden $x = \pm l$, $y = \pm l$, so erhält man vier rechte Winkel, innerhalb deren alle reellen Punkte der Kurve liegen. Jede Parallele zu den Achsen, in einem Abstande größer als l, schneidet die Kurve in zwei reellen Punkten. Die Kurve besteht aus vier unendlichen, einander gleichen Zweigen, die ihre konvexe Seite den Achsen zuwenden. Außerdem ist der Anfang ein isolierter Punkt. Die Gestalt der Kurve zeigt Fig. 97 (Taf. XII) für $m = -\frac{4}{3}$ und $m = -\frac{8}{9}$ (die punktierte K.) Zu dieser Gattung gehört auch die Kreuzkurve (s. Taf. VII, Fig. 56), für die $m = -2$.

8. $m = -\frac{2h+1}{2k}$. Die Gerade $x = y$ ist die einzige Symmetrieachse der Kurve, deren sämtliche Punkte zwischen den positiven Achsenhälften liegen. Sowohl $x = y$ als auch $x = l$, $y = l$ sind Spitzentangenten der Kurve, die zur ersten gehörige Spitze liegt in O, die beiden anderen sind unendlich fern. Die Kurve (s. Taf. XII, Fig. 98) besteht aus drei Bogen; der erste liegt in dem Winkel zwischen den Geraden $x = l$, $y = l$ und ist konvex gegen Oy, ebenso der zweite,

der in O beginnt, dort die Symmetrieachse berührt, und die Gerade $x = l$ im Unendlichen; der dritte beginnt ebenso, berührt $y = l$ im Unendlichen, ist aber konkav gegen Oy.

9. $m = -\frac{2h+1}{2k+1}$. In dem rechten Winkel zwischen den Geraden $x = l$ und $y = l$, die Asymptoten der Kurve sind, liegt ein unendlicher Bogen der Kurve, dessen sämtliche Punkte nur positive Koordinaten $> l$ haben. Der andere Bogen geht durch den Anfangspunkt und berührt dort die Gerade $x + y = 0$. Die Ordinaten seiner Punkte sind für $x < l$ negativ, für $x < 0$ positiv, demnach liegt der eine Teil in dem Halbstreifen zwischen den Achsen und $x = l$, der andere in dem von den Achsen und $y = l$ begrenzten Halbstreifen in den negativen Achsenrichtungen. Die Gestalt (s. Fig. 99) hat demnach Ähnlichkeit mit der gleichseitigen Hyperbel, was nicht verwunderlich, da man diese Kurve erhält für $h = k = 0$, also $m = -1$.

Demnach gibt es vom topologischen Standpunkte neun verschiedene Typen der Laméschen Kurven[1]). Kombinieren wir dieses Resultat mit dem auf S. 331 erhaltenen über die Spezies der Laméschen Kurven von gegebener Ordnung und fragen wir jetzt: **In welchen Formen kann sich eine solche Kurve von der Ordnung n darbieten?** Wir sehen, wenn n ungerade ist, so muß ihr Index von der Form $\frac{2h+1}{2k+1}$ sein. **Die einzigen Formen, die eine Lamésche Kurve ungerader Ordnung annehmen kann, werden demnach durch die Fig. 95 und 96 dargestellt.** Ist n einfach gerade, so kann der Index nur die

1) Ein ähnliches Verhalten wie die Laméschen Kurven zeigen diejenigen, deren Gleichung von der Form ist:

$$x^m - y^m = l^m.$$

Beachten wir, daß die betrachteten Potenzen verschiedene Werte annehmen können, wenn m gebrochen ist, so ist leicht einzusehen, daß, wenn m einen absoluten Wert von der Form $\frac{2h+1}{2k}$ oder $\frac{2h+1}{2k+1}$ hat, die neuen Kurven von den Laméschen nicht verschieden sind, als höchstens durch Vertauschungen der Richtungen auf den Achsen, also sind uns deren Formen schon bekannt. Es bleibt also nur der Fall zu untersuchen, daß der absolute Wert von m die Form $\frac{2h}{2k+1}$ hat. A) Ist m positiv, so schneidet die Kurve Oy nicht, trifft aber Ox in A und A' in welchen Punkten die zugehörigen Tangenten parallel zu Oy sind, dann fallen aber die Tangenten mit Oy zusammen, wenn $m < 1$. Im ersten Falle ist die Kurve konkav gegen Ox, im zweiten Falle konvex, und A und A' sind Spitzen. Im ersten Falle hat die Kurve das Aussehen einer gleichseitigen Hyperbel, im anderen stellt sie sich als die Evolute einer solchen Kurve dar (s. Fig. 100, Taf. XII). B) Ist $m < 0$, so fallen alle die reellen Punkte der Kurve in die durch die Geraden $x = \pm l$ begrenzten Streifen; die Kurve ist symmetrisch in bezug auf O, welcher Punkt ein Inflexionsknoten ist; die Kurve hat eine Form, die ähnlich der Kohlenspitzkurve (Taf. VII, Fig. 55) ist.

Formen $\frac{2h}{2k+1}$, $\frac{2h+1}{2k}$ und $-\frac{2h+1}{2k+1}$ annehmen. **Die Formen einer Laméschen Kurve von einfach gerader Ordnung sind demnach die durch Fig. 91, 92, 93, 94, 97 wiedergegebenen.** Ist m mehrfach gerade, so kann es nur die Werte $\frac{2h}{2k+1}$ und $\pm\frac{2h+1}{2k}$ haben; folglich: **Eine Lamésche Kurve von einer mehrfach geraden Ordnung kann eine der vier Gestalten wie Fig. 91—94, 97, 98 darbieten.**

125. Was nun die durch Gleichung (1) dargestellten Kurven angeht, so hat Lamé a. a. O. einen bemerkenswerten Satz bewiesen, der ferner von Magnus[1]) dargetan und von Gilbert[2]) von neuem aufgefunden wurde. Um diesen kennen zu lernen, betrachten wir die ∞^1 Laméschen Kurven, die durch folgende Gleichung dargestellt werden:

$$\left(\frac{x}{\xi}\right)^m + \left(\frac{y}{\eta}\right)^m = 1, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

und wo die Größen ξ, η durch die Relation verknüpft sind:

$$\left(\frac{\xi}{a}\right)^p + \left(\frac{\eta}{b}\right)^p = 1; \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

es wird behauptet, daß deren Enveloppe eine Lamésche Kurve von der Art (1) ist mit dem Index $\frac{mp}{m+p}$.[3]) In der Tat, wenden wir die Methode der unbestimmten Multiplikatoren an, so erkennt man, daß die Gleichung der fraglichen Enveloppe durch Elimination von ξ, η, aus Gleichung (2) vermittelst folgender Relationen entsteht

$$\xi^{m+p} = a^p x^m, \qquad \eta^{m+p} = b^p y^m;$$

sie ist daher

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mp}{m+p}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{mp}{m+p}} = 1;$$

diese Gleichung beweist durch ihre Form den ausgesprochenen Satz.[4])

---

1) *Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie* (Berlin, 1833), S. 586.

2) *Sur les courbes planes à équations trinomes* (Nouv. Ann. Mathém. 2e Sér. IX, 1870).

3) Euzet (*Sur les courbes planes à équations trinômes et les surfaces à équations tetranomes;* Nouv. Ann. Math., XIII, 1852) hat versucht diesen Satz auf die allgemeineren Kurven $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$ auszudehnen; aber sein Resultat ist unrichtig wegen eines Rechnungsfehlers, welcher sich im Anfang seiner Arbeit befindet. Denselben Kurven begegnete später Mc. Laren, der sie *zweifache Ovale* nannte in dem Aufsatze *Equation of the glisette of the twofold oval* $\frac{x^m}{a^m} + \frac{x^n}{b^n} = 1$ (Proc. R. Soc. Edinburgh, XIII, 1890).

4) Von diesem Satze verdienen einige Spezialfälle hervorgehoben zu werden:

Es sei bemerkt, daß der Index der 50 erhaltenen Laméschen Kurven eine symmetrische Funktion der Indizes m, p ist.

I. Setzt man $m = 2$, $p = 1$, $b = a$, so erhält man als Enveloppe der ∞^1 Ellipsen $\left(\frac{x}{\xi}\right)^2 + \left(\frac{y}{\eta}\right)^2$, für welche $\xi + \eta = a$, die Kurve $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ und damit den Satz: **Die Enveloppe aller koaxialen Ellipsen, für welche die Summe der Achsen konstant ist, ist eine reguläre Astroide.** (S. Nr. 106.)

II. Setzt man $m = p = 2$, so erhält man als Enveloppe $\pm\left(\frac{x}{a}\right) \pm \left(\frac{y}{b}\right) = 1$ und damit den Satz: **Das System aller koaxialen Ellipsen, deren Halbachsen die Koordinaten eines Punktes einer bestimmten von diesen Ellipsen sind, hat als Enveloppe die Seiten des Parallelogramms, dessen Ecken die Scheitel jener Ellipse sind.** (m. s. C. François, *Sur une certaine transformation et son inverse*; Mathésis, III. Sér. IX, 1909).

III. Projiziert man einen Punkt (ξ, η) der durch Gl. (3) dargestellten Laméschen Kurve Γ auf die Koordinatachsen und verbindet die erhaltenen Punkte miteinander, so erhält man die Kurve Γ_1

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{p_1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{p_1}, \text{ wo } p_1 = \frac{p}{p+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{p}}.$$

Verfährt man nun mit Γ_1 ebenso wie mit Γ, so erhält man eine dritte Lamésche Kurve Γ_2 mit den Index

$$p_2 = \frac{p_1}{p_1+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{p_1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{p}}}.$$

So fortfahrend erhält man eine unbegrenzte Reihe Laméscher Kurven Γ_1, Γ_2, Γ_3 ....., deren Indizes ein bestimmes offenbares Gesetz befolgen, und man kann fragen in welcher Form die entsprechenden Kurven sich darbieten. Um dies zu entscheiden, müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

a) $p > 0$. Hat hierbei p die Form $\frac{2h}{2k+1}$, so folgt offenbar $p_1 = \frac{2h}{2(h+k)+1}$ und ähnlich für die folgenden Indizes p_2, p_3 ....; nun zeigt aber der Ausdruck $p_1 = \frac{p}{p+1}$ daß $p_1 < 1$, und **deshalb haben alle Kurven der Serie von Γ_1 an die Gestalt der Fig. 92.** Hat aber p die Form $\frac{2h+1}{2k}$, so wird $p_1 = \frac{2h+1}{2(h+k)+1}$, wenn aber $p = \frac{2h+1}{2k+1}$, so ist $p_1 = \frac{2(h+k+1)}{2h+1}$; demnach liegen alle Zahlen p_1, p_2, p_3 .... zwischen 0 und 1, sind jedoch abwechselnd von der Form $\frac{2h+1}{2k}$ und $\frac{2h+1}{2k+1}$ **folglich haben dann die Kurven von Γ_1 an abwechselnd die Gestalt der Figuren 94 und 96.**

b) $p < 0$. Schreiben wir die Beziehung zwischen p_1 und p in der Form $\frac{1}{p_1} = 1 + \frac{1}{p}$, so sehen wir, daß im allgemeinen $\frac{1}{p_k} + k = \frac{1}{p}$; gehen wir also von einem gewissen Werte r des Index aus, so werden alle Indizes der abgeleiteten Kurven positiv sein. Verfahren wir nun mit p_r ebenso wie oben mit p, so erkennen wir, **daß die Kurven Γ_r, Γ_{r+1} .... sich entweder alle in der Form der Fig. 92 darstellen, oder abwechselnd in den Formen der Fig. 94 und 96.** Der

Ein anderer bemerkenswerter Satz bezieht sich auf die Krümmung der Laméschen Kurven.[1]) Man kann ihn in folgender Weise erhalten: Aus der Gleichung (1) ergibt sich

$$-\left(\frac{b}{a}\right)^m = \left(\frac{y}{x}\right)^{m-1} \cdot \frac{dy}{dx}, \qquad (4)$$

oder auch

$$-\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \frac{dy}{dx} = \left(\frac{x}{y}\right)^{m-1};$$

differenzieren wir diese nach x, so folgt

$$-\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = (m-1)\left(\frac{x}{y}\right)^{m-2}\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2} \cdot \frac{dy}{dx}\right),$$

welche Gleichung mit (4) multipliziert ergibt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (m-1)\frac{1}{xy}\frac{dy}{dx}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right). \qquad (5)$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß der Krümmungsradius R_m der Kurve (1) im Punkte $P(x, y)$ durch folgende Formel gegeben ist:

$$R_m = \frac{xy\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{(m-1)\frac{dy}{dx}\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)}. \qquad (6)$$

Führt man noch den Bogen s als unabhängige Variabele ein, so läßt sich daraus ableiten

$$\frac{4}{(m-1)R_m} = xy\frac{dx}{ds} \cdot \frac{dy}{ds}\begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} \\ x & y \end{vmatrix}.\text{ [2])}$$

Betrachten wir nun den so entstandenen Ausdruck für $(m-1)R_m$, so sehen wir, daß dieser weder von a und b, noch auch von m abhängt, sondern nur von den Koordinaten x, y des betrachteten Punktes und von der Richtung der Geraden, die daselbst die Kurve berührt; mit anderen Worten — benutzen wir die von S. Lie eingeführte Nomenklatur[3]) — **es ist $(m-1)R_m$ eine Funktion nur von dem Linien-**

erste Fall tritt ein, wenn der absolute Wert von p die Form $\frac{2h+1}{2k}$ hat, der andere, wenn dieser Wert eine der Formen $\frac{2h}{2k+1}$, $\frac{2h+1}{2k+1}$ hat.

1) G. Fouret, *Construction du rayon de courbure de certaines classes de courbes, notamment des courbes de Lamé et des paraboles et hyperboles des divers ordres* (C. R. CX, 1890); R. Godefroy, *Sur les rayons de courbure de certaines courbes et surfaces, en particulier de courbes et surfaces de Lamé* (Journ. Ec. polyt., Heft LXII, 1892).

2) Bezügl. einer anderen Form, die man diesem Ausdrucke geben kann, s. R. Godefroy, *Théorèmes sur les rayons de courbure d'une classe de courbes géométriques* (Nouv. Ann. Math. 3e Sér. V, 1886).

3) Man s. z. B. Lie-Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen* I. (Leipzig, 1896) S. 11.

element der Kurve, die ihren Sitz im Punkte P hat. Daraus folgt, wenn wir eine andere Lamésche Kurve vom Typus (1) betrachten z. B. folgende

$$\left(\frac{x}{a'}\right)^{m'} + \left(\frac{y}{b'}\right)^{m'} = 1,$$

und wir nehmen an, daß sie die vorige im Punkte P berühre, daß der Wert der Funktion $(m' - 1) R_{m'}$ derselbe sein wird, wie der der Funktion $(m - 1) R_m$. Daraus folgt

$$(m - 1) R_m = (m' - 1) R_{m'}, \quad \text{oder} \quad \frac{1}{R_m} : \frac{1}{R_{m'}} = \frac{m-1}{m'-1}, \quad . \quad (7)$$

welche Beziehung folgender Satz ausdrückt: **Wenn zwei auf dieselben Achsen bezogene Laméschen Kurven mit den Indizes m und m' sich in einem Punkte berühren, so wird das Verhältnis der Krümmungen in diesem Punkte durch $\frac{m-1}{m'-1}$ ausgedrückt.** Wenn man daher den Krümmungsradius in einem Punkte für eine der unendlich vielen sich daselbst berührenden Laméschen Kurven konstruieren kann, so ergeben sich daraus die Krümmungsradien für alle anderen. Nehmen wir z. B. $m' = 2$, so erhält man $R_m = \frac{1}{m-1} R_2$, somit ist die Bestimmung von R_m zurückgeführt auf die Konstruktion des Krümmungsradius in einem Punkte P eines Kegelschnittes, der unzweideutig durch die Lage seiner Achsen, durch den Punkt P und die zugehörige Tangente bestimmt ist. Ähnliche Reduktionen ergeben sich, wenn man $m' = -1$ oder $m' = \frac{1}{2}$ setzt.

Mit Benutzung Eulerscher Integrale gelangt man zu einer eleganten Formel für die Quadratur der Laméschen Kurven. Beachten wir nämlich, daß die Kurve (1) folgender parametrischer Darstellung fähig ist

$$x = a \cos^{\frac{2}{m}} \lambda, \quad y = b \sin^{\frac{2}{m}} \lambda,$$

so ist, wenn wir mit A die Gesamtfläche der Kurve bezeichnen

$$\frac{1}{4} A = \int_{\lambda=\frac{\pi}{2}}^{\lambda=0} y \cdot dx = \frac{ab}{m} \int_{\lambda=0}^{\lambda=\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{m}+1} \lambda \cdot \cos^{\frac{2}{m}+1} \lambda \cdot d\lambda ;$$

nun ist im allgemeinen (vgl. Nr. **169**)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\mu-1} \lambda \cdot \sin^{\nu-1} \lambda \cdot d\lambda = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\mu+\nu}{2}\right)},$$

und daher

$$\frac{1}{4} A = \frac{ab}{m} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right)},$$

und weil $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$, so folgt schließlich

$$A = \frac{2ab}{m} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

und dieses ist die angedeutete Formel.[1])

126. Man projiziere eine Lamésche Kurve derart, daß der unendlich fernen Geraden eine solche in endlicher Entfernung entspricht; es entsteht dann eine neue, trinomische Kurve, die in homogenen Koordinaten durch eine Gleichung von folgendem Typus dargestellt werden kann:

$$\left(\frac{x_1}{a_1}\right)^m + \left(\frac{x_2}{a_2}\right)^m + \left(\frac{x_3}{a_3}\right)^m = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Alle Kurven, die einer solchen analytischen Darstellung fähig sind, heißen nach J. de la Gournerie triangulär symmetrische Kurven[2]); m ist ihr Exponent, und das Dreieck, worauf sie bezogen sind, das Fundamentaldreieck. Im speziellen: wenn $m = 1$, so hat man eine Gerade; wenn $m = -1$, einen dem Fundamentaldreieck umbeschriebenen Kegelschnitt; wenn $m = \frac{1}{2}$, einen demselben Dreiecke einbeschriebenen Kegelschnitt; wenn $m = 2$, einen Kegelschnitt, in Bezug auf den dieses Dreieck ein zu sich selbst polares (autopolares) ist; usw.[3])

Es ist nun leicht einzusehen: **Wenn man auf eine triangulär-symmetrische Kurve eine beliebige projektive Transformation anwendet, so erhält man eine andere triangulär-symmetrische Kurve**

---

1) Für den speziellen Fall, daß m eine Paarzahl, siehe die Abhandlung von S. Spitzer, *Bestimmung der Flächeninhalte jener Kurven, die durch die Gleichung* $\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} = 1$, *und des Körperinhaltes jener Flächen, die durch die Gleichung* $\left(\frac{x}{a}\right)^{2m} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2m} + \left(\frac{z}{c}\right)^{2m} = 1$ *gegeben sind, worin m eine ganze Zahl bezeichnet* (Arch. Math. Phys. LXI, 1877); ferner, für den Fall $a = b$, Cesàro-Kowalewsky, *Allg. Analysis und Integralrechnung*, S. 795.

2) J. de la Gournerie, *Recherches sur les surfaces reglées tetraédrales symétriques* (Paris, 1867) S. 196 ff.

3) Im Falle daß $m = \frac{1}{n}$, wo n eine positive ganze Zahl bedeutet, wurden die in Rede stehenden Knrven von L. Brusotti mit den Methoden der Invariantentheorie gründlich untersucht; m. s. den Aufsatz *Sulle curve piane razionali dotate di tre punti d'iperosculazione* (Rend. Ist. Lomb., II. Ser., XXXVII, 1904).

mit demselben Exponenten, die zum Fundamentaldreieck das transformierte des ursprünglichen Fundamentaldreiecks hat. Etwas ähnliches ergibt sich bei gewissen reziproken Transformationen, mit denen wir uns nun beschäftigen wollen.

Betrachten wir den Kegelschnitt

$$k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

und beachten, daß die Koordinaten der Tangente im Punkte (x_1, x_2, x_3) an die Kurve (9) gegeben werden durch

$$r \xi_i = \frac{x_i^{m-1}}{a_i^m} \cdots (i = 1, 2, 3), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

wo r ein Proportionalitätsfaktor ist, so hat der Pol dieser Tangente in bezug auf den Kegelschnitt (10) die Koordinaten X_1, X_2, X_3, die durch folgende Gleichung bestimmt werden

$$\varrho X_i = \frac{x_i^{m-1}}{k_i a_i^m} \cdots (i = 1, 2, 3), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

wo ϱ wieder ein Proportionalitätsfaktor ist. Eliminieren wir die x aus (9) und (12), so erhalten wir die Gleichung der Polarreziproken der triangulären Kurve (9) in bezug auf den Kegelschnitt (10); es ist folgende

$$(k_1 a_1 X_1)^{\frac{m}{m-1}} + (k_2 a_2 X_2)^{\frac{m}{m-1}} + (k_3 a_3 X_3)^{\frac{m}{m-1}} - 0. \quad . \quad . \quad (13)$$

Sie stellt eine trianguläre Kurve mit dem Exponenten $\mu = \frac{m}{m-1}$ dar, welche dasselbe Fundamentaldreieck wie (9) hat; also: **Die Polarreziproke einer triangulär-symmetrischen Kurve mit dem Exponenten m in bezug auf einen Kegelschnitt, für welchen das Fundamentaldreieck autopolar ist, erweist sich als eine ebensolche Kurve mit dem Exponenten $\mu = \frac{m}{m-1}$.** Wir bemerken zweierlei: Erstens, daß die Relation zwischen m und μ in folgender symmetrischer Form geschrieben werden kann $\frac{1}{m} + \frac{1}{\mu} = 1$. Zweitens, daß jede triangulär-symmetrische Kurve mit dem Exponenten μ, wie z. B. folgende

$$\left(\frac{x_1}{\alpha_1}\right)^\mu + \left(\frac{x_2}{\alpha_2}\right)^\mu + \left(\frac{x_3}{\alpha_3}\right)^\mu = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

durch Polarisierung von (9) in bezug auf einen passend gewählten Kegelschnitt erhalten werden kann; in der Tat koinzidieren die Gleichungen (13) und (14), wenn die k_1, k_2, k_3 folgender Bedingung genügen

$$k_1 a_1 \alpha_1 = k_2 a_2 \alpha_2 = k_3 a_3 \alpha_3 .$$

Die vorigen Formeln führen noch zu weiteren Folgerungen. Wenn man die x aus den Gleichungen (9) und (11) eliminiert, so findet man

$$(a_1\xi_1)^{\frac{m}{m-1}} + (a_2\xi_2)^{\frac{m}{m-1}} + (a_3\xi_3)^{\frac{m}{m-1}} = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

dies ist die Tangentialgleichung der Kurve (9), und es ist bemerkenswert, daß sie dieselbe Gestalt hat wie Gleichung (9), nur der Exponent m ist zu μ geworden; diese Zahl kann daher der Tangential-Index oder -Exponent der betrachteten Kurve genannt werden.

Man erkennt alsbald, **daß die Polarkurve jeder Ordnung r eines beliebigen Punktes der Ebene in bezug auf eine trianguläre Kurve mit dem Exponenten m eine analoge Kurve mit dem Exponenten $(m - r)$ ist, die dasselbe Fundamentaldreieck hat.** Betrachten wir insbesondere die beiden Kurven

$$\left(\frac{x_1}{l_1}\right)^p + \left(\frac{x_2}{l_2}\right)^p + \left(\frac{x_3}{l_3}\right)^p = 0, \qquad \left(\frac{x_1}{m_1}\right)^q + \left(\frac{x_2}{m_2}\right)^q + \left(\frac{x_3}{m_3}\right)^q = 0; \quad . \quad (16)$$

die letzte Polare eines Punktes der ersteren in bezug auf die zweite hat zur Gleichung

$$\frac{x_1^{q-1} X_1}{m_1^q} + \frac{x_2^{q-1} X_2}{m_2^q} + \frac{x_3^{q-1} X_3}{m_3^q} = 0;$$

daher sind seine Koordinaten $x_1 x_2 x_3$ gegeben durch die Formeln

$$r\xi_i = \frac{x_i^{q-1}}{m_i^q} \cdots (i = 1, 2, 3);$$

eliminiert man mit Hilfe dieser Gleichungen die x aus der ersten Gleichung (16), so findet man

$$\left(\frac{m_1^{\frac{q}{q-1}}}{l_1}\right)^p \xi_1^{\frac{p}{q-1}} + \left(\frac{m_2^{\frac{q}{q-1}}}{l_2}\right)^p \xi_2^{\frac{p}{q-1}} + \left(\frac{m_3^{\frac{q}{q-1}}}{l_3}\right)^p \xi_3^{\frac{p}{q-1}} = 0.$$

Dies beweist, daß, **wenn zwei trianguläre Kurven mit den Exponenten p und q gegeben sind, bezogen auf dasselbe Dreieck, so ist die Enveloppe der letzten Polaren der Punkte der ersteren in bezug auf die zweite eine Kurve derselben Art mit dem Tangentialexponenten $\frac{p}{q-1}$.** Der andere Exponent ist somit $\frac{p}{p-q+1}$. Es möge bemerkt werden, daß dieser Satz für $q = 2$ mit dem schon früher (S. 342) aufgestellten übereinstimmt; ferner, daß die Exponenten der resultierenden Kurven sich nicht ändern, wenn man die Rollen der beiden Kurven (16) vertauscht, falls $p = q$ oder $p + q = 1$.

Man setze

$$\varrho x_i' = x_i^m, \quad (i = 1, 2, 3); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

dann gelangt man zu einer Korrespondenz zwischen den Punkten $P(x_1, x_2, x_3)$ einer Ebene Π und den Punkten $P'(x_1', x_2', x_3')$ einer zweiten Ebene Π'. Nun wird infolge von (17) die Gleichung (9) zu

$$\frac{x_1'}{a_1^m} + \frac{x_2'}{a_2^m} + \frac{x_3'}{a_3^m} = 0,$$

welche eine Gerade darstellt. Folglich: **Die triangulär-symmetrischen Kurven sind solche Kurven, die in der Ebene Π den Geraden der Ebene Π' entsprechen bei einer geometrischen Transformation, die durch die Gleichungen (17) bestimmt ist.** Von diesem Gesichtspunkte aus wurden die triangulär-symmetrischen Kurven neuerdings von E. Timerding untersucht, der, weil er sie für neue Kurven hielt, sie mit dem neuen Namen courbes-puissances belegte.[1])

Die Untersuchung der Krümmung der triangulär-symmetrischen Kurven liefert einen wichtigen neuen Satz, den wir aus dem in Nr. 125 bewiesenen in folgender Weise ableiten können. Wir betrachten zwei Laméscbe Kurven Γ_m und Γ_n in einer Ebene π mit den Indizes m und n, die sich einander im Punkte P berühren. Wir projizieren sie auf eine Ebene π', die nicht zu π parallel ist. Dann erhalten wir zwei trianguläre Kurven Γ'_m und Γ'_n, die sich einander in P', der Projektion von P, berühren. Nennen wir nun die Krümmungsradien von Γ_m und Γ_n in P bzw. R_m und R_n, sowie die von Γ'_m und Γ'_n in P' bzw. R'_m und R'_n. Zufolge des früher angeführten Satzes haben wir dann $\frac{R_m}{R_n} = \frac{n-1}{m-1}$. Nun ist bekannt,[2]) daß, wenn zwei Kurven sich in einem Punkte berühren, sich das Verhältnis ihrer Krümmungen in diesem Punkte durch irgendwelche projektive Transformation nicht ändert. Demnach ist $\frac{R'_m}{R'_n} = \frac{R_m}{R_n}$. Diese Beziehung mit der vorigen kombiniert ergibt

$$\frac{R'_m}{R'_n} = \frac{n-1}{m-1},$$

welche Gleichung folgenden Satz von Jamet ausdrückt: **Wenn zwei triangulär-symmetrische Kurven mit den Exponenten m und n das Fundamentaldreieck gemeinsam haben und sich in einem Punkte berühren, so ist das Verhältnis der Krümmungen in diesem Punkte $\frac{m-1}{n-1}$.** Setzen wir im speziellen $n = -1$: **Der Krümmungsradius einer triangulär-symmetrischen Kurve mit dem Exponenten m steht in dem Verhältnis $\frac{2}{1-m}$ zum Krümmungsradius in P desjenigen dem Fundamentaldreieck umbeschriebenen Kegelschnittes, der die Kurve in P berührt**[3]). Demnach ist die Konstruktion des Krümmungs-

---

1) S. den Aufsatz *Sur une certaine famille de courbes algébriques* (Nouv. Ann. Math., 3e Sér., XVII, 1898).

2) R. Mehmke, *Über zwei die Krümmung von Kurven und das Gaußsche Krümmungsmaß von Flächen betreffende Eigenschaften der linearen Punkttransformationen* (Zeitschr. Math. Phys. XXXVI, 1891); E. Wölffing, *Das Verhältnis der Krümmungsradien im Berührungspunkte zweier Kurven* (Das. XXXVIII, 1893).

3) Jamet, *Sur les courbes et les surfaces tetraédrales symétriques* (Ann. Ec.

radius in einem beliebigen Punkte irgend einer triangulären Kurve zurückgeführt auf die Konstruktion des Krümmungskreises in P des Kegelschnittes, der durch die vier Punkte P, A_1, A_2, A_3 und die Tangente in P bestimmt ist[1]).

127. Der in der Gleichung (9) auftretende Exponent m ist der Annahme gemäß eine rationale positive oder negative Zahl; den absoluten Wert desselben, soweit als möglich abgekürzt, wollen wir mit $\frac{p}{q}$ bezeichnen. Dann sehen wir, wenn wir die Gleichung (9) rational machen, daß, wenn $m = \frac{p}{q}$ ist, die entsprechende Kurve von der Ordnung pq ist; wenn dagegen $m = -\frac{p}{q}$, so ist ihre Ordnung $2pq$. Im ersten Falle geht die Kurve nicht durch die Ecke des Fundamentaldreiecks; im zweiten Falle dagegen hat sie in jeder Ecke des Fundamentaldreiecks die Vielfachheit pq; die entsprechenden Tangenten reduzieren sich auf nur p verschiedene Geraden. In diesem Falle schneidet die Kurve die Seiten des Fundamentaldreiecks nur in den Ecken. Wenn aber m positiv ist, so bilden die $p \cdot q$ Schnittpunkte mit einer beliebigen Seite des Fundamentaldreiecks p Gruppen von je q zusammenfallenden Punkten.

Da, wie wir (Nr. **126**) gesehen haben, die Tangentialgleichung einer triangulären Kurve von derselben Form wie die Punktgleichung ist, so entsprechen jenen Eigenschaften, zu denen uns obige Diskussion der Gleichung (9) führte, ebenso viele andere infolge der Dualität: verweilen wir einen Augenblick bei der Besprechung derjenigen, welche sich auf die Klasse der untersuchten Kurve beziehen. Im allgemeinen wird der Tangentialexponent der Kurve (9) durch $\mu = \frac{m}{m-1}$ gegeben. Wenn nun $m = \frac{p}{q}$, so ist $\mu = \frac{p}{p-q}$; daher, wenn $p > q$, so ist die Klasse $p(p-q)$; wenn aber $p < q$, ist die Klasse $2(q-p)$; ist hingegen $m = -\frac{p}{q}$, so ist $\mu = \frac{p}{p+q}$, und die Klasse der Kurve ist immer $= p(p+q)$. Dieses verschiedene Verhalten hat La Gournerie veranlaßt, die triangulären Kurven in drei Arten einzuteilen: in die erste rechnete er diejenigen, bei denen der Exponent m größer als 1, in die zweite, bei denen er zwischen 0 und 1 liegt und in die dritte die mit negativen Exponenten. Jede Spezies wird, ebenso wie

norm. sup. 3e Sér. IV, 1887, Supplément). Vgl. auch F. Machovec, *Über die Krümmungsmittelpunkte der Dreieckskurven (courbes triangulaires)* (Prager Ber. 1891); Cesàro-Kowalewsky, *Natürliche Geometrie* S. 129.

1) Diese Aufgabe, gelöst von Chasles und dann von Mannheim, wurde neuerdings von G. Fouret untersucht in dem Aufsatze *Construction du rayon de courbure des courbes triangulaires symétriques, de courbes planes anharmoniques et des lignes asymptotiques de la surface de Steiner* (Comptes Rend. CX, 1890).

die Laméschen Kurven, eingeteilt in drei Arten, jenachdem von den Zahlen p und q nur die eine oder beide Zahlen ungerade sind; die speziellen Eigenschaften jeder der neun resultierenden Arten sind von dem oben erwähnten französischen Geometer ausführlich untersucht worden, und wir verweisen den Leser, der weitere Auskunft wünscht, auf dessen Arbeit. Hier sollen uns jedoch noch einige Betrachtungen über das Geschlecht jener Kurven beschäftigen[1]). Wir nehmen zu dem Zwecke die Gleichung (9) und unterwerfen sie einer projektiven Transformation die durch die Formeln

$$z = \frac{a_3}{a_1}\frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{a_3}{a_2}\frac{x_2}{x_3}$$

definiert ist. Dann bekommen wir die Kurve

$$x^{\pm\frac{p}{q}} + y^{\pm\frac{p}{q}} + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\Gamma)$$

wobei $\pm\frac{p}{q} = m$ und p und q positive ganze relativprime Zahlen sind. Sie ist von demselben Geschlechte wie (9). Wendet man auf sie die Transformation an

$$x = X^{\pm q}, \quad y = Y^{\pm p} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (T)$$

so bekommt man die Kurve mit der Gleichung

$$X^p + Y^q + 1 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\Delta)$$

die von der Ordnung p ist und keinen Doppelpunkt hat. Nun zeigen uns die Formeln (T) sogleich, daß jedem Punkte der Kurve Δ ein bestimmter und einziger von Γ entspricht. Aber es läßt sich auch umgekehrt zeigen, daß jedem Punkte von Γ im allgemeinen ein einziger von Δ entspricht; folglich haben beide Kurven dasselbe Geschlecht. Nun ist aber Δ infolge der obigen Bemerkung vom Geschlechte $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$, daher haben wir den Satz: **Eine triangulärsymmetrische Kurve mit dem Index $m = \pm\frac{p}{q}$ ist vom Geschlechte $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$.**

Wir beschließen dieses Kapitel mit dem Hinweise auf einen bemerkenswerten Grenzfall der triangulären Kurven[2]). Schreiben wir Gleichung (9) in folgender Weise

$$c_1 x_1^m + c_2 x_2^m + c_3 x_3^m = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

und nehmen an, daß

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

1) V. Jamet, *Sur le genre des courbes planes triangulaires.* (Bull. Soc. math. France XVI, 1887/88).

2) Cesàro-Kowalewsky, *Natürliche Geometrie*, S. 130.

Nun suchen wir den Grenzwert, den Gleichung (18) erreicht, wenn m sich dem Werte 0 nähert. Beachten wir nun, daß, wenn c eine endliche Konstante bedeutet

$$\lim_{m=0} (m \cdot c) = 0,$$

so ist der gesuchte Grenzwert

$$\lim_{m=0} (c_1 x_1^m + c_2 x_2^m + c_3 x_3^m) = \lim (m c)$$

oder auch

$$\sum_{k=1}^{k=3} c_k \lim \frac{x_k^m - 1}{m} = c.$$

Es ist aber

$$\lim_{m=0} \frac{x_k^m - 1}{m} = \log x_k$$

und daher

$$\sum_{k=1}^{k=3} c_k \log x_k = c,$$

oder, wenn wir $e^c = C$ setzen,

$$x_1^{c_1} \cdot x_2^{c_2} \cdot x_3^{c_3} = C.$$

Dies ist die gesuchte Gleichung; infolge von (19) kann sie geschrieben werden

$$\left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{c_1} \cdot \left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{c_2} = C;$$

oder, wenn wir $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$ setzen

$$x^{c_1} \cdot y^{c_2} = C. \qquad (20)$$

Wenn die Seite $x_3 = 0$ ins Unendliche verlegt wird, so stellt diese Gleichung, wenn c_1 und c_2 rationale Zahlen sind, eine Parabel oder Hyperbel höherer Ordnung dar. Wenn aber c_1 und c_2 irrational sind, so erhält man Kurven, die nicht mehr algebraisch sind, und die man interszendente binomische Parabeln nennen kann. Wir werden ihnen von einem anderen Gesichtspunkte aus im folgenden Abschnitte (Kap. 19) wieder begegnen, wollen jedoch hier bemerken, daß der Satz von Jamet (S. 344) auf die hier betrachteten Kurven angewendet zu folgendem Schlusse führt: **Der Krümmungsradius in einem Punkte P einer binomischen, algebraischen oder interszendenten Parabel ist doppelt so groß, als der Radius desjenigen Kreises, der den dem Fundamentaldreieck umbeschriebenen und jene Kurve in P berührenden Kegelschnitt in P oskuliert.** Diesen Satz teilte Jamet schon im Jahre 1875 der Société mathématique de France mit.

Sechstes Kapitel.

Die Polyzomalkurven.

128. Den Namen „polyzomal curves“ (abgeleitet von τὸ ζῶμα, der Gürtel) hat A. Cayley[1]) allen denjenigen Kurven gegeben, die durch eine Gleichung von folgender Form dargestellt werden

$$\sum_{i=1}^{i=\nu} \sqrt{U_i} = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

wo die Wurzeln beliebiges Vorzeichen haben und die U ternäre Formen r^{ten} Grades in projektiven Koordinaten eines Punktes sind[2]). Man setzt immer voraus, daß $\nu > 2$, da in den Fällen $\nu = 1$ und $\nu = 2$ die Gleichung (1) zu $U_1 = 0$ und $U_1 - U_2 = 0$ wird, deren Untersuchung keine Verschiedenheit bietet von der einer allgemeinen Kurve r^{ten} Grades; man setzt ferner voraus, daß zwei beliebige der U keinen quadratischen Quotienten haben. Unter den somit allgemein betrachteten Typus fallen eine große Zahl schon bekannter Kurven; vor allen die zentrischen Kegelschnitte, wenn man sie z. B. betrachtet als Örter der Punkte, für welche die Summe oder Differenz der Entfernungen von zwei festen Punkten konstant ist; ferner die Cartesischen Ovale (Abschn. III, Kap. 9) als Örter der Punkte, für welche die Summe der Abstände von zwei festen Punkten, mit gegebenen Zahlen multipliziert, konstant ist (Nr. 77), und endlich alle im Kap. 10 des III. Abschn. untersuchten Kurven. Wir können noch hinzufügen die von Descartes in dem Briefe an P. Mersenne vom 23. Aug. 1638 betrachtete Kurve, in welchem er Fermat auffordert, die von ihm erfundenen Methoden anzuwenden „à trouver la tangente d'une ligne courbe qui a cete prorieté, que l'aggregat des 4 lignes tirées de chascun de ses poins vers 4 autres poins donnez, comme vers A, B, C, D, est touiours esgale à une ligne donnée“[3]). Endlich ist eine solche Kurve ein Spezialfall der Tschirnhausenschen Kurve mit n Brennpunkten; jede derselben ist der Ort eines Punktes M, der einer Beziehung von folgendem Typus genügt

$$\sum_i \mu_i \cdot \overline{MF_i} = const., \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

wo F_i feste Punkte und die μ_i gegebene Konstanten sind[4]).

---

1) S. die Abh. *On polyzomal curves, otherwise the curves* $\sqrt{U} + \sqrt{V} + \cdots = 0$ (*Trans. R. Soc. Edinburgh,* XXV, 1868; *The collected Papers,* VI). — Der besondere Fall $2y = \sqrt{6x - x^2} + \sqrt{6x + x^2} + \sqrt{36 - x^2}$ wurde von E. Beutel untersucht: m. s. *Algebraische Kurven* (Leipzig, 1909) S. 123 und Fig. 52.

2) Die Franzosen haben für die Kurven $U_i = 0$ den Namen ceintures adopiert.

3) *Œuvres de Descartes* (éd. Adam et Tannery) II (Paris, 1898) S. 324.

4) *Medicina mentis* (Amsterdam, 1686) S. 91.

Die Gleichung (1) enthält $\nu \cdot \frac{(r+1)(r+2)}{2} - 1$ wesentliche Konstanten; wenn man sie rational macht, so wird sie zu

$$\Pi \sum_{i=1}^{i=\nu} \sqrt{U_i} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1')$$

wo das Symbol Π bedeuten soll, daß man alle die $2^{\nu-1}$ Polynome betrachten soll, die man aus dem Polynom $\sqrt{U_1} + \sqrt{U_2} + \sqrt{U_3} + \cdots \sqrt{U_\nu}$ erhält, wenn man das Vorzeichen des ersten Summanden festhält und die Vorzeichen der folgenden auf alle möglichen Weisen variiert. Das erste Glied von (1′) ist somit im allgemeinen eine rationale Funktion vom Grade $2^{\nu-1} \cdot \frac{1}{2} r$, zeigt also, **daß die durch Gleichung (1) dargestellte Kurve von der Ordnung $n = 2^{\nu-2} \cdot r$ ist.** Gibt man den in Gleichung (1) auftretenden Wurzeln alle die verschiedenen möglichen Vorzeichen, so erhält man im allgemeinen $2^{\nu-1}$ Zweige der Kurve, die zu je zwei und zwei gemeinsame Punkte haben. Man erhält diese Punkte, wenn man die Schnitte der Kurven von folgendem Typus betrachtet:

$$\sqrt{U_{h_1}} + \sqrt{U_{h_2}} + \cdots + \sqrt{U_{h\alpha}} = 0, \; \sqrt{U_{h\alpha+1}} + \sqrt{U_{h\alpha+2}} + \cdots + \sqrt{U_{h_\nu}} = 0,$$

wo $h_1 h_2 h_3 \cdots h_\nu$ eine Permutation der Zahlengruppe $1, 2, 3 \cdots \nu$ ist. Wenn $\alpha = 1$ oder $= \nu - 1$, so heißen diese Kurven Zoma und Antizoma, während sie im allgemeinen Falle parazomale komplementäre Kurven heißen. Man kann sich leicht davon überzeugen, **daß jeder Schnittpunkt einer Zoma mit der entsprechenden Antizoma ein Berührungspunkt jener mit der gegebenen Polyzomalkurve ist.** Diese Schnitte sind für jede Zoma an Zahl $r \cdot 2^{\nu-2} r$, daher im ganzen $2^{\nu-3} \cdot \nu r^2$; da jeder ein Berührungspunkt der Polyzomalkurve mit ihrer Zoma ist, so wird diese äquivalent mit $2^{\nu-2} \nu r^2$ Schnitten der Kurve (1) mit den eigenen Zomen; somit erschöpfen sie alle Schnitte jener (die von der Ordnung $2^{\nu-2} r$ ist) mit ihren ν Zomen (die von der Ordnung r sind).

Umgekehrt die $2^{\alpha-2} r \cdot 2^{\beta-2} r = 2^{\nu-4} r^2$ Schnitte der beiden komplementären parazomalen, durch die Gleichung (2) dargestellten Kurven sind Doppelpunkte der gegebenen Kurve. Sie sind auch die einzigen vielfachen Punkte, die die Kurve im allgemeinen besitzt. Welches ist ihre Anzahl? Um diese Frage beantworten zu können, beachten wir, daß, wenn man für α einen der Werte $2, 3, 4, \cdots, \nu - 2$ wählt, man $\binom{\nu}{\alpha}$ Systeme vom Typus (2) erhält; jedes derselben entsteht ebenso aus dem Werte α als aus dem Werte $\nu - \alpha$; daher ist die Anzahl der verschiedenen Systeme vom Typus (2)

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha=2}^{\alpha=\nu-2} \binom{\nu}{\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu} \left[\binom{\nu}{\alpha} - 2(\nu+1) \right] = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\nu} \binom{\nu}{\alpha} - (\nu+1) = 2^{\nu-1} - \nu - 1.$$

Daraus ergibt sich, daß die Gesamtzahl der Doppelpunkte der Kurve ausgedrückt wird durch

$$d = 2^{\nu-4} r^2 (2^{\nu-1} - \nu - 1).$$

Da die Kurve im allgemeinen keine Spitzen besitzt, so ist ihre

$$\text{Klasse} \quad = 2^{\nu-3} r [r(\nu+1) - 2],$$

während ihr

$$\text{Geschlecht} = 2^{\nu-4} r [r(\nu+1) - 6] + 1$$

ist.

129. Diese Zahlen erfahren Veränderungen, wenn die ν Kurven $U_i = 0$ eine gewisse Zahl k von Punkten gemeinsam haben; es zeigt sich im besonderen, daß die Zahl der Doppelpunkte infolgedessen um $2^{\nu-4}(\nu-1)k$ wächst, und daß daher das Geschlecht sich um ebenso viel und die Klasse der Kurve sich um das Doppelte vermindert. Im Speziellen, wenn die U folgende Gestalt haben

$$U_i = l_i(\Theta + L_i \Phi_i),$$

wo die l_i Konstanten sind und die Größen Θ, L_i, Φ_i ternäre Formen vom Grade bezw. r, s, $r-s$ sind, so wird die Zahl der Doppelpunkte ausgedrückt durch

$$2^{\nu-4} r [(2^{\nu-1} - 2) r - (\nu-1) s];$$

der vorliegenden Annahme kann man aber noch die hinzufügen, daß die linke Seite von (1′) den Faktor Φ^ω habe, wo ω eine positive ganze Zahl ist; alsdann erfährt die Ordnung der Kurve eine Verminderung um $\omega(r-s)$ Einheiten.

In besonderen Fällen kann es überdies eintreten, daß die Polyzomalkurve in andere von niederer Ordnung zerfällt. Als Beweis möge folgendes von Cayley angeführte Beispiel dienen:

Man betrachte die Tetrazomale, die folgende Gleichung hat:

$$\sqrt{a_1 U_1} + \sqrt{a_2 U_2} + \sqrt{a_3 U_3} + \sqrt{a_4 U_4} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

und nehme an, daß die Funktionen U_i durch die Identität verknüpft seien

$$k_1 U_1 + k_2 U_2 + k_3 U_3 + k_4 U_4 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

wo die k gegebene Konstanten sind. Wenn man aus den Gl. (3), (4) U_4 eliminiert, so findet man:

$$k_4 \left(\sqrt{a_1 U_1} + \sqrt{a_2 U_2} + \sqrt{a_3 U_3}\right)^2 + a_4 (k_1 U_1 + k_2 U_2 + k_3 U_3) = 0,$$

oder

$$0 = (k_4 a_1 + k_1 a_4) U_1 + (k_4 a_2 + k_2 a_4) U_2 + (k_4 a_3 + k_3 a_3) U_3$$
$$+ 2 k_4 \sqrt{a_2 a_3} \sqrt{U_2} \sqrt{U_3} + 2 k_4 \sqrt{a_3 a_1} \sqrt{U_3} \sqrt{U_1} + 2 k_4 \sqrt{a_1 a_2} \sqrt{U_1} \sqrt{U_2}.$$

Die rechte Seite kann als eine homogene quadratische Funktion von $\sqrt{U_1}, \sqrt{U_2}, \sqrt{U_3}$ angesehen werden, sie zerfällt als Produkt in zwei lineare Faktoren, wenn die Determinante (Diskriminante)

$$\begin{vmatrix} k_1 a_4 + k_4 a_1 & k_4\sqrt{a_1 a_2} & k_4\sqrt{a_1 a_3} \\ k_4\sqrt{a_1 a_2} & k_2 a_4 + k_4 a_2 & k_4\sqrt{a_2 a_3} \\ k_4\sqrt{a_1 a_3} & k_4\sqrt{a_2 a_3} & k_3 a_4 + k_4 a_3 \end{vmatrix} = 0$$

ist, das will sagen, wenn

$$\frac{a_1}{k_1} + \frac{a_2}{k_2} + \frac{a_3}{k_3} + \frac{a_4}{k_4} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Es geht hieraus hervor, **wenn die Beziehungen (4) und (5) bestehen, so zerfällt die Tetrazomale (3) in zwei Trizomale.**

Die Darlegungen dieses Kapitels scheinen uns hinreichend zur Charakterisierung der bis jetzt angestellten Untersuchungen über eine Klasse von Kurven, mit denen sich nach Cayley noch keiner beschäftigt hat. Dennoch sind die Fragen über die Polyzomalkurven, die noch zu behandeln wären, sehr zahlreich. Analytisch haben sie zwar eine einfache und klare Definition, aber unbekannt ist, welches ihre charakteristischen geometrischen Eigenschaften sind, mit anderen Worten, welches ist die geometrische Definition der Polyzomalkurven? Außerdem, mit Bezug darauf, daß es Kurven gibt, die in mehrfacher Weise polyzomal sind[1]), welches sind die Kurven, die mehrerer analytischer Darstellungen vom Typus (1) fähig sind? Anderseits, mit Rücksicht darauf, daß es zerfallende Polyzomalkurven gibt, welche Relationen müssen zwischen den U statthaben, damit die Kurve (1) in Polyzomalkurven niederer Ordnung zerfalle? Diese Probleme sind schwierig und genügend interessant, um die Aufmerksamkeit der Mathematiker auf sich zu ziehen. Erst wenn diese gelöst sind, dürfte es an der Zeit sein, zur Untersuchung der Kurven

$$\sum_{i=1}^{i=\nu} \sqrt[m]{U_i} = 0$$

überzugehen, die eine natürliche Erweiterung der Polyzomalkurven sind.[2]).

1) Jeder Kegelschnitt ist es in ∞^3 Weisen, entsprechend den ∞^3 ihm umbeschriebenen Dreiecken, und jede Kurve vierter Ordnung in einer begrenzten Zahl von Weisen (vgl. Nr. 81 und Salmon-Fiedler, *Analyt. Geom. der höheren ebenen Kurven,* 2. Aufl. Leipzig, 1873, S. 295) als Polyzomalkurve darstellbar.

2) Zu diesem Typus gehören die Kurven konstanten Potentials, deren kartesische Gleichung

$$\sum_i \frac{k_i}{\sqrt{(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2}} = const.$$

ist; man findet sie behandelt in der Abhandlung von G. Scheffers, *Funktionen der Abstände von festen Punkten* (Würtemberger Mitth., 2te Reihe, II, 1900).

Siebentes Kapitel.

Die Kurven von Darboux und die Equilateren von P. Serret.

130. Zu den in den fünf vorhergehenden Kapiteln untersuchten Kurven führte uns ein einziger, jedoch in verschiedener Weise gehandhabter Begriff, nämlich die Verallgemeinerung der Kegelschnitte, indem man eine ihrer kanonischen Gleichungen verallgemeinerte. Die Erweiterungen, mit denen wir uns jetzt beschäftigen wollen, verfolgen einen ähnlichen Zweck, stützen sich jedoch auf besondere geometrische Eigenschaften, deren sich die Kurven zweiter Ordnung erfreuen.

Wir betrachten eine Parabel und zwei feste Tangenten derselben, m und n; M und N seien ihre Berührungspunkte, M_∞ und N_∞ ihre unendlich fernen Punkte und O ihr Schnittpunkt. Wir bezeichnen nun mit $T''T'$ die Punkte, in denen eine beliebige dritte Tangente der Kurve die Geraden m und n schneidet. Da dann die Doppelverhältnisse $(ONT'N_\infty)$ und $(MOT''M_\infty)$ einander gleich sind, so hat man

$$\frac{ON}{OT'} = \frac{MO}{MT''};$$

weil aber $MT'' = OT'' - OM$, so kann man schreiben

$$\frac{OT'}{ON} + \frac{OT''}{OM} = 1.$$

Demnach begrenzt eine beliebige Tangente der Parabel auf zwei festen Tangenten zwei variable, von dem gemeinsamen Schnittpunkt an zu rechnende Strecken, die durch eine lineare Relation mit konstanten Koeffizienten miteinander verknüpft sind. Dieser Satz führte G. Darboux[1]) zur Betrachtung der Enveloppe $\varDelta$ der Geraden, die n gegebene Gerade r_k $(k = 1, 2, 3 \ldots n)$ in ebensovielen Punkten A_k schneiden und deren Abstände von einer gleichen Zahl Punkten O_k, die auf diesen Geraden liegen, der Gleichung genügen

$$\sum_k \lambda_k \cdot \overline{O_k A_k} = c \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

wo die λ gegebene Zahlenkoeffizienten sind und c eine gegebene Länge bedeutet. Um eine derartige Enveloppe zu charakterisieren, wollen wir annehmen, daß

$$\frac{x - x_k}{\cos \alpha_k} = \frac{y - y_k}{\sin \alpha_k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

die Gleichung der Geraden r_k sei, während x_k, y_k die Koordinaten des

1) *Sur une classe de courbes unicursales* (C. R., XCIV, 1882; Ann. École norm. sup., 3[te] Serie, VII, 1890).

Punktes O_k seien. Es folgt daraus, wenn l_k der Abstand eines beliebigen Punktes (x, y) der Geraden r_k vom Punkte O_k ist, daß

$$x = x_k + l_k \cos \alpha_k, \qquad y = y_k + l_k \sin \alpha_k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

sein wird. Wir nehmen nun einen beliebigen Punkt P (x_o, y_o) und untersuchen, wie viele Geraden der Enveloppe Δ durch ihn hindurchgehen. Es sei

$$x - x_o = \lambda (y - y_o) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

eine derselben; sie schneidet r_k in einem Punkte A_k, dessen Abstand von O_k nichts anderes ist als der Wert von l_k, den man erhält, wenn man die Gleichung auflöst, die aus der Elimination von x, y aus den Gleichungen (3) (4) resultiert. Dieser ist also

$$\overline{O_k A_k} = \frac{(x_k - x_o) - \lambda (y_k - y_o)}{\lambda \sin \alpha_k - \cos \alpha_k}.$$

Setzen wir diesen Wert in Gleichung (1) ein, so erhalten wir

$$\sum_k \lambda_k \frac{(x_k - x_o) - \lambda (y_k - y_o)}{\lambda \sin \alpha_k - \cos \alpha_k} = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Da diese Gleichung vom Grade n in λ ist, und jeder ihrer Wurzeln eine Gerade der Enveloppe Δ entspricht, die durch den beliebigen Punkt P geht, so schließen wir: **Die Enveloppe Δ ist von der n^{ten} Klasse.** Falls die Gleichung (4) zwei einander gleiche Wurzeln λ enthält, so gehört auch der Punkt P der Enveloppe Δ an, man erhält daher die Punktgleichung von Δ, wenn man die Diskriminante der linken Seite von (5) als Funktion von λ aufgefaßt gleich 0 setzt; diese Diskriminante ist nun vom Grade $2(n-1)$ in den Koeffizienten, und diese sind linear in den Koordinaten x_0, y_0 des Punktes P; **demnach ist die Kurve Δ im allgemeinen von der Ordnung $2(n-1)$.** — Wir wollen auch die Tangenten aufsuchen, die einer gegebenen Richtung parallel sind; wir betrachten zu dem Zwecke die Gleichung

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

nehmen an, daß in dieser der Winkel α gegeben sei, und suchen p in der Art zu bestimmen, daß die durch sie dargestellte Gleichung die Kurve Δ berührt. Wir eliminieren daher aus Gleichung (6) die x, y vermittelst (3) und erhalten folgenden Wert für $l_k = \overline{O_k A_k}$

$$\overline{O_k A_k} = - \frac{x_k \cos \alpha + y_k \sin \alpha - p}{\cos (\alpha - \alpha_k)};$$

setzen wir dies in (1) ein, so wird jene zu

$$\sum_k \lambda_k \frac{x_k \cos \alpha + y_k \sin \alpha - p}{\cos (\alpha - \alpha_k)} + c = 0 \, . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Da dies eine lineare Gleichung in λ ist, so sieht man, **daß die Kurve Δ**

nur eine einzige Tangente parallel zu einer gegebenen Richtung hat; dies bedeutet dann, **daß die unendlich ferne Gerade $(n-1)$-fache Tangente der Enveloppe $\varDelta$ ist**[1]. Die Kurve $\varDelta$ ist infolgedessen rational und hat keine anderen vielfachen oder Inflexions-Tangenten; sie ist aber mit $2(n-2)(n-3)$ Doppelpunkten und $3(n-2)$ Spitzen versehen.

Eliminieren wir p aus den Gleichungen (6) und (7), so erhalten wir

$$\sum_k \lambda_k \frac{(x-x_k)\cos\alpha + (y-y_k)\sin\alpha}{\cos(\alpha-\alpha_k)} = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Lassen wir in dieser Gleichung α variieren, so stellt sie alle Geraden der fraglichen Enveloppe dar. Setzen wir im Speziellen $\alpha = \frac{\pi}{2} + \alpha_k$ ein, so fällt α fort, **folglich berührt die Enveloppe $\varDelta$ die n Geraden r_k.**

Setzen wir $n = 2$, so erhält man eine Kurve zweiter Ordnung, die die beiden Geraden und die unendlich ferne Gerade berührt: sie ist also die Parabel, von der wir ausgegangen sind. Nehmen wir $n = 3$, so erhält man eine Kurve 3ter Klasse und 4ter Ordnung, ohne Doppelpunkte, aber mit 3 Spitzen, welche die unendlich ferne Gerade in den Kreispunkten berührt: sie ist demnach eine dreispitzige Hypozykloide (vgl. Nr. **73**). Setzen wir schließlich $n = 4$, so erhält man eine Kurve 4ter Klasse und 6ter Ordnung, die mit 4 Doppelpunkten und 6 Spitzen versehen ist und die unendlich ferne Gerade dreifach berührt; auf diese Kurve stieß Laguerre im Verlaufe seiner Untersuchungen über Transformationen durch reziproke Halbstrahlen; nach seinem Vorschlage wird sie Hyperzykel genannt[2].

131. Wir nehmen wieder die Betrachtung einer Parabel auf; a, b, c, d seien vier feste Tangenten derselben und t eine bewegliche Tangente. Es seien A, B, C die Spurpunkte von a, b, c auf d; L, M, N die analogen Schnitte auf t. Die unendlich ferne Gerade und die Geraden a, b, c bestimmen auf den Tangenten d und t projektive Punktreihen, daher ist

$$(ABCD_\infty) = (LMNT_\infty), \quad \text{oder} \quad \frac{AC}{BC} = \frac{LN}{MN}$$

oder, wenn man will,

$$\overline{MN}\cdot\overline{AC} - \overline{LN}\cdot\overline{BC} = 0;$$

daher besteht bei einer Parabel eine homogene Beziehung

---

1) Umgekehrt: eine beliebige Kurve von der Klasse n, welche die unendlich ferne Gerade als $(n-1)$fache Tangente hat, kann in der oben angegebenen Weise definiert werden, ebenso aber auch in derjenigen, die in der nachfolgenden Nummer auseinander gesetzt werden wird.

2) E. Laguerre, *Sur les hypercycles* (C. R., XCIV, 1882), *Sur les anticaustiques par reflexion de la parabole les rayons incidents étant parallèles* (Nouv. Ann. Math., 3e Sér., II, 1883) und *Sur les anticaustiques par réfraction de la parabole, les rayons incidents étant perpendiculaires à l'axe* (Id., V, 1885). Vgl. *Œuvres de Laguerre* II (Paris, 1905) S. 620, 637 und 675.

mit konstanten Koeffizienten zwischen den Strecken, die drei feste Tangenten auf einer beweglichen abschneiden. Um zu zeigen, daß die Enveloppen Δ sich einer ähnlichen Eigenschaft erfreuen, betrachten wir $n+1$ beliebige Geraden r_k $(k=0,1,2\ldots n)$ und suchen die Enveloppe der Geraden r, die sie in $(n+1)$ Punkten schneiden derart, daß

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \lambda_k \cdot \overline{A_k A_{k+1}} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

wo die λ wiederum gegebene Zahlenkoeffizienten sind. Es seien nun

$$\xi_k x + \eta_k y + 1 = 0 \ldots (k=0,1,2\ldots n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

die Gleichungen der Geraden r_k; nehmen wir nun einen beliebigen Punkt $P(x_0, y_0)$, so wird durch die beiden Gleichungen

$$x = x_0 + l\cos\alpha, \quad y = y_0 + l\sin\alpha; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

eine beliebige von ihm ausgehende Gerade dargestellt. Alsdann wird die Strecke PA_k durch den Wert l gemessen, den man durch Auflösung der Gleichung erhält, die aus der Elimination von x, y aus den Gleichungen (9) und (10) sich ergibt. Daher ist

$$\overline{PA_k} = -\frac{\xi_k x_0 + \eta_k y_0 + 1}{\xi_k\cos\alpha + \eta_k\sin\alpha},$$

und $$\overline{A_k A_{k+1}} = \frac{\xi_k x_0 + \eta_k y_0 + 1}{\xi_k\cos\alpha + \eta_k\sin\alpha} - \frac{\xi_{k+1} x_0 + y_{k+1} y_0 + 1}{\xi_{k+1}\cos\alpha + y_{k+1}\sin\alpha}.$$

Setzen wir diese in (8) ein, so erhält man eine Gleichung n^{ten} Grades in $\operatorname{tg}\alpha$, was beweist, **daß die Enveloppe der Geraden r von der n^{ten} Klasse ist.** Wenn wir nun die Geraden r suchen, die parallel zu einer gegebenen Richtung sind, so erkennt man — wenn man in analoger Weise, wie oben geschehen, verfährt — daß es deren nur eine einzige gibt; **demnach ist die unendlich ferne Gerade für die fragliche Enveloppe eine $(n-1)$-fache Gerade.** Somit hat man die Grundlagen, nun auf den vorhin ausgesprochenen Satz zu schließen. Die Enveloppen Δ können daher in doppelter Hinsicht als Verallgemeinerungen der gewöhnlichen Parabeln angesehen werden. Wir werden sie Kurven von Darboux I^ter Art nennen. Die Bezeichnung Kurven von Darboux II^ter Art werden wir für die Enveloppen reservieren, mit denen wir uns nun beschäftigen wollen.

132. Bekanntlich ist das von zwei festen Tangenten eines Kreises und einer beweglichen Tangente gebildete Dreieck von konstantem Umfange, sofern nur der Umfang des Dreiecks in passender Weise durchlaufen wird. Diese Bemerkung führte Darboux zu der Frage[1]):

---

1) *Sur une propriété de cercle* (C. R., XCIV, 1882; Ann. Ec. norm. sup., 3e Ser., VII, 1890).

Welches ist die Enveloppe der Geraden, die mit n Geradenpaaren ebenso viele Dreiecke mit einer konstanten Summe der Umfänge bildet? Wir wollen diese Enveloppe mit Ω_n bezeichnen, ihre Klasse mit ν und die gegebenen Geraden ferner mit r_k', r_k'', $(k = 1, 2, 3 \ldots n)$, mit s die gegebene Summe der Umfänge und mit O einen beliebigen Punkt ihrer Ebene. Eine durch O gezogene Gerade a bestimmt mit den Geradenpaaren $r_1' r_1''$, $r_2' r_2''$, $\cdots$, $r_{n-1}' r_{n-1}''$ $n-1$ Dreiecke; sei σ die Summe ihrer Umfänge; dann gibt es noch ∞^1 Geraden, die mit $r_n' r_n''$ ein Dreieck mit dem Umfange $s - \sigma$ bilden; ihre Enveloppe ist ein Kreis Ω_1, an den man von O aus zwei Tangenten $\bar{a}$ ziehen kann. Wenn eine derselben mit a zusammenfällt, so bekommt man eine durch O gehende Gerade der Enveloppe Ω_n. Wir ziehen durch O aber eine beliebige Gerade $\bar{a}$ und nennen den Umfang des Dreiecks, das sie mit $r_n' r_n''$ bildet, p; alle die Geraden, die mit den Paaren $r_1' r_1''$, $r_2' r_2''$, $\ldots$, $r_{n-1}' r_{n-1}''$ Dreiecke bilden, deren Umfangssumme $s - p$ ist, umhüllen eine Kurve Ω_{n-1}, an die man von O aus ν_{n-1} Tangenten a ziehen kann. Dies ist ein Beweis, daß zwischen den Geraden a und $\bar{a}$ eine algebraische Korrespondenz $(2, \nu_{n-1})$ besteht. Da dieselbe ν_n Koinzidenzen besitzt, so folgt daraus, daß $\nu_n = \nu_{n-1} + 2$ ist; ersetzen wir hierin n sukzessive durch $n-1$, $n-2, \ldots, 2$ und addieren die resultierenden Gleichungen, indem wir beachten, daß $\nu_1 = 2$, so schließen wir: $\nu_n = 2n$; **demnach ist die Enveloppe Ω_n von der Klasse $2n$.** — Wir bezeichnen jetzt mit ν_n' die Anzahl der Tangenten von Ω_n, die zu einer beliebigen Richtung parallel sind. Verfahren wir in ähnlicher Weise wie vorhin, so erhalten wir in den entsprechenden uneigentlichen Strahlenbüscheln $\nu_{n-1}' + 2$ Koinzidenzen, da nun diese durch die unendlich ferne Gerade doppelt gezählt und die zu jener Richtung parallelen Tangenten von Ω_n dargestellt werden, so erkennt man, daß $\nu_{n-1}' + 2 = \nu_n' + 2$; daher ist

$$\nu_n' = \nu_{n-1}' = \nu_{n-2}' = \cdots = \nu_1';$$

nun ist Ω_1 ein Kreis, also $\nu_1' = 2$, und folglich ist im allgemeinen $\nu_n' = 2$. Daraus geht hervor, **daß die unendlich ferne Gerade für die Enveloppe Ω_n eine $2(n-1)$-fache Gerade ist.**

Zu denselben Schlüssen kann man auch auf dem Wege der Rechnung gelangen. Man stelle die n gegebenen Geradenpaare dar durch die Gleichungen

$$\frac{x - x_k}{\sin(\alpha_k \mp \delta_k)} = \frac{y - y_k}{\cos(\alpha_k \mp \delta_k)} \quad (k = 1, 2, 3 \ldots n).$$

Wir nehmen dann einen beliebigen Punkt $P(x_0, y_0)$, ziehen durch ihn die beliebige Gerade

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha}$$

und suchen die Bedingung auf dafür, daß sie der gegebenen Enveloppe Ω_n angehöre. Wir werden dann die Gleichung finden

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{[(x_k - x_0)\cos\alpha + (y_k - y_0)\sin\alpha]\cos\delta_k}{\cos\frac{\alpha-\alpha_k+\delta_k}{2}\sin\frac{\alpha-\alpha_k-\delta_k}{2}} = s, \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

die als Grundlage der analytischen Untersuchung der fraglichen Enveloppe dienen kann, insbesondere zur Behandlung der algebraischen und geometrischen Fragen, von denen Darboux in seiner Abhandlung spricht und auf denen das erhebliche Interesse beruht, das die betrachteten Kurven beanspruchen dürfen. Wir können uns hier in das Studium derselben nicht vertiefen; bevor wir jedoch die Kurven von Darboux II[ter] Spezies verlassen, wollen wir noch bemerken, daß sie durch die Kreispunkte der Ebene gehen, rational sind und in speziellen Fällen sich auf Darbouxschen Kurven I[er] Spezies reduzieren. Außerdem können sie als die Polarreziproken in bezug auf einen Kreis angesehen werden von solchen Kurven, die eine Polargleichung von der Form

$$\varrho = f(\cos\omega, \sin\omega)$$

haben, wo f eine rationale, ganze oder gebrochene Funktion von $\cos\omega$ und $\sin\omega$ bedeutet.

133. Eine gleichseitige Hyperbel ist eine Kurve zweiter Ordnung, deren Asymptoten rechtwinklig aufeinander stehen. Gibt es nun Kurven $n$ter Ordnung, bei denen n Asymptoten in einen Punkt zusammenlaufend den umliegenden Winkelraum in n gleiche Teile teilen, also ein „reguläres Büschel" bilden? Diese Frage hat sich P. Serret vorgelegt, der den mit dieser Eigenschaft ausgestatteten Kurven den Namen Equilateren gab.[1])

Um die allgemeine Gleichung derselben zu finden, nehmen wir den Schnittpunkt der Asymptoten als Anfang und eine derselben als x-Achse. Die Gleichungen der Asymptoten selbst werden dann sein

$$x\cos\frac{2k\pi}{n} - y\sin\frac{2k\pi}{n} = 0. \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Daher ist die gesuchte Gleichung

$$\prod_{k=0}^{k=n-1}\left(x\cos\frac{2k\pi}{n} - y\sin\frac{2k\pi}{n}\right) - \varphi_{n-2}(x, y) = 0, \quad . \quad . \quad (13)$$

1) S. die Abhandlungen *Sur les hyperboles équilatères d'ordre quelconque; Sur les faisceaux réguliers et les équilatères d'ordre n* und *Sur les équilatères comprises dans les équations* $0 = \sum_1^{n-2} l_1 T_1' \equiv H_n$, $0 = \sum_1^{2k-1} l_1 T_1^n \equiv H_n + \lambda H_n'$ (C. R. CXI, 1895).

wo φ_{n-2} eine beliebige Funktion vom Grade $(n-2)$ in x, y ist. Diese Gleichung hängt von $\frac{n(n-1)}{2}$ Konstanten ab. Läßt man den Schnittpunkt und die Orientierung der Asymptoten beliebig sein, so wächst diese Zahl um 3, **daher hängt eine Equilatere $n$ter Ordnung von $\frac{n(n-1)}{2}+3$ Konstanten ab, d. h. von $2n-3$ Konstanten weniger, als eine allgemeine Kurve $n$ter Ordnung.** P. Serret hat mehrere hübsche Eigenschaften der Equilateren entdeckt, die man als Erweiterungen bekannter Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel auffassen kann, z. B. hat er bemerkt, daß in ähnlicher Weise, wie bei dieser, so auch bei jenen folgendes zutrifft: **zwei beliebige Equilateren bestimmen ein Büschel von Equilateren, deren Zentren auf einem Kreise liegen, und deren Asymptoten eine Hypozykloide umhüllen.** Bezüglich des Beweises verweisen wir der Kürze wegen den Leser auf die vorher erwähnten Artikel und bemerken, daß binnen Kurzem (Nr. **161**—**164**) wir auf eine besondere Kategorie von Equilateren stoßen werden, die uns die geometrische Darstellung der komplexen Zahlen liefern wird.[1])

Achtes Kapitel.

Die Rhodoneen (Rosenkurven) von G. Grandi.

134. Zu den Kurven, denen das gegenwärtige Kapitel hauptsächlich gewidmet ist, gelangte Guido Grandi, als er nach einer geometrischen Definition von Kurven suchte, welche die Gestalt von Blumen hätten, also Rosetten mit mehreren Blättern. Er nannte Rhodoneen die in der Ebene liegenden, Clelien die sphärischen. Hier werden wir uns ausschließlich mit den ersteren — die von den Franzosen Rosaces, von den Deutschen Rosenkurven oder auch Schleifelinien[2]) genannt werden — beschäftigen. In Polarkoordinaten werden sie durch Gleichungen von folgendem Typus dargestellt:

$$\varrho = R \sin \mu \omega, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

wo R eine gegebene Länge, und μ ein Zahlenkoeffizient ist, den man ersichtlich immer als positiv annehmen kann. Die wunderschönen Eigenschaften dieser Kurven wurden von Grandi dem Leibniz in zwei

---

1) Die Equilateren wurden neuerdings unabhängig durch J. H. Grace (*On a class of plane curves,* Proc. Lond. math. Soc. XXXIII, 1901) untersucht, der ihnen den Namen isogonale Kurven gab und einige Eigenschaften derselben nachwies sowohl für den Fall, daß die Ordnung beliebig ist, als auch, daß sie einen speziellen Wert hat.

2) P. Kokott, Ann. Math. Phys., 3. Reihe, XI. 1906, S. 62.

Briefen mitgeteilt, die auf den Dezember 1713 zurückgehen[1]), wurden aber Allgemeingut erst zehn Jahre später, infolge einer der Gesellschaft der Wissenschaften zu London eingereichten Abhandlung[2]); ihre vollständige Theorie wurde dann von Grandi selbst im Jahre 1728 in einem besonderen Werkchen dargelegt[3]). Vor nicht gar langer Zeit, jedoch unabhängig von Grandi, wurden die Rosenkurven im allgemeinen untersucht von E. W. Hyde[4]) — und zwar unter dem Namen foliate curves — und ferner von Himstedt[5]).

Setzen wir $\omega = \frac{\pi}{2\mu} - \overline{\omega}$, so wird die Gleichung (1) zu

$$\varrho = R \cos \mu \overline{\omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

und kann dann Gleichung (1) vollständig ersetzen. In der Gestalt (2) erhält man die Gleichung der Rhodoneen, wenn man folgende Entstehungsweise derselben in Formeln kleidet[6]): „Seien OA und AM zwei einander gleiche Strecken, die in O und in A drehbar sind; die erstere rotiert um O mit einer gewissen Geschwindigkeit, die zweite um A mit der m-fachen Geschwindigkeit; der Ort des Punktes M ist dann eine Rhodonee.“ Nehmen wir nämlich die Anfangslage der Geraden als Polarachse und nehmen an, daß dann AM in die Verlängerung AB von OA falle und $OA = a$, so haben wir, nachdem OA sich um den Winkel α gedreht hat,

$$\sphericalangle AOx = \alpha, \quad \sphericalangle MAB = m\alpha; \quad OM = \varrho, \quad \sphericalangle MOx = \omega,$$

ferner

$$\omega = \alpha + \frac{m\alpha}{2}, \qquad \varrho = 2a \cos \frac{m\alpha}{2};$$

demnach ist die Gleichung des Ortes von M

$$\varrho = 2a \cos\left(\frac{m}{m+2}\,\omega\right),$$

beweist also durch ihre Gestalt die Behauptung. — Es ist leicht, aus dem eben bewiesenen Satze eine Methode herzuleiten, alle Rhodoneen mechanisch zu zeichnen[7]).

---

1) *Leibniz* ed. Gerhardt IV, S. 221—24.

2) *Florum geometricarum manipulus* (Phil. Trans. 1723).

3) *Flores geometrici ex rhodonearum et claeliarum descriptione resultantes* (Florentiae, 1728).

4) S. die Abh. *Foliate curves* in The Analyst II, 1875.

5) *Über diejenigen ebenen Kurven, welche der Polargleichung* $r = a \sin \lambda \Theta$ *entsprechen* (Progr. Löbau, 1888).

6) G. Pirondini, *Sur une famille remarquable de courbes* (Mathésis, 2e Sér., IV, 1894).

7) Andere Erzeugungen siehe am Schlusse dieses Kap., ferner Aubry, *De l'usage des figures de l'espace pour la definition et la transformation de certaines courbes* (Journ. math. spéc. 4. Ser., IV, 1895, S. 202—4). Auf eine besonders bemerkenswerte werden wir im II. Bd. Abschnitt VI hinweisen, indem wir zeigen werden, **daß die Rhodoneen spezielle Epizykloiden sind.**

Aus (1) geht hervor, wenn k eine beliebige ganze Zahl bedeutet, daß, wenn $\mu\omega = k\pi$ ist, $\varrho = 0$, und wenn $\mu\omega = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ist, $\varrho = R$ wird; der Radiusvektor variiert also zwischen den Grenzen 0 und R, und daher liegt die Kurve ganz innerhalb des Kreises, dessen Mittelpunkt der Pol O und dessen Radius R ist[1]); wir wollen diesen Kreis den Fundamentalkreis der Rhodonee nennen. Berücksichtigen wir auch imaginäre Winkel, so sehen wir, wenn $\mu\omega = \pm \operatorname{arc\,tg} i$, daß dann $\varrho = \infty$ wird; dies zeigt, **daß die Schnitte der Kurve mit der unendlich fernen Geraden sämtlich mit den Kreispunkten der Ebene zusammenfallen.**

Wie wir oben erkannt haben, muß, damit $\varrho = 0$ werde, $\mu\omega = k\pi$ sein; wenn μ irrational ist, so sind zwei Werte von ω, die dieser Bedingung genügen, notwendigerweise inkongruent $mod\, 2\pi$; in der Tat: wäre

$$\mu\omega_1 = k_1\pi, \quad \mu\omega_2 = k_2\pi, \quad \omega_1 - \omega_2 = 2k\pi,$$

wo k, k_1, k_2 ganze Zahlen, so würde sich ergeben

$$\mu = \frac{k_1 - k_2}{2k},$$

welche Bedingung absurd ist, da die linke Seite irrational, die rechte Seite rational ist. Demnach: **Wenn μ irrational ist, so geht die Rosenkurve unendlich oft durch den Pol, umfaßt daher unendlich viele Blätter**[2]); in diesem Falle kann die Kurve nicht algebraisch sein.

Wenn dagegen

$$\mu = \frac{a}{b},$$

wo a und b ganze, relative Primzahlen sind, so zeigt eine leichte Diskussion: **Die durch die Gleichung**

$$\varrho = R \sin\left(\frac{a}{b}\omega\right)$$

dargestellte Rosenkurve besteht aus a Blättern, wenn die beiden Zahlen a und b beide ungerade sind, dagegen aus $2a$ Blättern, wenn eine derselben gerade, die andere ungerade ist. Wenn $b > 1$, so überdecken sich die Blätter der Rosenkurve, jedes folgende die ersteren, so daß man sagen könnte, die Kurve habe b Schichten; ist $b = 1$, so besteht sie nur aus einer einzigen Schicht; sie besteht aus unendlich vielen Schichten, wenn μ irrational ist. Die in O sich kreuzenden Kurvenzweige haben dort alle als Krümmungsradius $\frac{a}{b}R$ (vgl. S. 50, Fußnote 2).

Betrachten wir zwei aufeinander folgende Werte von ω, für welche $\varrho = 0$ wird, z. B.

---

1) Grandi, *Flores geometrici etc.* S. 4. 2) Das. S. 12.

$$\omega_1 = \frac{k\pi}{\mu}, \qquad \omega_2 = \frac{(k+1)\pi}{\mu};$$

da nun $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \frac{(2k+1)}{\mu} \frac{\pi}{2}$, so ist der zum Werte $\omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ gehörige Radiusvektor gleich dem Maximum R; und weil

$$R \sin \mu \left(\frac{2k+1}{\mu} \frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = (-1)^k R \cos \mu \alpha,$$

so ist klar, **daß zwei zu einem Maximal-Vektor symmetrische Radienvektoren einander gleich sind,** mit anderen Worten: **Die Blätter der Rosenkurven sind symmetrisch in bezug auf die Maximal-Radien**[1]. Demnach besitzt die Kurve ∞^1 Symmetrieachsen, wenn μ irrational ist; wenn $\mu = \frac{a}{b}$, besitzt sie deren $2a$, wenn eine der Zahlen a, b ungerade ist, Symmetrieachsen a, wenn beide ungerade sind.

Die Quadratur der Rosenkurven hat zu zwei erwähnungswerten, von Grandi entdeckten Sätzen Veranlassung gegeben, die wir nun mit Hilfe der modernen Methoden beweisen wollen.

Sei A die Fläche eines Blattes der durch Gleichung (1) dargestellten Rosenkurve, dann haben wir

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{\mu}} \varrho^2 \cdot d\omega = \frac{R^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{\mu}} \sin^2 \mu\omega \cdot d\omega = \frac{R^2}{4\mu}\left|\mu\omega - \frac{1}{2}\sin 2\mu\omega\right|_0^{\frac{\pi}{\mu}} = \frac{\pi R^2}{4\mu};$$

nun hat ein Quadrant des Fundamentalkreises den Inhalt $Q = \frac{\pi R^2}{4}$, also ist

$$A = \frac{1}{\mu} Q,$$

welche Gleichung den ersten Satz von Grandi ausdrückt[2]. Wenn insbesondere $\mu = \frac{a}{b}$, so ist $A = \frac{b\pi R^2}{4a}$; wenn daher a und b beide ungerade sind, so besteht die Kurve aus a Blättern, deren Fläche $b\frac{\pi R^2}{4} = b \cdot Q$ ist, wenn jedoch nur eine dieser Zahlen ungerade ist, so ist die Gesamtfläche $2b \cdot Q$; somit ist, wenn $b = 1$, die Fläche gleich dem vierten Teile oder gleich der Hälfte des Fundamentalkreises, jenachdem a ungerade oder gerade.

Bezeichnen wir mit B die Fläche, die von den beiden zu den Winkeln $\frac{\pi}{4\mu}$ und $\frac{3\pi}{4\mu}$ gehörenden Radienvektoren und zwischenliegenden Kurvenpunkten umschlossen wird, so haben wir (s. oben)

$$B = \frac{R^2}{4\mu}\left|\mu\omega - \frac{1}{2}\sin 2\mu\omega\right|_{\frac{\pi}{4\mu}}^{\frac{3\pi}{4\mu}} = \frac{R^2}{4\mu}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right).$$

---

1) Grandi, *Flores geometrici etc.* S. 4. 2) Das. S. 15.

Nun haben jene beiden Vektoren die gemeinsame Länge

$$R \sin\frac{\pi}{4} = \frac{R}{\sqrt{2}},$$

und begrenzen zusammen mit einem Kreisbogen, dessen Mittelpunkt O, einen Kreissektor, dessen Fläche

$$C = \frac{\pi R^2}{8\mu};$$

demnach hat die zwischen diesem Kreisbogen und dem angrenzenden Bogen der Rosenkurve gelegene Lünette den Flächeninhalt

$$\mathfrak{L} = B - C = \frac{R^2}{4\mu},$$

und daher

$$\frac{\mathfrak{L}}{R^2} = \frac{1}{4\mu},$$

und diese Formel drückt den zweiten der Sätze von Grandi aus[1]).

Wir bemerken noch, daß das Bogendifferential der Rosenkurve gegeben ist durch:

$$ds = R\sqrt{1 - \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2}\sin^2\mu\omega} \cdot d\mu\omega;$$

die Rektifikation der Rosenkurve hängt also von elliptischen Integralen ab[2]).

135. In dem Falle, daß μ rational, also $= \frac{a}{b}$ ist, kann man leicht die kartesische Gleichung der Rosenkurve erhalten[3]). Wendet man nämlich auf die beiden Seiten der identischen Gleichung

$$\sin a\omega = \sin\left(b\frac{a}{b}\omega\right)$$

die bekannte Formel an

$$\sin m\omega = \binom{m}{1}\cos^{m-1}\omega \cdot \sin\omega - \binom{m}{3}\cos^{m-3}\omega \cdot \sin^3\omega$$
$$+ \binom{m}{5}\cos^{m-5}\omega \cdot \sin^5\omega - \cdots,$$

wo m eine beliebige, positive ganze Zahl ist, so erhält man

$$\binom{a}{1}\cos^{a-1}\omega \cdot \sin\omega - \binom{a}{3}\cos^{a-3} \cdot \sin^3\omega + \binom{a}{5}\cos^{a-5}\sin^5\omega - \cdots$$
$$= \binom{b}{1}\cos^{b-1}\left(\frac{a}{b}\omega\right)\sin\left(\frac{a}{b}\omega\right) - \binom{b}{3}\cos^{b-3}\left(\frac{a}{b}\omega\right)\sin^3\left(\frac{a}{b}\omega\right) + \cdots$$

---

1) Grandi, *Flores geometrici etc.* S. 20. 2) Das. S. 31.

3) Der erste, der die kartesischen Gleichungen der algebraischen Rhodoneen aufstellte, war Luigi dei marchesi Ridolfi; man sehe die heute vergessene, aber wertvolle Arbeit: *Di alcuni usi delle epicicloidi e di uno strumento per la loro descrizione e specialmente per quella dell' ellisse* (Florenz, 1844) S. 24, Note. Dieselbe Aufgabe wurde später durch Himstedt (a. O. S. 4) gelöst.

Nun ist wegen allgemeiner Beziehungen und wegen Gleichung (1)

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\omega = \frac{x}{\varrho}, \quad \sin\omega = \frac{y}{\varrho}, \quad \sin\left(\frac{a}{b}\omega\right) = \frac{\varrho}{R},$$

$$\cos\left(\frac{a}{b}\omega\right) = \frac{\sqrt{R^2 - \varrho^2}}{R}.$$

Setzen wir dies in die vorige Gleichung ein, so bekommem wir:

$$R^b\left[\binom{a}{1}x^{a-1}y - \binom{a}{3}x^{a-3}y^3 + \binom{a}{5}x^{a-5}y^5 - \cdots\right]$$
$$= \binom{b}{1}(x^2+y^2)^{\frac{a+1}{2}}(R^2 - \overline{x^2+y^2})^{\frac{b-1}{2}}$$
$$- \binom{b}{3}(x^2+y^2)^{\frac{a-1}{2}}(R^2 - \overline{x^2+y^2})^{\frac{b-3}{2}} + \cdots \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Sind a und b beide ungerade, so ist diese Gleichung rational und vom Grade $a + b$; in allen anderen Fällen muß man, um die Gleichung rational zu machen, beide Seiten ins Quadrat erheben, und sie wird alsdann vom Grade $2(a + b)$. Demnach: **Wenn μ eine rationale Zahl $\frac{a}{b}$ ist, so stellt die Gleichung (1) immer eine algebraische Kurve dar, deren Ordnung $a + b$ ist, wenn beide Zahlen a, b ungerade sind, jedoch $2(a + b)$ ist, wenn eine derselben gerade.** Die Kurve ist also immer von einer geraden Ordnung, und diese ist eine symmetrische Funktion der Zahlen a, b. Wir fügen noch hinzu, daß sie auch rational ist; setzt man nämlich $\frac{\omega}{b} = \theta$, so liefert die Gleichung (1) die folgende parametrische Darstellung der Kurve

$$x = R\sin a\theta \cdot \cos b\theta, \qquad y = R\sin a\theta \cdot \sin b\theta;$$

die rechten Seiten dieser Gleichungen lassen sich aber als rationale Funktionen von $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ ausdrücken.

Unsere Gleichung (3) beweist ferner, **daß der Anfang ein vielfacher Punkt von der Ordnung a oder $2a$ ist, jenachdem von den Zahlen a, b beide oder nur eine ungerade sind.**

Die Bestimmung derjenigen Doppelpunkte, welche die Kurve im Endlichen außer dem Mittelpunkte hat, läßt sich hingegen leichter durch Gleichung (1) ausführen; man erhält nämlich einen solchen Doppelpunkt, indem man die beiden Werte ω_1, ω_2 aufsucht, für welche (q ganzzahlig vorausgesetzt)

$$\omega_1 - \omega_2 = 2q\pi \qquad \text{und} \quad \sin\left(\frac{a}{b}\omega_1\right) = \sin\left(\frac{a}{b}\omega_2\right),$$

oder $$\omega_1 - \omega_2 = (2q-1)\pi \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{a}{b}\omega_1\right) = -\sin\left(\frac{a}{b}\omega_2\right);$$

man kann nun die beiden ersten ersetzen durch

$$\omega_1 - \omega_2 = 2q\pi, \qquad \omega_1 + \omega_2 = \frac{b}{a}(2r-1)\pi,$$

die beiden letzten durch

$$\omega_1 - \omega_2 = (2q-1)\pi, \quad \omega_1 + \omega_2 = \frac{b}{a} 2r\pi.$$

In diesen Gleichungen hat man den ganzen Zahlen q und r derartige Werte zu erteilen, daß die zugehörigen Werte ω_1 und ω_2 inkongruent *mod.* 2π sind. Eine leichte Diskussion führt uns zu dem Schlusse, daß die Zahl der Lösungen $\frac{1}{2}a(b-1)$, und daher haben wir folgenden Satz[1]): **Die durch die Gleichung $\mu = R \sin\left(\frac{a}{b}\omega\right)$ dargestellte Rosenkurve besitzt in einer Entfernung vom Mittelpunkte, die weder 0 noch unendlich groß ist, Doppelpunkte, deren Zahl $\frac{1}{2}a(b-1)$ oder $2a(b-1)$ ist, jenachdem von den Zahlen a, b keine oder eine einzige gerade ist.**

136. Der vorhin bewiesene Satz über die Ordnung einer algebraischen Rosenkurve eignet sich auch zur Beantwortung folgender Frage: „Welches ist die Zahl der verschiedenen Arten von Rhodoneen von gegebener Ordnung n?“ Natürlich müssen wir n als gerade annehmen. Wenn nun $f(n)$ die gesuchte Zahl ist, so wird diese offenbar die Summe der Zahlen $f_1(n)$ und $f_2(n)$ sein, von denen die erste die Anzahl derjenigen verschiedenen Paare ungerader, relativ primer Zahlen bedeutet, welche der Relation

$$(\alpha) \qquad a + b = n,$$

genügen[2]), während die zweite die Anzahl derjenigen Zahlenpaare, von denen die eine gerade, die andere ungerade ist, bedeutet, die der Relation genügen

$$(\beta) \qquad 2(a+b) = n.$$

Beschäftigen wir uns vorerst mit der Gleichung (α). Da a und b relativ prim sein sollen, so ist auch jede derselben relativ prim zu n. Nehmen wir umgekehrt für a einen beliebigen, zu n relativ primen Wert an, kleiner als n, so darf man für b den Wert $n-a$ nehmen; demnach ist die Anzahl der Zahlenpaare, die der Gleichung (α) genügen, gleich der Anzahl der Primzahlen, die kleiner als n sind. Bedienen wir uns daher eines von Gauß[3]) eingeführten Symbols, so können wir schreiben

$$f_1(n) = \varphi(n).$$

Wir gehen über zu (β); da n eine gerade Zahl, so kann man diese schreiben $a + b = \frac{n}{2}$; da hier eine der Zahlen a, b gerade, die

1) Himstedt a. a. O. S. 5—7.

2) Als verschiedene Paare sind auch zu betrachten solche, die durch Vertauschung der Elemente auseinander entstehen, da sie verschiedene Kurven liefern.

3) *Disquisitiones arithmeticae,* Art. 38.

andere ungerade sein muß, so ist diese Relation unmöglich, wenn $\frac{n}{2}$ gerade ist; also ist

$$f_2(n) = 0, \quad \text{wenn } \frac{n}{2} \text{ gerade};$$

wenn hingegen $\frac{n}{2}$ ungerade ist, so entspricht jeder zu $\frac{n}{2}$ relativprimen Zahl, die kleiner als $\frac{n}{2}$ ist, eine Lösung der Gleichung (β). Demnach ist

$$f_2(n) = \varphi\left(\frac{n}{2}\right), \quad \text{wenn } \frac{n}{2} \text{ ungerade.}$$

Und so schließen wir: **Die Zahl der verschiedenen Arten von Rhodoneen von der Ordnung n wird gegeben durch $\varphi(n)$, wenn n ein Vielfaches von 4 ist, dagegen durch $\varphi(n) + \varphi\left(\frac{n}{2}\right)$, wenn n eine einfache Paarzahl ist.** Somit gibt es z. B. nur eine einzige Rhodonee zweiter Ordnung, zwei der vierten Ordnung (entsprechend den Werten $\mu = 3$ und $\mu = \frac{1}{3}$), vier von der sechsten Ordnung (entsprechend den Werten $\mu = 2, \frac{1}{2}, 5, \frac{1}{5}$), ebenso vier von der achten Ordnung usw.

Gehen wir nunmehr zur Untersuchung der einfachsten Fälle über:

I. $\mu = 1$, $n = 2$; $\varrho = R \sin \omega$. Gehen wir zu kartesischen Koordinaten über, so erhalten wir als Gleichung $x^2 + y^2 = Ry$, die einem Kreise mit dem Mittelpunkte $\left(0, \frac{R}{2}\right)$ angehört, dessen Radius $= \frac{R}{2}$. Grandi glaubte irrtümlicherweise, daß zu dieser Rhodonee auch der symmetrisch in bezug auf die x-Achse gelegene Kreis gehöre.

II. $\mu = 3$, $n = 4$; $\varrho = R \sin 3\omega$. Diese Rhodonee hat nur eine Schicht; sie besteht aus drei gleichen Blättern, deren Symmetrieachsen die Radien des Fundamentalkreises sind, die mit Ox die Winkel bezügl. $\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$ bilden. Wegen ihrer Form (Taf. XI, Fig. 79) ist die Kurve Dreiblatt, gleichseitiges Kleeblatt (reguläres Trifolium) genannt worden, und wir sind ihr schon auf S. 169 und 174 begegnet.

III. $\mu = \frac{1}{3}$, $n = 4$; $\varrho = R \sin \frac{\omega}{3}$. Als kartesische Gleichung hat die Kurve $R^3 y = (x^2 + y^2)(3R^2 - 4(x^2 + y^2))$; sie berührt die x-Achse im Anfangspunkte und schneidet sie in den Punkten mit der Abszisse $\pm \frac{R\sqrt{3}}{2}$, hat den Punkt $\left(0, \frac{R}{2}\right)$ als Doppelpunkt und den Punkt $(0, -R)$ als einfachen Punkt. Die Kreispunkte der Ebene sind Doppelpunkte derselben. Sie ist eine rationale Kurve vierter Ordnung, von Gestalt ähnlich der Pascalschen Schnecke (Nr. **70**), mit einem Knotenpunkt.

IV. $\mu = 2$, $n = 6$; $\varrho = R \sin 2\omega$. Sie ist eine Rhodonee von einer Schicht, bestehend aus vier gleichen Blättern (s. Taf. XI, Fig. 80), sie ist von der sechsten Ordnung und hat folgende kartesische Gleichung

$$(x^2 + y^2)^3 = 4R^2 x^2 y^2.$$

Man kann sie als eine Grenzform der Skarabäen (s. Nr. **105**) ansehen, d. h. als Fußpunktkurve einer regulären Astroide in bezug auf ihren Mittelpunkt, oder auch als Ort der Fußpunkte der vom Scheitel eines rechten Winkels auf die sämtlichen Lagen einer Strecke von konstanter Länge, deren Endpunkte die Schenkel dieses Winkels durchlaufen, gefällten Lote[1]). Sie ist ferner die Inverse der zirkularen Kreuzkurve (S. 226). Die französischen Geometer nennen sie Rosace à quatre branches[2]), die deutschen Vierblatt; einige brauchen den Namen Corolla und indische Perle. Ridolfi[3]) bemerkte ihre Anwendbarkeit auf das Problem der Würfelverdoppelung. Siehe auch Nr. **137**, III.

V. $\mu = \frac{1}{2}$, $n = 6$; $\varrho = R \sin \frac{\omega}{2}$. Diese Rhodonee (Taf. XI, Fig. 81) ist von der sechsten Ordnung und wird in kartesischen Koordinaten durch die Gleichung dargestellt:

$$4(x^2 + y^2)^3 + R^4 y^2 - 4R^2(x^2 + y^2)^2 = 0.$$

Sie ist symmetrisch in bezug auf beide Koordinatachsen, hat im Anfangspunkt einen Berührungsknoten mit der x-Achse als zugehöriger Tangente; die Endpunkte des auf der x-Achse gelegenen Durchmessers des Fundamentalkreises sind einfache Punkte, während die Punkte D, D_1 $\left(0, \pm \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)$ Doppelpunkte derselben sind. Sie hat außerdem zwei Doppeltangenten parallel zu Ox und zwei parallel zu Oy. Indem Grandi nur eine Hälfte der fraglichen Kurve betrachtete, nämlich nur den Bogen $OBDA'D_1B_1O$[4]), war er nicht imstande die hervorstechendsten Eigenschaften ihrer Gestalt zu bemerken, wie die Existenz des Berührungsknotens und der Doppeltangenten.[5])

137. Wir überlassen dem Leser die Diskussion der übrigen Rosenkurven sechster Ordnung und empfehlen ihm das Werkchen von Ridolfi für das Studium derjenigen von ihnen, die zur Teilung eines Winkels in beliebige gleiche Teile dienen können.[6]) Wir aber haben hier noch einige Umstände zu erwähnen.

I. Wenn man auf die Kurve (2) die Transformation durch reziproke Radienvektoren anwendet, bezw. in der Gleichung $\overline{\omega} = \omega_1$, $\varrho \cdot \varrho_1 = k^2$ setzt, so erhält man die Kurve mit der Gleichung

$$\varrho_1 = \frac{k^2}{R} \sec \mu \omega_1, \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

1) S. die *Institutiones analyticae a V. Riccato et H. Saladino collectae* (Bononiae, 1756) I. Lib. III, Cap. VII, Probl. VI; *Nouvelle corresp. math.* Question 311 (IV, 1878, S. 155 u. 290). Die von Zahradnik in der S. 169 zitierten Abh. gegebene Konstruktion läuft auf dasselbe hinaus.

2) S. z. B. Briot et Bouquet, *Geométrie analytique* (Paris, 1878) S. 22.

3) Ridolfi, o. a. O. S. 35—37. 4) *Flores geometrici etc.*, Fig. 8ª.

5) Aus Gl. (1) S. 281 folgt, daß man die Nephroide als Konchoide dieser speziellen Rhodonee ansehen kann.

6) Ridolfi, a. a. O. S. 17—19.

läßt man hierin μ variieren, so erhält man unendlich viele Kurven, die G. Sacchi[1]) Côtesche Spiralen nannte, die jedoch heute den Namen Ährenkurven tragen[2]); im besonderen erhält man für $\mu = \frac{1}{3}$ die Trisektrix von Maclaurin (Nr. 47), für $\mu = 3$ die Trisektrix von Longchamps (Nr. 49), für $\mu = \frac{1}{2}$ eine Trisekante von Delanges (Nr. 99) und für $\mu = 2$ eine Kreuzkurve (Nr. 97).[3])

Es ist bemerkenswert, daß den Ährenkurven von W. Stammer begegnet wurde[4]), indem er ein besonderes Koordinatensystem anwandte, welches man Plücker verdankt. Diese neuen Koordinaten ξ, η sind mit den gewöhnlichen kartesischen rechtwinkligen Koordinaten x, y durch die folgenden Beziehungen verbunden

$$\left.\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}\right\} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}}{R} \mp \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x},$$

wo R eine gegebene Konstante ist. In diesem Systeme sind die einfachsten Kurven folgendermaßen definiert

$$\eta = a\xi.$$

Ihre kartesische Gleichung ist daher

$$\left\{\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2+y^2-R^2}}{R} + \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right\} = a\left\{\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{x^2+y^2-R^2}}{R} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right\}.$$

Führt man nun Polarkoordinaten ein, so erhält man die Gleichung

$$\omega = \frac{a-1}{a+1} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{\varrho^2 - R^2}}{R},$$

oder

$$\varrho = \frac{R}{\cos\left(\frac{a+1}{a-1}\omega\right)}.$$

Jene Kurven sind infolgedessen Ährenkurven und der neuerdings vorgeschlagene Name[5]) Stammersche Kurven ist daher überflüssig.

II. Ohne die Arbeiten von Grandi zu kennen, ist man zu den Rhodoneen gelangt, als man an die Lösung folgenden kinematischen Problems heranging[6]): „Die Bahn eines Punktes zu finden, der in

---

1) *Sulla geometria analitica delle curve piane* (Pavia, 1854) S. 11. Vgl. auch Nouv. Ann. math. XIX, 1860, S. 38.

2) Aubry, a. a. O., S. 201 und 251. Man findet einige Eigenschaften dieser Kurven bei F. Gomes Teixeira *Obras.* V (Coimbra, 1909) S. 237 ff.

3) Überhaupt, ist μ eine rationale Zahl, so ist die Kurve (4) algebraisch; ihre Ordnung und ihre Klasse wurden von Halphèn (*Etude sur les points singuliers des courbes algébriques planes,* Paris 1883, S. 16) berechnet.

4) *Über Kreiskoordinaten* (Crelles Journal, XLIV, 1852).

5) J. de Vargas y Aguirre, *Catalago general de curvas* (Mem. Acad. Madrid, XXVI, 1908) S. 301.

6) E. Auth, *Untersuchungen über diejenigen Kurven, welche erzeugt werden durch Schwingungen eines Punktes auf einer Geraden, während die Gerade zugleich rotiert* (Diss. Marburg, 1866).

einer geraden Linie schwingt, während diese um einen festen Punkt rotiert." Zum Beweise, daß die gesuchte Kurve eine Rhodonee ist, nehmen wir den festen Punkt als Koordinatenanfang und nennen seinen veränderlichen Abstand vom bewegten Punkte s; bezeichnen wir nun mit t die Zeit, mit m die Anzahl der in der Zeiteinheit ausgeführten Schwingungen, sowie mit ϑ eine Konstante, so haben wir zunächst eine Relation von folgendem Typus

$$s = a \sin 2m\pi(t + \vartheta).$$

Ist nun φ der Winkel, den die sich drehende Gerade mit der x-Achse nach Verlauf der Zeit t bildet, so haben wir

$$x = s \cdot \cos\varphi, \qquad y = s \cdot \sin\varphi;$$

wenn nun außerdem n die Anzahl der Umdrehungen der Geraden in der Zeiteinheit ist, und τ eine andere Konstante, so ist noch

$$\varphi = 2n\pi(t + \tau).$$

Eliminieren wir s und φ aus den vorhergehenden Gleichungen, so erhalten wir die beiden folgenden

$$x = a \sin 2m\pi(t + \vartheta) \cdot \cos 2n\pi(t + \tau),$$
$$y = a \sin 2m\pi(t + \vartheta) \cdot \sin 2n\pi(t + \tau),$$

welche die parametrische Darstellung der Bahnlinie liefern. Sind ϱ, ω die Polarkoordinaten des Punktes (x, y), so ergibt sich daraus

$$\varrho = a \sin 2m\pi(t + \vartheta), \qquad \omega = 2n\pi(t + \tau),$$

und nach Elimination von t die Gleichung

$$\varrho = a \sin\left[\frac{m}{n}\omega + 2m\pi(\vartheta - \tau)\right],$$

welche in der Tat eine Rhodonee darstellt. — Die in diesem Kapitel untersuchten Kurven als Lösungen des vorhin zitierten Problems der Kinematik betrachtet, wurden Schwingungskurven genannt[1]); nach unseren Ausführungen geht hervor, daß auch dieser Name im mathematischen Wörterbuche, das ohnehin schon zu reich an Namen ist, als daß man es mit überflüssigen Synonymen überladen sollte, gestrichen werden könnte.

III. Noch eine höchst einfache Erzeugung der Rosenkurven möge hier angeführt werden: **Zwei Radien OA und OB drehen sich um O mit gleichförmigen Geschwindigkeiten, die sich wie $m:1$ verhalten; von A wird stets das Lot auf OB gefällt, dann beschreibt der Fußpunkt P eine Rosenkurve.**[2]) Beweis: Es sei $OA = OB = R$, und ϱ und ω die Polarkoordinaten von P; es sind dann, wenn die Anfangslage als x-Achse genommen wird, die kartesischen Koordinaten

1) Melde, *Die Lehre von den Schwingungskurven* (Leipzig, 1864).

2) Brieflich mitgeteilt von cand. math. Leop. Braude an den Übersetzer.

von $A \begin{cases} x_1 = R\cos m\omega, \\ y_1 = R\sin m\omega; \end{cases}$ von $B \begin{cases} x_2 = R\cos\varphi, \\ y_2 = R\sin\varphi; \end{cases}$ von $P \begin{cases} x = \varrho\cdot\cos\omega, \\ y = \varrho\cdot\sin\omega. \end{cases}$

Nun ist aber $\frac{y-y_1}{x-x_1} = -\frac{x_2}{y_2}\cdot$ Setzt man hierin alles ein, so bekommt man

$$\varrho\cdot\sin\omega - R\cdot\sin m\omega = -\frac{\cos\omega}{\sin\omega}(\varrho\cdot\cos\omega - R\cdot\cos m\omega),$$

oder $$\varrho(\sin^2\omega + \cos^2\omega) = R(\cos\omega\cdot\cos m\omega + \sin\omega\cdot\sin m\omega),$$

bzw. $$\varrho = R\cdot\cos(m-1)\omega,$$

womit der Satz bewiesen ist. Beispielsweise erhält man das unter IV beschriebene Vierblatt, sowohl für $m = 3$, als auch für $m = -1$, womit wieder zwei neue Erzeugungen dieser Kurve geliefert sind.

Neuntes Kapitel.

Die geometrischen Blätter.[1])

138. Wenn alle die Kräfte, die bei der Entwicklung einer Pflanze mitwirken, mathematisch erkannt wären und ebenso der innere Mechanismus ihrer Organe, so würde man imstande sein, die ganze Lebensentwicklung durch Formeln darzustellen, insbesondere würde man die Gleichungen derjenigen Kurven erhalten können, welche den Umriß ihrer (grünen) Blätter darstellen. Aber umgekehrt, wenn man auch diese Gleichungen kennte, würde man dennoch nicht das Leben jener Pflanze durch Formeln darstellen können; doch auch von diesem Ziele ist man noch weit entfernt, indem man sich begnügen muß, die Blattumrisse durch Gleichungen darzustellen, die nicht exakt, sondern nur in einfacher Weise angenähert diese wiedergeben. Welche Bedeutung demnach für den Fortschritt der Botanik die Untersuchungen haben, welche Bodo Habenicht[2]) angestellt hat, um eine angenäherte analytische Darstellung der Form der Baumblätter zu erhalten, dies zu beurteilen möge dem Leser überlassen bleiben; wir beschränken uns hier darauf, seine mathematischen Betrachtungen (mit erläuternden Zusätzen) darzulegen[3]).

---

1) Von Brocard angewandter Name (*Note de bibliographie des courbes géométriques.* Partie complémentaire, Bar-le-Duc, 1899, S. 100). Verf. hatte früher den Namen botanische Kurven vorgeschlagen (s. Verhandlungen des I. internationalen Mathematiker-Kongresses, Leipzig 1898, S. 294).

2) *Die analytische Form der Blätter* (Quedlinburg, 1895); *Beiträge zur mathematischen Begründung einer Morphologie der Blätter* (Berlin, 1905).

3) Es dürfte wohl überflüssig sein, auf die Analogie der vorliegenden Untersuchungen mit denen über das Trifolium pratense (Nr. 111) und die Rhodoneen (vgl. das vor. Kap.) hinzuweisen. Wir wollen noch bemerken, daß diesen

Der Umriß eines jeden Blattes ist eine in bezug auf eine Achse symmetrische Kurve[1]), wenn wir von einigen Ausnahmen absehen. Jeder Punkt desselben befindet sich in endlichem Abstande von irgend einem anderen beliebigen Punkte des Blattes, daher wird sich der Umriß in Polarkoordinaten ϱ, ω durch eine Gleichung von folgendem Typus darstellen lassen

$$\varrho = F(\omega),$$

wo F im reellen Gebiete eine eindeutige, stetige und endliche Funktion von ω ist. Jeder Radiusvektor muß die Kurve in einem einzigen Punkte schneiden, daher wird F ferner eine periodische Funktion mit der Periode 2π sein, also von der Form $\varphi(\sin\omega, \cos\omega)$. Wählt man nun als Polarachse die Symmetrielinie des Blattes, so müssen gleichen und entgegengesetzten Werten von ω dieselben Werte von ϱ entsprechen: dies erfordert, daß $\sin\omega$ in der Funktion φ nicht auftritt. Es ergibt sich dann folgende Gestalt der Gleichung

$$\varrho = f(\cos\omega),$$

wo f eine ähnliche Funktion ist wie die vorige F. Den einfachsten Fall erhält man, indem man setzt

$$\varrho = a_0 + a_1 \cos\omega + a_2 \cos^2\omega + a_3 \cos^3\omega + \cdots\cdots + a_n \cos^n\omega\ . \quad (1)$$

Setzt man nun für $\cos^k\omega$ $(k = 1, 2, 3 \ldots n)$ den bekannten Ausdruck in Funktionen von $\cos\omega$, $\cos 2\omega, \ldots \cos k\omega$, so kann man (1) durch eine Gleichung von folgendem Typus ersetzen

$$\varrho = b_0 + b_1 \cos\omega + b_2 \cos 2\omega + b_3 \cos 3\omega + \cdots\cdots + b_n \cos n\omega\ . \quad (2)$$

Wenn man nun — dem Beispiele von Habenicht folgend[2]) — noch außerdem die Bedingung einführt, daß die Summen der Vektoren, die den Winkeln ω und $\omega + \pi$ entsprechen, gleich einer Konstanten c (genannt der Durchmesser des Blattes) sei, so erhält man

$$f(\omega) + f(\omega + \pi) = c,$$

für alle Werte von ω; demnach muß in der Gleichung (1)

$$a_2 = a_4 = \cdots\cdots = 0$$

---

das Pflanzenleben betreffenden Forschungen auf das Tierreich bezügliche entsprechen; siehe nämlich den Schluß von Kap. 7 des folgenden Abschnittes (II. Bd.), außerdem J. F. Blake, *On the measurement of the curves formed by cephalopodes and other mollusks* (Phil. Magazine, 1878).

1) Sieht man von dieser einschränkenden Bedingung ab, so wächst die Zahl der darstellenden Kurven ungemein; man erhält z. B. solche, die durch die Gleichung $\varrho = a + b\cos n\omega + c\sin n\omega$ dargestellt werden, auf die auch Habenicht stieß (a. a. O. S. 14).

2) Die neue Bedingung ist jedoch von ihm nicht immer beibehalten worden, und so (S. 5—7) betrachtet er an einer Stelle die Kurven

$$\varrho = a + b\cos 2n\omega, \quad \varrho = a + b\cos^{2n}\omega,$$

die er dann ausschließt, weil sie eine doppelte Symmetrie besitzen.

sein und in (2)
$$b_2 = b_4 = \cdots\cdots = 0.$$
Dieser Umstand reduziert die vorhin angeführten Gleichungen auf folgende Form

$$\varrho = a_0 + a_1 \cos\omega + a_3 \cos^3\omega + \cdots\cdots + a_{2p+1} \cos^{2p+1}\omega \quad . \quad . \quad (1')$$
$$\varrho = b_0 + b_1 \cos\omega + b_3 \cos 3\omega + \cdots\cdots + b_{2p+1} \cos(2p+1)\omega. \quad (2')$$

Diese stellen dann Kurven von der Ordnung $4(p+1)$ dar, deren „Durchmesser" bzw. $2a_0$ oder $2b_0$ sind. — Setzen wir
$$\varrho_k = b_k \cos k\omega, \quad (k = 0, 1, 3 \ldots 2p+1),$$
so erhalten wir offenbar die Gleichungen eines Kreises und von $p+1$ Rhodoneen; und da Gleichung (2′) infolgedessen äquivalent ist mit folgender Gleichung
$$\varrho = \varrho_0 + \varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_p,$$
so ist klar, daß man die durch Gleichung (2′) dargestellte Kurve durch Addition der Radienvektoren jener $p+2$ Rhodoneen (deren erste ein Kreis ist) erhalten kann. Eine ähnliche Konstruktion erhält man auch vermittelst der Gleichung (1′). Setzt man nämlich
$$\bar{\varrho}_k = a_k \cos^k\omega, \quad (k = 0, 1, 3 \ldots, 2p+1)$$
so erhalten wir die Gleichungen von $p+2$ Kurven von einer Art, mit der wir uns binnen kurzem (in Nr. **139**) beschäftigen werden, und da nun (1′) wird zu
$$\varrho = \bar{\varrho}_0 + \bar{\varrho}_1 + \bar{\varrho}_2 + \cdots\cdots \bar{\varrho}_p,$$
so kann die durch (1′) dargestellte Kurve leicht mit Hilfe jener konstruiert werden.

Der einfachste Fall der Kurven (1′) und (2′) ist ein Kreis. Es folgt dann jener mit der Gleichung
$$\varrho = a_0 + a_1 \cos\omega,$$
welche eine Pascalsche Schnecke ist (s. Nr. **70**); da die geometrischen Blätter ohne Knoten sein sollen, so ist $a_0 > a_1$ anzunehmen. — Lassen wir p unbestimmt, so gehört dem Typus (1′) auch die Kurve von der Ordnung $4(p+1)$ an, welche die Gleichung hat:
$$\varrho = a(1 + \cos^{2p+1}\omega); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$
sie heißt die $(p+1)^{\text{te}}$ Herzkurve. Ähnlich dieser sind die Kurven mit der allgemeinen Gleichung
$$\varrho = a\left(1 + \sqrt[2p+1]{\cos\omega}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$
die ebenfalls von der Ordnung $4(p+1)$ sind.

Die Gleichungen (1′) und (2′) schienen Habenicht noch nicht hinreichend, um die Gestalt der Blätter irgend einer Pflanze gut dar-

zustellen, und deswegen hat er sie in verschiedener Weise modifiziert[1]). Es erscheint uns nicht angebracht, hier auf diese Modifikationen einzugehen, zumal sie den Boden verlassen, der zu Anfang durch die Bestimmungen über die Funktionen F, φ und f gelegt wurde. Wir wollen dagegen bemerken, daß die Gleichungen vom Typus (1′) und (2′) dennoch dazu dienen können, die Gestalt eines beliebigen Blattes mit großer Annäherung zu bestimmen. Man betrachte nämlich auf demselben $p+2$ ausgezeichnete Punkte, und wenn man p hinreichend groß nimmt, so bekommt man alle wichtigen Punkte des Blattes hinein. Schreibt man nun die Gleichungen (1′) oder (2′), so daß sie den Polarkoordinaten aller dieser Punkte genügen, so erhält man $p+2$ lineare Gleichungen für die Konstanten $a_0, a_1, \ldots, a_{2p+1}$, die zur Bestimmung derselben und somit auch der Gleichungen (1′) oder (2′) dienen können.

Es ist klar, daß man auch auf anderen Wegen zu diesem Ziele gelangen kann. So wird z. B. die eigentliche Herzform ♡ der Blätter sehr schön wiedergegeben durch die Kurve[2])

$$(x^2+y^2-a^2)^3 = 4a^2x^2y^2,$$

die überdies noch die Eigentümlichkeit hat, daß die Punkte $(\pm a, 0)$ dreifache Punkte sind, die äußerlich als solche nicht erkennbar sind, weil zwei der hindurchgehenden Kurvenzüge imaginär sind.

Zehntes Kapitel.

Die Ovale, die dreieckigen Kurven und die Orbiformen.

139. Man betrachte einen Kreis mit dem Zentrum C und dem Radius r, sowie einen Punkt O seiner Ebene (Taf. XI, Fig. 83); man ziehe durch O einen beliebigen Strahl t und nenne P den einen Schnitt desselben mit der Peripherie jenes Kreises; darauf projiziere man P senkrecht auf den Durchmesser OC in Q, dann Q in P_1 auf den Strahl, darauf P_1 in Q_1 auf OC usw. Man erhält dann schließlich einen Punkt P_n auf t, der, wenn t um O rotiert, eine Kurve durchläuft, die man nach einem Vorschlage von F. Münger eine eiförmige Kurve oder ein Oval nennt[3]). Um dessen Gleichung zu finden, nehmen

---

1) Um Beispiele zu geben, findet H. für das Blatt des Sauerklees die analytische Darstellung
$$\varrho = 4(1+\cos 3\omega) + 4\sin^2 3\varphi,$$
während das des Efeus wiedergegeben wird durch
$$\varrho = 3(1+\cos^9\omega) + 2\cos\omega + \sin^2\omega - 2\sin^2 3\varphi\cdot\cos^4\frac{\omega}{2}\cdot$$

2) Entnommen aus dem S. 348 angeführten Werkchen von E. Beutel (S. 145).

3) F. Münger, *Die eiförmigen Kurven* (Inaugural-Dissert. Bern, 1894).

wir O als Pol, OC als Polarachse und bezeichnen mit d die Länge der Strecke OC. Dann ist die Gleichung des gegebenen Kreises:

$$\varrho^2 - 2d\varrho\cos\omega + d^2 - r^2 = 0; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

nennen wir dann die Radienvektoren der Punkte $P_1, P_2, \ldots P_n$ bzw. $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$, so ist offenbar

$$\varrho_1 = \varrho\cos^2\omega, \quad \varrho_2 = \varrho\cos^4\omega, \quad \ldots\ldots \quad \varrho_n = \varrho\cos^{2n}\omega;$$

setzen wir nun in (1) ein $\varrho = \frac{\varrho^n}{\cos^{2n}\omega}$, so erhalten wir

$$\varrho_n^2 - 2d\varrho_n\cos^{2n+1}\omega + (d^2 - r^2)\cos^{4n}\omega = 0, \quad . \; . \; . \quad (2)$$

welches die Polargleichung des Ovales ist. Gehen wir zu kartesischen Koordinaten über, so bekommen wir

$$(x^2 + y^2)^{2n+1} - 2dx^{2n+1}(x^2 + y^2)^n + (d^2 - r^2)x^{4n} = 0. \quad . \; . \quad (3)$$

Das konstruierte Oval ist also eine Kurve von der Ordnung $2(2n+1)$, welche in O einen $4n$-fachen Punkt hat, dessen zugehörige Tangenten mit der y-Achse zusammenfallen; im Anfangspunkte sind auch alle Schnitte der Kurve mit dieser Achse konzentriert; die Schnitte mit der x-Achse hingegen sind der Anfangspunkt $4n$mal gezählt und die Punkte mit den Aszissen $d \pm r$, d. h. die Endpunkte A, B des Durchmessers OC. Alle unendlich fernen Punkte der Kurve fallen in die Kreispunkte der Ebene. Die Kurve ist symmetrisch in bezug auf die x-Achse und berührt die beiden von O an den gegebenen Kreis gezogenen Tangenten.

Nehmen wir in Gleichung (3) $n = 0$, so erhalten wir den Kreis wieder, von dem wir ausgegangen sind. Nehmen wir dagegen $n = 1$, so bekommen wir eine Kurve sechster Ordnung, dargestellt durch die Gleichung

$$(x^2 + y^2)^3 - 2dx^3(x^2 + y^2) + (d^2 - r^2)x^4 = 0; \quad . \; . \quad (4)$$

die Kreispunkte der Ebene sind Spitzen der Kurve mit der unendlich fernen Geraden als gemeinsamer Tangente. Jenachdem der feste Punkt O außerhalb, auf der Peripherie oder innerhalb des gegebenen Kreises liegt, nimmt sie verschiedene Gestalt an (Taf. XI, Fig. 83a, b, u. 84). Bemerkenswert ist der Fall $d = 0$; die entsprechende Kurve ist auch zu Oy symmetrisch, besteht demnach aus zwei gleichen geschlossenen Zügen; wegen ihrer Gestalt wurde sie von Münger Doppeleilinie genannt; sie wird in Polar- bzw. kartesischen Koordinaten durch die Gleichungen dargestellt:

$$\varrho = r\cos^2\omega, \quad (x^2 + y^2)^3 - r^2x^4 = 0.$$ [1]

1) Auf diese, ähnliche und allgemeinere Kurven stieß C. H. L. Schmidt in seiner Abh. *Über einige Kurven höherer Ordnung* (Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. 38. Jahrg. 1907, S. 485 ff.); daselbst werden andere Punktkonstruktionen und die Quadratur behandelt. Die obige Kurve hat z. B. die Fläche $\frac{3}{8}\pi r^2$.

Da man die Polargleichung auch schreiben kann als

$$\varrho = \frac{r}{2}\cos 2\omega + \frac{r}{2},$$

so sieht man: **Die Doppeleilinie ist eine Konchoide der vierblättrigen Rosenkurve** (S. 365, IV).

Alle Ovale sechster Ordnung können noch auf eine andere Weise konstruiert werden, die verdient hervorgehoben zu werden: Die gegebenen Stücke sind dieselben, die Punkte mögen wie vorhin mit P, Q, P_1, ... bezeichnet werden. Man beschreibe um den Mittelpunkt Q mit dem Radius QO einen Kreis und bestimme dessen zweiten Schnitt M_1 mit t; wir behaupten, der Ort des Punktes M_1 ist ein Oval sechster Ordnung (Taf. XI, Fig. 82). Bezeichnen wir noch mit ω die Winkel QOP, QM_1P, so wird

$$\sphericalangle QPM_1 = \frac{\pi}{2} + \omega, \quad \sphericalangle PQM_1 = \frac{\pi}{2} - \omega,$$

daher ergibt sich aus dem Dreiecke PQM_1

$$\frac{PM_1}{\cos 2\omega} = \frac{QM_1}{\cos\omega}.$$

Da aber
$$\frac{QM_1}{\cos\omega} = \frac{OQ}{\cos\omega} = OP,$$

so ist
$$PM_1 = OP \cdot \cos^2\omega;$$

daraus folgt
$$OM_1 = OP(1 + \cos 2\omega) = 2 \cdot OP \cdot \cos^2\omega.$$

Setzen wir nun, wie wir es vorhin getan, $OP = \varrho$, und ferner $OM_1 = \varrho'$, so ist

$$\varrho = \frac{\varrho'}{2\cos^2\omega}.$$

Setzen wir dies in (1) ein, so findet man

$$\varrho'^2 - 4d\varrho' \cos^3\omega + 4(d^2 - r^2)\cos^4\omega = 0,$$

und dann

$$(x^2 + y^2)^3 - 4d(x^2 + y^2)x^3 + 4(d^2 - r^2)x^4 = 0;$$

da diese sich von (4) nicht unterscheidet, als nur durch die Vertauschung von d und r in $2d$ und $2r$, so ist die obige Behauptung erwiesen.

140. Zu der Reihe von Untersuchungen, welche die Bestimmung der Gleichungen von vorher gestaltlich bekannten Kurven im Auge haben, hat auch Euler einen wichtigen Beitrag geliefert[1]). Während fast bei allen übrigen von ihm ausgehenden Forschungen ihm eine Schar von Schülern oder Kommentatoren folgte, sind diejenigen For-

1) S. die Abh. *De curvis triangularibus* (Acta Academiae Sc. Imp. Petrop. pro anno MDCCLXXVIII, Pars posterior, Petersburg 1781).

schungen, mit denen wir uns jetzt beschäftigen wollen, soweit uns bekannt, leider von niemandem fortgesetzt worden. Es bleibt uns also, wenn wir über sie in den Hauptzügen berichten wollen, nichts anderes übrig, als getreulich die Gedanken des großen schweizerischen Mathematikers wieder zu geben, und wir dürfen erfreut sein, wenn dieser Hinweis jemanden veranlassen sollte, sich eifrigst mit den Fragen wieder zu beschäftigen, um Lösungen zu erhalten, die den Anforderungen in bezug auf Strenge und Vollständigkeit besser genügen.

Dreieckige Kurven nennt man solche, deren sämtliche reellen Punkte drei endliche Bogen BC, CA, AB bilden, die sich zu zweien in den Punkten A, B, C berühren (Taf. XI, Fig. 85), die also Spitzen der Kurven sind. Ein Beispiel einer derartigen Kurve bietet die dreispitzige Hypozykloide (Nr. 72); daß es deren noch unzählig viele andere gibt, ist zuerst von Euler bewiesen worden, indem er folgendes Problem der geometrischen Optik löste: „Gegeben ein leuchtender Punkt, eine Kurve zu finden derart, daß jeder von jenem ausgehende Lichtstrahl nach zweifacher Reflexion an ihr zum Ausgangspunkt zurückkehrt[1].“

Die Untersuchung der dreieckigen Kurven ist schwerer als die ihrer Evolventen; es ist daher nützlicher in der Untersuchung mit diesen zu beginnen. Wir bezeichnen mit a, b, c die Länge der Bogen BC, CA, AB der dreieckigen Kurven und nehmen an, daß der die Evolvente erzeugende Faden als Anfangslage AF eine Strecke von der Länge f habe. F ist dann der Anfang der Evolvente. Stellen wir uns nun vor, daß der Faden sich von dem Bogen AB abwickele, dann wird zu Ende dieser Operation der Faden die Tangente an die beiden Bogen AB und BC bilden, während der die Evolvente erzeugende Punkt F in G_1 angelangt ist, so daß $BG_1 = \text{Bogen } \widehat{BA} + AF = c + f$. Man setze die Abwickelung auf dem Bogen BC fort, und man wird am Ende zu einem Punkte H gelangen, derart, daß die Gerade CH Tangente in C an die dreieckige Kurve ist, und man hat alsdann, $\text{Bogen } \widehat{BC} + CH = BG_1$, und daher ist $CH = f + c - a$. Wickeln wir nun den Faden auf den Bogen AC auf, so erhält man zuletzt

1) Dieses Problem findet sich formuliert in einem Briefe von Euler an Goldbach vom 16. Februar 1745 (s. P. H. Fuß, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII Siècle,* I. St. Pétersburg, 1843, S. 314) und lieferte für lange Zeit Stoff zu einem Ideenaustausch zwischen diesen Geometern, nicht nur bevor Euler die Lösung veröffentlicht hatte (*Solutio problematis in Actis Lipsiensibus propositi.* Acta erudit. 1746, oder auch a. a. O. S. 341 bis 354), sondern auch nachher (s. die oben angeführte *Correspondance*); die gefundene Linie wird daselbst immer mit dem Namen „curva catoptrica“ bezeichnet; eine von der Eulerschen verschiedene Methode, sie zu bestimmen, wurde von Oechlin erdacht und von Euler dem Goldbach am 25. Juni 1748 mitgeteilt (s. *Correspondance etc.* I., S. 463).

eine Lage F_1 des beweglichen Punktes, derart, daß AF_1 die dreieckige Kurve berührt, so daß $AF_1 = \widehat{AC} + CH = f + b + c - a$. Setzen wir die Abwickelung des Fadens noch weiter fort, so erhält man die Tangente BG, an die Kurve in B, von der Länge, daß $\widehat{AB} + BG_1 = AF_1$ und daher $BG = f + b + c - a - c = f + b - a$; im weiteren Verlauf entsteht dann die Strecke CH_1, die die Kurve wieder in C berührt, so daß $CH_1 = \widehat{BC} + BG = a + f + b - a = f + b$; lassen wir schließlich sich den Faden wieder auf CA aufwickeln, so kommen wir zum Ausgangspunkte F zurück. Es geht daraus hervor, daß jede Evolvente einer dreieckigen Kurve eine geschlossene Kurve von der Gestalt eines Ovals ist, $FG_1HF_1GH_1$, wie es die Figur zeigt; alle Tangenten der dreieckigen Kurve sind doppelte Normalen des Ovales[1]). Euler nannte sie orbiforme Kurven, und stellte bei ihnen mit Hilfe folgender Überlegung eine interessante Eigenschaft fest:

Aus dem Vorigen ergibt sich

$$F_1F = 2f - a + b + c, \quad G_1G = 2f + a - b + c,$$
$$HH_1 = 2f + a + b - c.$$

Ist nun XX_1 eine beliebige Tangente der Kurve und S ihr Berührungspunkt, so ist, wenn wir z. B. annehmen, daß sie dem Bogen AC angehöre

$$SX = \text{Bogen}\,\widehat{SC} + CH = \text{Bogen}\,\widehat{SC} + f + c - a;$$
$$SX_1 = \text{Bogen}\,\widehat{AS} + AF = \text{Bogen}\,\widehat{AS} + f$$

daher

$$SX + SX_1 = \text{Bogen}\,\widehat{AS} + \text{Bogen}\,\widehat{SC} + 2f + c - a,$$

d. h.

$$XX_1 = 2f - a + b + c.$$

Folglich: **Die Normale in einem beliebigen Punkte einer orbiformen Kurve trifft diese in einem zweiten Punkte X_1, in welchem sie ebenfalls normal ist, und der Abstand der beiden Punkte X und X_1 ist konstant**; es ist dies eine bemerkenswerte Eigentümlichkeit, von der man früher glaubte, daß sie ausschließlich dem Kreise zukomme.

Setzen wir $f = a + k$, so nehmen die vorigen Relationen eine mehr symmetrische Form an, die bemerkenswert ist; sie werden dann nämlich zu

1) Diese Kurven sind also, um mit G. Humbert zu reden (*Sur les courbes planes rectificables*, Liouvilles Journ. 4e Sér. IV, 1888, S. 141), komplexe Kurven; er nennt einfache Kurven solche, deren Normalen im allgemeinen einfache Normalen, komplexe solche, bei denen jede Normale eine doppelte Normale ist; es ist bekannt, daß eine nicht zerfallende Kurve nicht alle ihre Normalen als mehrfache von einem Grade > 2 haben kann.

$$AF = a + k, \qquad BG = b + k, \qquad CH = c + k;$$
$$AF_1 = b + c + k, \quad BG_1 = c + a + k; \quad CH_1 = a + b + k;$$
$$FF_1 = GG_1 = HH_1 = XX_1 = a + b + c + 2k.$$

141. Die oben aufgestellten Sätze eignen sich zur Auffindung der allgemeinen Gleichung der Orbiformen. Es sei nämlich FMF_1M_1 (Taf. XI, Fig. 86) eine Orbiforme bezogen auf die Doppelnormale FF_1 als Achse; MM_1 sei eine zweite beliebig gewählte Doppelnormale, welche FF_1 in N schneidet; P und P_1 seien die Projektionen von M und M_1 auf FF_1. Wir setzen

$$FF_1 = MM_1 = 2f; \quad FP = X, \quad PM = Y, \quad PP_1 = x,$$
$$P_1M_1 = -y, \quad \frac{dY}{dX} = P, \quad \frac{dy}{dx} = p,$$

und erhalten dann:

$$MN = Y\sqrt{1 + P^2}, \quad M_1N_1 = -y\sqrt{1 + p^2}, \quad P = p.$$

Sei S der Punkt, in welchem das von M auf FF_1 gefällte Lot die durch M_1 zu FF_1 gezogene Parallele schneidet, so ist, weil

$$\frac{MS}{MP} = \frac{MM_1}{MN},$$

$$MS = 2f\frac{MP}{MN} = \frac{2f}{\sqrt{1+P^2}}, \text{ und daher } M_1S = \frac{2f}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Ferner ist, weil $P = p$,

$$MS = \frac{2fp}{\sqrt{1+p^2}}, \quad M_1S = \frac{2fp}{\sqrt{1+p^2}}.$$

Da ferner

$$MS = MP + M_1P_1 = Y - y, \quad M_1S = FP_1 - FP = x - X,$$

so ergibt sich

$$Y - y = \frac{2f}{\sqrt{1+p^2}}, \quad x - X = \frac{2fp}{\sqrt{1+p^2}} \quad \ldots \quad (5)$$

Wir setzen nun

$$X + x = 2Q, \qquad Y + y = 2R \quad \ldots \quad (6)$$

Kombinieren wir diese mit der vorigen Gleichung, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} Y &= R + \frac{b}{\sqrt{1+p^2}} \\ X &= Q - \frac{fb}{\sqrt{1+p^2}} \end{aligned}\right\} \ldots (7) \qquad \left.\begin{aligned} y &= R - \frac{f}{\sqrt{1+p^2}} \\ x &= Q + \frac{fp}{\sqrt{1+p^2}} \end{aligned}\right\} \ldots (8)$$

Differenzieren wir diese, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} dY &= dR - \frac{fp \cdot dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}} \\ dX &= dQ - \frac{f \cdot dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} dy &= dR + \frac{fp \cdot dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}} \\ dx &= dQ + \frac{f \cdot dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}} \end{aligned}\right\},$$

und weil nun
$$\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx} = p,$$
so folgt
$$dR \mp \frac{fp \cdot dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}} = p \cdot dQ \mp \frac{fp \cdot dp}{\sqrt{(1+p^2)^3}},$$
worin die Vorzeichen einander entsprechen, und die dann darauf zurückgehen, daß $dR = p \cdot dQ$, mit anderen Worten, daß
$$R = \int p \cdot dQ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$
Da wir auf alle Bedingungen des Problems Rücksicht genommen haben, so sehen wir: „Nimmt man für Q eine beliebige Funktion von p, die der einzigen Bedingung unterworfen ist, daß die Integration $\int p \cdot dQ$ ausführbar sei, so liefert die Gleichung (9) R, und daher liefern die Gleichungen (7) die Koordinaten des Punktes M in Funktionen des Parameters p; die Gleichungen (8) liefern dann die des entsprechenden Punktes M_1; belassen wir den Wurzeln ihre Doppeldeutigkeit, so sind die Gleichungen (7) und (8) nicht wesentlich verschieden". Wir können daher die Gleichung (8) als allgemeine parametrische Darstellung der Orbiformen ansehen.

Zu einer anderen bequemeren Darstellung gelangt man, indem man beachtet, daß sich (9) auch schreiben läßt
$$R = pQ - \int Q \cdot dp;$$
setzt man dann $\int Q \cdot dp = S$, oder auch $Q = \frac{dS}{dp}$, so hat man
$$R = p\frac{dS}{dp} - S,$$
und daher
$$x = \frac{dS}{dp} + \frac{fp}{\sqrt{1+p^2}}, \qquad y = p\frac{dS}{dx} - S - \frac{f}{\sqrt{1+p^2}} \quad . \quad . \quad (10)$$
In dieser neueren parametrischen Darstellung der Orbiformen ist S eine beliebige Funktion von p, die jedoch in der Art zu wählen ist, daß die x, y immer als endlich sich ergeben; wollen wir eine algebraische Kurve erhalten, so kann man setzen
$$S = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 p + \alpha_2 p^2 + \cdots \alpha_m p^m}{\beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 p^2 + \cdots \beta_n p^n},$$
wo $m < n$ ist und der Nenner keine reellen linearen Faktoren enthält.

Aus Gleichung (10) kann man die analytische Darstellung der dreieckigen Kurven ableiten, wenn man sich erinnert, daß diese die Evoluten der Orbiformen sind. Um die Rechnung zu vereinfachen, beachten wir, das die ∞^1 Orbiformen, die den unendlich vielen Werten, welche die Konstante f annehmen kann, entsprechen, die Evolventen einer und derselben dreieckigen Kurve sind, so kann man, um die

Darstellung dieser zu erhalten, annehmen, daß für f ein möglichst günstiger Wert gewählt sei, z. B. $f = 0$; dann hat man

$$x = \frac{dS}{dp}, \quad y = p\frac{dS}{dp} - S. \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

Benutzen wir die bekannten Ausdrücke für die Koordinaten t und u des Krümmungsmittelpunktes, so ergibt sich

$$t = \frac{dS}{dp} - p(1+p^2)\frac{d^2S}{dp^2}, \quad u = p\frac{dS}{dp} - S(1+p^2)\frac{d^2S}{dp^2}. \quad . \; (12)$$

Dies ist die gesuchte analytische Darstellung der dreieckigen Kurve; sie zeigt, daß der Krümmungsradius R der Kurve (11) gegeben wird durch

$$R = \sqrt{(1+p^2)^3}\,\frac{d^2S}{dp^2}. \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

Aus (12) kann man ableiten

$$\frac{dt}{dp} = -3p^2\frac{d^2S}{dp^2} - p(1+p^2)\frac{d^3S}{dp^3}, \quad \frac{du}{dp} = 3p\frac{d^2S}{dp^2} + (1+p^2)\frac{d^3S}{dp^3}. \quad . \; (14)$$

und daher ist

$$\frac{dt}{dp} + p\frac{du}{dp} = 0; \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

in jedem reellen Punkte der Kurve, für welchen $\frac{dt}{dp} = 0$, ist auch $\frac{du}{dp} = 0$ und umgekehrt, daher ist dieser Punkt ein singulärer Punkt, d. h. eine der drei Spitzen der Kurve (vorausgesetzt, daß diese die einzigen vielfachen Punkte der Kurve seien).

Aus der Gleichung (14) leitet man ferner ab, wenn s den Bogen der dreieckigen Kurve bedeutet:

$$\frac{ds}{dp} = \sqrt{\left(\frac{dt}{dp}\right)^2 + \left(\frac{du}{dp}\right)^2} = \frac{d}{dp}\left[\sqrt{(1+p^2)^3}\,\frac{d^2S}{dp^2}\right],$$

weshalb wegen (13) $\qquad s = R + const.,$

was man übrigens voraussehen konnte, weil ja die Kurve (12) die Evolute der Kurve (10) ist.

Elftes Kapitel.

Die Multiplikatrix- und die Mediatrix-Kurven.

142. Bei der in Nr. **139** dargelegten Konstruktion der Müngerschen Ovale führen wir die spezielle Voraussetzung ein, daß der Punkt O auf der Peripherie des gegebenen Kreises liegt; dies ist gleichbedeutend mit der Annahme $d = r$; die dortigen Gleichungen (2) und (3) werden dann zu

$$\varrho_n = 2r \cdot \cos^{2n+1}\omega \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

resp.

$$(x^2+y^2)^{n+1} = 2rx^{2n+1} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

und stellen dann eine Kurve von der Ordnung $2(n+1)$ dar, die im Anfange einen $(2n+1)$ fachen Punkt hat, dessen sämtliche Tangenten mit der y-Achse zusammenfallen.

Die einfachste Kurve dieser Art, nächst dem Kreise, erhält man, wenn $n=1$; in diesem Falle ergibt sich eine Kurve vierter Ordnung, die einige Astronomen, unter diesen sogar Kepler[1]), zur Darstellung der Bahn des Planeten Mars angewendet haben; später wurde sie von Pater Villapaudo erdacht, der sie wegen der von ihr gemachten Anwendung auf die Verdoppelung des Würfels Proporzionatrice secondaria nannte;[2]) mehr als zwei Jahrhunderte später (1868) wurde dieselbe Kurve von L. Seidel bemerkt, der sie wegen ihrer Form (s. Taf. XI, Fig. 83*b*) das eigentliche Oval nannte[3]); endlich vor wenigen Jahren traf G. de Longchamps im Verlaufe seiner Untersuchungen über diejenigen Linien, die sich mit Lineal und Winkelscheit konstruieren lassen auch auf diese Kurve und gab ihr den Namen folium simple[4]). Aus der Polargleichung der Kurve

$$\varrho = 2r \cdot \cos^3 \omega$$

ergibt sich die Kurvenfläche (die Kepler vergebens zu bestimmen versucht hatte) als

$$F = 4d^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \omega \cdot d\omega = 4r^2 \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{\pi}{2} = \frac{5}{8} r^2 \pi,$$

d. i. also $\frac{5}{8}$ der Fläche des gegebenen Kreises.[5])

Kehren wir zur allgemeinen Gleichung (1) zurück. Wir betrachten einen beliebigen Punkt P_n der durch sie dargestellten Kurve; wir projizieren ihn in H auf den Durchmesser OC und tragen dann auf der Geraden OP_n die Strecke $OM = OH$ ab; der Ort der Punkte M hat dann offenbar die Polargleichung:

$$\varrho = 2r \cdot \cos^{2n+2} \omega, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

ist daher eine ähnliche Kurve, wie die durch (1) dargestellte. Zwei andere verwandte Kurven werden erhalten durch die Konstruktionen, die wir uns jetzt anschicken darzulegen:

---

1) *Astronomia nova* (Prag, 1609) S. 337.

2) V. Viviani, *Quinto libro die Euclide o Scienza universale delle proporzioni* (Firenze, 1647) S. 275—280.

3) A. Wittstein, *Notiz über das eigentliche Oval* (Arch. Math. Phys. 2. Ser. XIV, 1895).

4) *Essai sur la géométrie de la règle et de l'équerre* (Paris, 1900) S. 126. Vgl. auch *Cours de problèmes de géométrie analytique* II (Paris, 1899) S. 400.

5) Fällt man von einem Punkte A des Halbkreises auf den Durchmesser BC das Lot AH und von H die Lote HP auf AC und AB, so beschreiben die Punkte P die obige Kurve. S. die S. 373 angeführte Abh. von C. H. L. Schmidt.

Gegeben der Kreis mit dem Zentrum C und dem Radius r und einer seiner Durchmesser OCO' (Taf. XI, Fig. 87). Man ziehe durch O einen beliebigen Strahl t und bestimme dessen Schnitt M_1 mit der in O' zu OO' errichteten Senkrechten; die in M_1 zu t errichtete Senkrechte schneide diesen Durchmesser in N_1 und die in N_1 zu OO' errichtete Senkrechte schneide t in $M_2 \ldots$; fährt man so weiter fort, erhält man schließlich auf t einen Punkt M_n, dessen geometrischen Ort wir nun bestimmen wollen. Beachten wir zu dem Zwecke, daß, wenn ω den Winkel zwischen den Geraden OO' und t ist, wir der Reihe nach haben

$$OM_1 = \frac{2r}{\cos\omega}, \quad ON_1 = \frac{2r}{\cos^2\omega}, \quad OM_2 = \frac{2r}{\cos^3\omega} \cdots\cdots$$

$$OM_{n+1} = \frac{2r}{\cos^{2n+1}\omega};$$

der gesuchte Ort hat folglich die Polargleichung

$$\varrho = \frac{2r}{\cos^{2n+1}\omega}; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

er ist demnach eine Kurve $(2n+1)$ter Ordnung, die den Anfang als $2n$ fachen Punkt hat. Sie wurde von Descartes erfunden, der, um sie zu konstruieren, ein geeignetes Gefüge von Winkelscheiten ersann und sich derselben bediente, um zwischen zwei Strecken eine beliebige mittlere Proportionale zu konstruieren[1]); später widmete ihr der Pater Caraccioli ein besonderes Kapitel seines schon angeführten Werkes[2]). Setzen wir im speziellen $n = 1$, so geht sie auf die kubische Duplikatrix von Longchamps zurück (s. S. 93). — Wenn wir nun in dem Punkte M_{n+1} die Senkrechte $M_{n+1}K$ zu t errichten und auf dieser Geraden die Strecke $OR = OK$ abtragen, so erhalten wir offenbar als Ort des Punktes R, die Kurve mit folgender Gleichung

$$\varrho = \frac{2r}{\cos^{2n}\omega}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Ein Blick auf die Gleichungen (1), (3), (4) und (5) zeigt, daß wir imstande sind, punktweise alle Kurven zu konstruieren, die in Polarkoordinaten durch eine Gleichung von folgendem Typus dargestellt werden können

$$\varrho = a \cdot \cos^m \omega, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

wo m eine beliebige positive oder negative ganze Zahl ist.

Ferner entspricht in Bezug auf eine Inversion mit O als Pol und der Potenz $4r^2$ der Kurve (1) die Kurve (4) und der Kurve (3) die Kurve (5).

143. Zu der Kategorie der durch Gleichung (4) dargestellten Kurven gehört auch eine Kurve vierter Ordnung, die — wenn wir die

1) *La géométrie*, Nouv. éd. (Paris 1886) S. 17.

2) *De lineis curvis liber* (Pisis, 1740) S. 112—126.

Konjektur und die Schlüsse P. Tannery's[1]) annehmen wollen — schon von Eudoxus von Knidos angewandt sein dürfte, um das Delische Problem zu lösen. Damit der Leser erkenne, wohin die Argumentationen des bekannten gelehrten Franzosen zielen[2]), ist es nötig sich zu erinnern, daß Archytas von Tarent eine sehr geniale Lösung jenes Problems erdacht hat, die sich auf stereometrische Betrachtungen stützt; er führt nämlich jene berühmte Aufgabe auf die Untersuchung der Schnitte der drei Flächen, Zylinder, Kreisring, Kegel zurück, die durch folgende drei Gleichungen dargestellt sind:

$$x^2 + y^2 = ax, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2},$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{b^2}x^2, \qquad (\text{wo } a > b).$$

Um sich obige Zurückführung klar zu machen, setze man

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad v = \sqrt{x^2 + y^2},$$

dann wird

$$v^2 = ax, \qquad u^2 = av, \qquad u = \frac{a}{b}x,$$

und daher

$$a : u = u : v = v : b,$$

somit sind u und v die gesuchten mittleren Proportionalen. Während nun der theoretische Wert dieser Lösung von niemandem in Zweifel gezogen wird, ist der praktische Nutzen kurzerhand zu verneinen, was nicht Wunder nehmen kann, wenn man weiß, in welcher Weise sie von dem Kommentator Eutokius von Askalon dargestellt wurde[3]). Sie kann jedoch in eine andere völlig ausführbare umgewandelt werden, wenn man die Projektionen der Kurven, in welchen diese drei Hilfsflächen sich gegenseitig schneiden, auf die Koordinatebenen betrachtet. Von diesen Projektionen bieten sich zunächst die auf die xy-Ebene dar; die eine ist der Kreis $x^2 + y^2 = ax$, die andere eine Kurve, welche als kartesische Gleichung hat

$$a^2(x^2 + y^2) = \frac{a^4}{b^4}x^4, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

und als Polargleichung

$$\varrho = \frac{b^2}{a}\frac{1}{\cos^2\omega}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

Diese Kurve ist es, von der Tannery annimmt, daß sie von Eudoxus angewendet sei, um in der Ebene die von seinem Lehrer entworfene

---

1) *Sur les résolutions du problème de Délos par Archytas et par Eudoxe* (Mém. Soc. sc. Bordeaux 2e Sér. II, 1878).

2) Näheres hierüber sehe man in G. Loria, *Le scienze esatte nell' antica Grecia*, Lib. I, Nr. 51, 52, 73.

3) *Archimedis opera omnia* ed. Heiberg, III. (Lipsiae, 1881) S. 98 ff.

Konstruktion auszuführen, und daß dieses die von ihm mit dem vagen Namen Kampyla (καμπύλη γραμμή) bezeichnete Kurve sei.

Um sie zu zeichnen, kann man in folgender Weise verfahren: Man nehme (Taf. XI, Fig. 88) die beiden Strecken $AD = a$ und $DB = b$ so gegeneinander geneigt, daß der Winkel ABD ein rechter wird, ziehe dann durch A eine beliebige Gerade, welche das von B auf AD gefällte Lot BE im Punkte G schneidet; dann trage man auf AD die Strecke $AH = AG$ ab, die in H zu AD errichtete Senkrechte schneidet AG in einem Punkte P der durch Gleichung (8) dargestellten Kurve. Diese ist symmetrisch in bezug auf beide Koordinatachsen, hat den Anfang als isolierten Punkt, und ihre reellen Punkte liegen alle außerhalb des Streifens der Ebene, der von den beiden Geraden $x = \pm \frac{b^2}{a}$ begrenzt wird. Sie ist folgender parametrischer Darstellung fähig:

$$x = \frac{b^2}{a} \frac{1}{\cos\omega}, \quad y = \frac{b^2}{a} \frac{\sin\omega}{\cos^2\omega}, \quad \ldots\ldots \quad (8')$$

aus welcher sich für die drei Punkte (α), (β), (γ) die Kollinearitätsbedingung ergibt

$$\begin{vmatrix} 1 & \operatorname{tg}\alpha & \cos\alpha \\ 1 & \operatorname{tg}\beta & \cos\beta \\ 1 & \operatorname{tg}\gamma & \cos\gamma \end{vmatrix} = 0,$$

oder auch

$$\cos(\beta + \gamma) + \cos(\gamma + \alpha) + \cos(\alpha + \beta) = 1.$$

Setzen wir $\alpha = \beta = \gamma = \vartheta$, so findet man die Gleichung

$$3\cos 2\vartheta = 1,$$

für die Bestimmung der Wendepunkte der Kurve; diesen entsprechen demnach die Werte

$$\vartheta = \operatorname{arc}\cos\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right),$$

dies zeigt uns, daß die Kurve zu Wendepunkten die vier Punkte mit den Koordinaten hat

$$x = \pm\frac{b^2}{a}\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad y = \pm\frac{b^2}{a}\sqrt{\frac{3}{4}}.$$

B. Tortolini[1]) hat die Beobachtung gemacht, daß die (7) eine Kurve ist, die man auf zwei verschiedene Arten als Spezialfall einer von einem Kegelschnitt abgeleiteten Kurve ansehen kann[2]). Um sich

1) S. die bibliographische Revue, *Sopra alcune curve derivate dall' ellisse* (Ann. di Matem. IV, 1861).

2) Es sei bemerkt, daß die folgenden Ableitungsmethoden als besondere Cremonasche Transformationen angesehen werden können.

davon zu überzeugen, betrachte man einen beliebigen Punkt M der Ellipse (s. Taf. XI, Fig. 89)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und bestimme den Schnitt T der zugehörigen Tangente mit der Fokalachse und ferner den Punkt M', in welchem die Gerade OM die Parallele durch T zur anderen Achse schneidet. Die Gleichung des Ortes von $M'(x', y')$ ist nichts anderes als das Resultat der Elimination von x und y aus den drei Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}, \qquad xx' = a^2,$$

lautet also

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = \frac{x'^4}{a^4}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

welche im Falle $b = a$ identisch mit (7) ist. — Wenn man dagegen, nachdem die Normale in M an die genannte Ellipse gezogen ist, den Schnittpunkt M_1 derselben mit der durch T zur y-Achse gezogenen Parallelen bestimmt, so erhält man die Gleichung des Ortes von $M_1(x_1, y_1)$ durch Elimination von x und y aus den Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad xx_1 = a^2, \quad \frac{a^2 x_1}{x} - \frac{b^2 y_1}{y} = a^2 - b^2$$

als

$$b^2 x_1^2 y_1^2 = (x_1^2 - a^2)(x_1^2 - a^2 + b^2)^2; \quad \ldots \quad (10)$$

auch diese nimmt im Falle $b = a$, von dem Faktor x_1^2 befreit, die Form von (7) an, wie oben angedeutet.

144. Diejenigen Kurven, welche — in gleicher Weise, wie die meisten in diesem Kapitel auftretenden — zur Lösung des verallgemeinerten Delischen Problems, d. h. zur Vervielfältigung des Würfels, oder zur Einschaltung mehrerer mittlerer Proportionalen zwischen zwei gegebenen Strecken, dienen können, kann man Multiplikatrix- bezw. Mediatrix-Kurven nennen. Zu dieser großen Kurven-Gattung gehören auch vier Gruppen von Kurven, die Alexis Clairaut erdacht hat, als er erst zwölf und ein halbes Jahr alt war. Die Abhandlung, in welcher er diese veröffentlichte, erntete in der Sitzung vom 18. Mai 1726 die Billigung und den Beifall der Pariser Akademie und wurde kurz darauf durch Vermittelung der Berliner Akademie veröffentlicht[1]); wir wollen hier dabei verweilen, ihren Inhalt darzulegen.

I. Es sei ein rechter Winkel xOy gegeben (Taf. XI, Fig. 90) und auf seinem Schenkel Ox ein Punkt A; man suche den Ort des

---

1) *Quatre problèmes sur de nouvelles courbes par M. Alexis Clairaut le Fils* (Miscellanea Berolinensia IV, Berlin, 1734).

Punktes M, so daß, wenn man die Senkrechte MQ auf Ox fällt, $\overline{MQ}^2 = OA \cdot OM$.

Die Gleichung dieses Ortes ist offenbar, wenn $OA = a$,

$$y^2 = a\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{a}{\sin^2 \omega}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

der Ort selbst ist demnach eine Kampyla. Die Gleichung läßt sich aber leicht verallgemeinern und gibt dann, wenn m eine positive rationale Zahl ist,

$$y^m = a^{m-1}\sqrt{x^2 + y^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

welche eine neue Kurve darstellt, deren Anwendung auf das verallgemeinerte Delische Problem wir zeigen wollen. Zu dem Zwecke beschreiben wir (s. Fig. 90) um den Mittelpunkt O mit OA als Radius einen Kreis; er schneide die Gerade OM in G, während die Tangente in G den Schenkel Oy in F schneidet. Man erkennt nun leicht, daß die durch Gleichung (11) dargestellte Kurve sich der durch

$$\overline{OF}^2 = OG \cdot OM$$

ausgedrückten Eigenschaft erfreut. OF ist also mittlere Proportionale zwischen OG und OM. Würde hingegen OF die n^{te} mittlere Proportionale zwischen denselben Strecken OG und OM sein, so würde man haben

$$\overline{OF}^{n+1} = \overline{OG}^n \cdot OM,$$

und der Ort der Punkte M hätte die Gleichung:

$$\frac{a^{n+1}(x^2 + y^2)^{\frac{n+1}{2}}}{y^{n+1}} = a^n (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}},$$

oder

$$y^{1+\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \sqrt{x^2 + y^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12')$$

und diese Gleichung fällt mit (12) zusammen, wenn man $m = 1 + \frac{1}{n}$ setzt. Dies zeigt, daß jede Kurve vom Typus (12′) zur Bestimmung der n^{ten} mittleren Proportionale dienen kann.

Wenn $m = \frac{p}{q}$, wo p, q positive ganze, relativ prime Zahlen sind, so ist die Ordnung der durch (12) dargestellten Kurve, wenn q ungerade ist, gleich der größeren der beiden Zahlen $2p, 2q$, jedoch wenn q gerade ist, gleich der größeren der beiden Zahlen p, q.

II. Die Daten seien dieselben wie bei der vorigen Aufgabe; man suche den Ort des Punktes M, so daß $\overline{OM} \cdot \overline{QM} = \overline{OA}^2$. Die Gleichung derselben ist ersichtlich

$$\sqrt{x^2 + y^2} \cdot y = a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Durch Verallgemeinerung wird sie zu

$$\sqrt{x^2+y^2}\cdot y^{m-1} = a^m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

Nun kann die Kurve (13) auch durch die Relation

$$\overline{OM}^2 = OF \cdot OG$$

definiert werden, sie ist also der Ort der Punkte M, derart, daß OM mittlere Proportionale zwischen OF und OG ist. Suchen wir ähnlicherweise den Ort derjenigen Punkte M, bei welchen OM die n^{te} mittlere Proportionale zwischen OF und OG wird, so bekommt man aus der Relation

$$\overline{OM}^{n+1} = \overline{OF} \cdot \overline{OG}^n,$$

die Gleichung

$$\sqrt{x^2+y^2}\cdot y^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}+1}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14')$$

welche mit (14) koinzidiert, wenn man $m = 1 + \frac{1}{n}$ setzt; für einen derartigen Wert von m ist also die Kurve (14′) eine Mediatrix. Sie ist, wenn $m = \frac{p}{q}$ von der Ordnung p oder $2p$, jenachdem q gerade oder ungerade. Schreiben wir (14) folgendermaßen

$$y^{1-m} = a^{-m}\sqrt{x^2+y^2},$$

so sieht man, daß die Gleichung (14) als unter (12) einbegriffen aufgefaßt werden kann, wenn man zuläßt, daß m auch negative Werte annehmen kann. Clairaut hat die durch (12) und (14) dargestellten Kurven mit dem Namen Courbes des médianes paraboliques et hyperboliques bezeichnet.

III. Die Daten seien wieder dieselben; man beschreibe um das Zentrum O den Kreis mit dem Radius OA, er schneide die Ordinate MQ des Punktes M in G; gesucht wird der Ort der Punkte M, so daß MG mittlere Proportionale zwischen OA und QG ist. Seine Gleichung ist offenbar

$$a\sqrt{a^2-x^2} = y^2; \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

durch Verallgemeinerung erhält man die Kurve mit der Gleichung

$$a(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}} = y^{n+1}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (16)$$

IV. Wenn man schließlich — unter Beibehaltung der bei der vorigen Aufgabe gemachten Annahmen — will, daß OA mittlere Proportionale zwischen QM und QG wird, so erhält man als Ort der Punkte M eine Kurve, die durch die Gleichung

$$y\sqrt{a^2-x^2} = a^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (17)$$

dargestellt wird; und wenn man auch diese verallgemeinert, gelangt man zu

$$y(a^2-x^2)^{\frac{n}{2}} = a^{n+1}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

Es ist leicht einzusehen, daß von den Gleichungen (12) und (14) die eine in die andere übergeht, wenn man annimmt, daß die Indizes m und n miteinander durch die Beziehung

$$m + n = 1$$

verknüpft sind, während dasselbe für Gl. (16) und (18) eintritt, wenn die Beziehung besteht

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + 1 = 0.$$

Hieraus geht hervor, daß die Clairautschen Kurven sich in nur zwei Klassen scheiden, nämlich die mit bzw. den beiden Gleichungen

$$y^m = a^{m-1}\sqrt{x^2 + y^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I})$$

und

$$y = \frac{a^{m+1}}{\sqrt{(a^2 - x^2)^n}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{II})$$

Führen wir für (I) Polarkoordinaten ein, so erhalten wir

$$\varrho = \frac{a}{\sin^{\frac{m}{m-1}} \omega} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\mathrm{I}')$$

und kommen somit auf eine Kurvengruppe zurück, die wir schon in Nr. **142** untersucht haben, unter denen sich für $m = \frac{3}{2}$ die kubische Duplikatrix (Nr. **50**), für $m = \frac{2}{3}$ die Doppeleilinie (Nr. **139**) und für $m = \frac{3}{4}$ das Folium simple (Nr. **142**) befinden. Erinnern wir uns nun, daß der Winkel μ der Tangente gegen den zugehörigen Vektor durch

$$\operatorname{tg} \mu = \varrho \frac{d\omega}{d\varrho}$$

gegeben wird, so sehen wir: Um die Kurven mit der Eigenschaft $\operatorname{tg} \varrho \cdot \operatorname{tg} \mu = k$, gleich einer Konstanten, zu finden, hat man die Gleichung

$$\varrho \cdot \operatorname{tg} \varrho \cdot \frac{d\omega}{d\varrho} = k$$

zu integrieren; dies läßt sich leicht ausführen und liefert

$$\varrho = \frac{c}{\cos^{\frac{k}{2}} \omega}.$$

Diese stimmt im wesentlichen mit (I′) überein, folglich besitzen alle Clairautschen Kurven vom Typus I die oben hervorgehobene Eigenschaft.[1])

Die vom Typus II hingegen lassen sich durch einen Parameter so darstellen:

---

1) Diese Bemerkungen zugleich mit anderen finden sich in der Note von P. Ernst, *Die Clairautschen Multiplikatrix-Kurven* (Arch. Math. Phys. 3. Reihe, XV, 1909).

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cdot \cos\varphi \\ y &= \frac{a}{\sin^{\frac{n}{2}}\varphi} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{II}')$$

Die Quadratur der Clairautschen Kurven läßt sich vermittelst der Funktion Γ ausführen. — Ihre Klassifikation vom topologischen Standpunkte ist noch nicht ausgeführt worden, obwohl sie dies verdienen dürften.

Zwölftes Kapitel.

Die Sektrix-Kurven.

145. Nachdem die Mathematiker eingesehen hatten, daß das alte Problem der Dreiteilung eines Winkels sich durch alleinige Anwendung der Geraden und des Kreises nicht lösen lasse, richteten sie ihre Bemühungen dahin, leicht zu zeichnende Kurven zu ersinnen, welche zu denselben Zwecken dienen könnten. Viele der vorhergehenden Seiten legen Zeugnis davon ab, welche Vorteile infolgedessen der Theorie der ebenen Kurven zu gute gekommen sind. Nicht weniger fruchtbar waren die wiederholten und vielfachen Anstrengungen, die man machte, um das allgemeinere Problem der Teilung eines Winkels in beliebig viele gleiche Teile zu lösen. Hierfür hat man, außer den Rhodoneen (Kap. 8)[1]) viele andere spezielle Linien in Anwendung gebracht. Wir wollen nun die wichtigsten von ihnen anführen, jedoch die allgemeine Bemerkung voraufschicken, daß nur diejenigen Sektrix-Kurven einen wirklichen Nutzen in der Praxis gewähren, die sich mechanisch durch kontinuierliche Bewegung erzeugen lassen.

I. In demjenigen der *Opuscula mathematica Thomae Cevae* (Mediolani, 1699), welches den Titel trägt *Cycloidum anomalarum descriptio* findet sich (S. 31) die Konstruktion einer neuen Kurve, die der Autor Cyclois anomala nennt, und deren Anwendung auf die Teilung eines Winkels in eine beliebige ungerade Anzahl gleicher Teile er darlegt.[2]) Die Entstehung derselben ist folgende: Gegeben ein Kreis

---

1) Ridolfi, *Di alcuni usi delle epicicloidi e di uno strumento per la loro descrizione* (Firenze, 1844).

2) Von diesen Kurven wird mehrmals gesprochen in dem Briefwechsel zwischen T. Ceva und G. Grandi; so findet man in dem Briefe vom 17. April 1700 zum ersten Mal ein Verfahren, an die erste jener Kurven (die Trisektrix) die Tangente zu ziehen, während in dem vom 27. Mai desselben Jahres diese Methode auf alle solche Kurven ausgedehnt wird. Später (Brief vom 19. Juni 1700) beschäftigte sich Grandi mit ihrer Rektifikation. Vgl. A. Paoli, *La scuola di Galileo nella storia della filosofia. Documenti. Corrispondenza del P. Grandi col P. Ceva* (Ann. delle Univ. Toscane XXXVIII und XXXIX, 1908—09).

mit dem Zentrum O und dem Radius a, sowie eine durch den Mittelpunkt gehende Gerade Ox (Taf. XIII, Fig. 101); der eine Schnitt derselben mit der Peripherie heiße A. Man ziehe nun durch O eine beliebige Gerade r, welche die Peripherie in M schneidet und zeichne nun der Reihe nach auf Ox und auf r die Punkte $A_1, A_2, A_3 \ldots$, $M_1, M_2, M_3 \ldots$ derart, daß $MA_1 = A_1M_1 = M_1A_2 = A_2M_2 = \ldots = a$; variiert man nun r, indem man sie um O dreht, so beschreiben die Punkte $M_1, M_2, M_3 \ldots$ ebenso viele Cevaschen Zykloiden[1]). Suchen wir die Gleichungen derselben für ein Polarkoordinatensystem mit O als Pol, Ox als Achse. Zu dem Zwecke bezeichnen wir mit ω den Winkel der Geraden r mit Ox, mit $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3 \ldots$ die Strecken $OM_1, OM_2, OM_3 \ldots$; dann haben wir ersichtlich

$$\begin{aligned} \sphericalangle MOA_1 &= \sphericalangle MA_1O = \omega; \\ \sphericalangle MM_1A_1 &= \sphericalangle A_1MM_1 = 2\omega, \\ \sphericalangle M_1A_1A_2 &= \sphericalangle M_1A_2A_1 = 3\omega; \\ \sphericalangle M_2M_1A_2 &= \sphericalangle M_1M_2A_2 = 4\omega, \ \ldots\ldots \text{ usw.} \end{aligned}$$

außerdem ist

$$OM = a; \quad MM_1 = 2a \cdot \cos 2\omega; \quad M_1M_2 = 2a \cdot \cos 4\omega; \quad \text{usw.}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \varrho_k &= OM + MM_1 + \cdots + M_{k-1}M_k \\ &= a + 2a \cdot \cos 2\omega + 2a \cdot \cos 4\omega + \cdots + 2a \cdot \cos 2k\omega, \end{aligned}$$

oder auch

$$\varrho_k = a + 2a \frac{\sin k\omega \cdot \cos(k+1)\omega}{\sin \omega}. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Dies ist die Polargleichung der k^{ten} Cevaschen Zykloide; man kann daraus folgern, daß sie eine rationale Kurve ist. Geht man zu kartesischen Koordinaten über, so bekommt man:

$$(x^2+y^2)^{2k+1} = \Big\{ a(x^2+y^2)^k - 2a\Big[\binom{k}{1}x^{k-1} - \binom{k}{3}x^{k-3}y^2 + \cdots\Big] \Big[\binom{k+1}{0}x^{k+1} - \binom{k+1}{2}x^{k-1}y^2 + \cdots\Big]\Big\}^2, \quad \ldots \quad (2)$$

woraus hervorgeht, daß die entsprechende Kurve von der Ordnung $4k+2$ ist. Denken wir uns nun eine solche Kurve konstruiert und legen einen gegebenen Winkel α mit dem einen Schenkel auf Ox und bestimmen den Schnitt des anderen mit $(k-1)^{\text{ten}}$ der genannten Zykloiden, so liefert dieser Schnittpunkt mit O verbunden einen Winkel $= \frac{\alpha}{2k+1}$; man ersieht daraus, daß die Cevaschen Kurven tatsäch-

1) Wir glauben nicht zu irren, wenn wir daran festhalten, daß der italienische Geometer zur Erfindung seiner Kurven durch das 8te Lemma des Archimedes veranlaßt wurde. Vgl. z. B. Cantor, *Vorlesungen über Gesch. der Math.* I (3. Aufl. Leipzig, 1907) S. 300.

lich Sektrix-Kurven sind. Der Fundamentalgedanke der Erzeugung der Cevaschen Zykloiden wurde später von Perrin wieder aufgenommen und für einen Polysektormechanismus verwendet[1]).

146. II. Es seien zwei feste Punkte A und A' gegeben (Taf. XIII, Fig. 102), man betrachte den Ort eines Punktes P (Sektrix-Kurve von Plateau[2]) oder auch *isozyklotomische Kurven*[3]) genannt), so daß, wenn man die Geraden PA, PA' zieht, der Winkel PAA', innerhalb des von den beiden festen und dem beweglichen Punkte gebildeten Dreiecks in einem bestimmten Verhältnisse zu dem Außenwinkel $PA'B$ steht[4]).

Es sei $2a$ die Länge der Strecke AA'; n und n' seien zwei positive teilerfremde ganze Zahlen, von denen die erstere z. B. kleiner als die zweite ist, und ferner

$$\frac{\sphericalangle PAA'}{n} = \frac{\sphericalangle PA'B}{n'}.$$

Bezeichnet man nun den gemeinsamen Wert dieser Verhältnisse mit φ, so ist

$$\sphericalangle PAA' = n\varphi, \quad \sphericalangle PA'B = n'\varphi.$$

Nehmen wir jetzt ein rechtwinkliges kartesisches System mit AA' als x-Achse und der Mitte von AA' als Anfangspunkt, so ist, wenn PH senkrecht zu AA' gezogen wird,

$$y = (x + a)\operatorname{tg} n\varphi = (x - a)\operatorname{tg} n'\varphi; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

daher

$$x = \frac{\sin(n' + n)\varphi}{\sin(n' - n)\varphi}, \quad y = 2a\frac{\sin n\varphi \cdot \sin n'\varphi}{\sin(n' - n)\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

und dies ist die bequemste parametrische Darstellung der Kurve. Sie zeigt, daß die betreffende Kurve rational ist. Aus Gleichung (3) folgt

$$\frac{x + a}{x - a} = \frac{n' \cdot \dfrac{\operatorname{tg} n'\varphi}{n'\varphi}}{n \cdot \dfrac{\operatorname{tg} n\varphi}{n\varphi}},$$

und daraus

$$\lim_{\varphi = 0}\left(\frac{x + a}{x - a}\right) = \frac{n'}{n}.$$

Es ergibt sich hieraus, daß die Kurve die Gerade AA' in einem

1) *Note sur la division mécanique de l'angle* (Bull. Soc. math. France, IV, 1875/76.).

2) Corresp. mathématique et physique IV, 1828, S. 359.

3) E. Collignon, *Courbes divisant en parties égales une série d'arcs de cercles* (*courbes isocyclotomes*) (Ass. franç. XXXI, 1903).

4) Vgl. P. H. Schoute, *Sur les courbes sectrices* (Journ. de math. spéc. 2[e] Sér. IV, 1885). Setzt man $\sphericalangle PAA' = \omega$, $PA'A = \omega'$, so hat man $\omega = n\varphi$, $\omega' = \pi - n'\varphi$, daher $n'\omega + n\omega' = n\pi = Const.$; demnach gehören die in Frage stehenden Schoute Kurven zur Klasse der allgemeinen Strophoiden (s. Nr. 41).

Punkte C $(x_0, 0)$ schneidet, derart, daß $\frac{x_0 + a}{x_0 - a} = \frac{n'}{n}$; die Abszisse x_0 von C wird also gegeben durch

$$x_0 = a\frac{n' + n}{n' - n}. \qquad (5)$$

Setzt man $PA = \varrho$ und $PA' = \varrho'$, so hat man

$$\varrho = \sqrt{(x + a)^2 + y^2}, \quad \varrho' = \sqrt{(x - a)^2 + y'^2}.$$

Alsdann geben die Gleichungen (4)

$$\varrho = 2a\frac{\sin n'\varphi}{\sin (n' - n)\varphi}, \quad \varrho' = 2a\frac{\sin n\varphi}{\sin (n' - n)\varphi}. \qquad (6)$$

Bezeichnen wir nun die Winkel PAA' und $PA'B$ mit ω und ω', so ist $n\varphi = \omega$, $n'\varphi = \omega'$, und die Gleichungen (6) verwandeln sich in folgende

$$\varrho = 2a\frac{\sin\frac{n'}{n}\omega}{\sin\left(\frac{n'}{n} - 1\right)\omega}, \quad \varrho' = 2a\frac{\sin\frac{n}{n'}\omega'}{\sin\left(1 - \frac{n}{n'}\right)\omega'} \qquad (6')$$

Jede derselben stellt eine der betrachteten Kurven in Polarkoordinaten dar[1]).

Die Gleichungen (4) lassen erkennen, daß im allgemeinen x und y unendlich werden, wenn

$$(n' - n)\varphi = k\pi,$$

wo k eine ganze Zahl ist, ausgenommen ist $k = 0$ (weil dies zu dem Punkte C in endlicher Entfernung führt); setzen wir $k = 1, 2, \cdots, n' - n - 1$, so erhalten wir für φ $n' - n - 1$ Werte inkongruent $(mod\ \pi)$, denen ebensoviele reelle, unendlich ferne Punkte der Kurve entsprechen. Suchen wir die entsprechenden Asymptoten, indem wir uns der ersten von den Gleichungen (6′) bedienen. Wir beachten, daß die unendlich fernen Punkte der Kurve folgenden Werten von ω entsprechen: $\frac{kn\pi}{n' - n}$, wo $k = 1, 2, 3, \ldots\ldots, n' - n - 1$. Nennen wir irgend einen dieser Werte α, so wird die Gleichung der entsprechenden Asymptote lauten:

$$x \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + y \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = d, \quad \text{oder} \quad -x \sin \alpha + y \cos \alpha = d,$$

---

1) Besondere Fälle:

a) $n = 1$, $\varrho = \frac{2a \sin n'\omega}{\sin(n' - 1)\omega}$, $\varrho' = \frac{2a \sin\frac{\omega}{n'}}{\sin\frac{n' - 1}{n'}\omega}$,

b) $n = n' - 1$, $\varrho = \frac{2a \sin\frac{n'}{n' - 1}\omega}{\sin \omega}$, $\varrho' = \frac{2a \sin\frac{n' - 1}{n'}\omega}{\sin\frac{\omega}{n'}}$;

diese Gleichungen wurden schon von uns in einem besonderen Falle angewandt (S. 85, Note 2).

indem[1])

$$d = \lim_{\omega=\alpha} [\varrho(\omega - a)];$$

setzen wir nun für ϱ und α ihre Werte ein, so finden wir

$$d = (-1)^k \cdot 2a \cdot \frac{n}{n'-n} \sin \frac{kn\pi}{n'-n}$$

$$= (-1)^k \cdot 2a \cdot \frac{n}{n'-n} \sin \left(k\pi + \frac{kn\pi}{n'-n}\right) = \frac{2na}{n'-n} \sin \frac{kn\pi}{n'-n}.$$

Die allgemeine Gleichung der Asymptoten wird daher

$$\sin \frac{kn\pi}{n'-n}\left[x + \frac{2an}{n'-n}\right] + y \cos \frac{kn\pi}{n'-n} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots\ldots, n'-n-1).$$

Da diese, welches auch der Wert von k sei, befriedigt wird durch $x = -\frac{2na}{n'-n}$, $y = 0$, **so laufen die $n'-n-1$ reellen Asymptoten der betrachteten Kurve in einen Punkte $D\left(-\frac{2an}{n'-n}, 0\right)$ zusammen.**

Durch Elimination von φ aus den Gleichungen (3) erhalten wir die kartesische Gleichung der Kurve. Um diese Elimination auszuführen, wenden wir die bekannte allgemeine Relation

$$\operatorname{tg} r\omega = \frac{\binom{r}{1}\operatorname{tg}\omega - \binom{r}{3}\operatorname{tg}^3\omega + \binom{r}{5}\operatorname{tg}^5\omega - \cdots}{\binom{r}{0} - \binom{r}{2}\operatorname{tg}^2\omega + \binom{r}{4}\operatorname{tg}^4\omega - \cdots} \quad . \; . \; . \quad (*)$$

an auf die Identität

$$\operatorname{tg}(n' \cdot n\varphi) = \operatorname{tg}(n \cdot n'\varphi)$$

und erhalten

$$\frac{\binom{n'}{1}\operatorname{tg} n\varphi - \binom{n'}{3}\operatorname{tg}^3 n\varphi + \binom{n'}{5}\operatorname{tg}^5 n\varphi - \cdots}{\binom{n'}{0} - \binom{n'}{2}\operatorname{tg}^2 n\varphi + \binom{n'}{4}\operatorname{tg}^4 n\varphi - \cdots}$$

$$= \frac{\binom{n}{1}\operatorname{tg} n'\varphi - \binom{n}{3}\operatorname{tg}^3 n'\varphi + \binom{n}{5}\operatorname{tg}^5 n'\varphi - \cdots}{\binom{n}{0} - \binom{n}{2}\operatorname{tg}^2 n'\varphi + \binom{n}{4}\operatorname{tg}^4 n'\varphi - \cdots}$$

setzen wir hierin die aus Gleichung (3) entnommenen Werte für $\operatorname{tg} n\varphi$, $\operatorname{tg} n'\varphi$ ein, so erhalten wir

$$\frac{\binom{n'}{1}\frac{y}{x+a} - \binom{n'}{3}\left(\frac{y}{x+a}\right)^3 + \binom{n'}{5}\left(\frac{y}{x+a}\right)^5 - \cdots}{\binom{n'}{0} - \binom{n'}{2}\left(\frac{y}{x+a}\right)^2 + \binom{n'}{4}\left(\frac{y}{x+a}\right)^4 - \cdots}$$

$$= \frac{\binom{n}{1}\frac{y}{x-a} - \binom{n}{3}\left(\frac{y}{x-a}\right)^3 + \binom{n}{5}\left(\frac{y}{x-a}\right)^5 - \cdots}{\binom{n}{0} - \binom{n}{2}\left(\frac{y}{x-a}\right)^2 + \frac{n}{4}\left(\frac{y}{x-a}\right)^4 - \cdots}.$$

---

1) S. z. B. Hoüel, *Cours de calcul infinitésimal*, II. (Paris, 1879) S. 22.

Schafft man die Nenner fort, so erhält man eine Gleichung vom $(n'+n-1)^{\text{ten}}$ Grade; dies ist also die Ordnung der Kurve.

Man ziehe nun durch A eine beliebige Gerade und nenne α den kleinsten Winkel, welchen sie mit AA' bildet. Setzen wir

$$n\varphi \equiv \alpha\,(mod\ \pi),$$

so erhalten wir n Werte für φ, die untereinander inkongruent $(mod\ \pi)$ sind; diesen entsprechen ebenso viele von $n'\varphi$; demnach entsprechen jeder durch A gehenden Geraden n solcher durch A', die die Kurve in ebenso vielen Kurvenpunkten schneiden; jede durch A gehende Gerade schneidet demnach die Kurve in n von A verschiedenen Punkten **demnach ist der Punkt A ein $(n'-1)$-facher für die Kurve, ebenso ist A' ein $(n-1)$ facher Punkt.** Diese Schlüsse werden durch die Gleichungen (6) bestätigt und ergänzt. Die erste derselben läßt nämlich erkennen, daß $\varrho = 0$ wird, wenn man dem φ einen von 0 verschiedenen Wert gibt so, daß $n'\varphi \equiv 0\ (mod\ \pi)$; man erhält so die Werte $\frac{\pi}{n'}, \frac{2\pi}{n'}, \ldots\ldots, \frac{(n'-1)\pi}{n'}$, denen ebensoviele, die Kurve in A berührende Geraden entsprechen. **Also teilen die $(n'-1)$ Tangenten der Kurve in A zusammen mit der Geraden AA' den Winkelraum um A in n' gleiche Teile.** In ähnlicher Weise teilen die $(n-1)$ Tangenten an die Kurve im Punkte A' zusammen mit der Geraden AA' den Raum um A' in n gleiche Teile.

Wir haben gesehen, daß jede Gerade r durch A, n von A verschiedene Punkte der Kurve enthält. Nehmen wir im speziellen an, daß r durch I, den einen der beiden imaginären Kreispunkte gehe; dann wird $\operatorname{tg} n\varphi = i$ sein, und — dies beweist Gleichung (*) — $\operatorname{tg}\varphi = i$ und $\operatorname{tg} n'\varphi = i$; daher entsprechen der Geraden AI n mit $A'I$ zusammen fallende Geraden: I ist also ein n-facher Punkt der Kurve. Dasselbe trifft zu für den anderen Kreispunkt J. Die untersuchte Kurve (von der Ordnung $n+n'-1$) schneidet also die unendlich ferne Gerade in den vorher aufgefundenen $n-n'-1$ reellen Punkten und in den beiden imaginären Kreispunkten, die n-fach zu zählen sind.

Die Kurven, welche man für $n=1$ erhält, sind Sektrices im eigentlichen Sinne des Wortes; denken wir uns nämlich eine derselben für einen gewissen Wert von n' gezeichnet, und legen einen gegebenen Winkel α mit dem Scheitel auf A' und mit dem einen Schenkel auf $A'B$, so wird der andere Schenkel die Sektrix in n' Punkten P schneiden, deren jeder mit A verbunden einen Winkel PAA', der gleich dem n'^{ten} Teile von $\alpha + k\pi$ ist. Unter dieser Kategorie von Sektrix-Kurven findet sich: für $n'=1$ die unendlich ferne Gerade; für $n'=2$ der um A' mit dem Radius $A'A$ beschriebene Kreis; für $n'=3$ die Trisektrix von Maclaurin[1]) (s. Nr. 46).

1) Von diesem Gesichtspunkte aus wurde die Kurve durch J. d'Almeida untersucht, *Sobre una curva de terceiro grao* (Journal von Teixeira, VI, 1885).

Bemerkenswert ist auch der Fall $n = 2$, $n' = 3$; die entsprechende Kurve ist vierter Ordnung und heißt Sesquisektrix; wir überlassen es dem Leser nachzuweisen, daß sie nichts anderes als eine besondere Pascalsche Schnecke (s. Nr. **46**) ist; diejenige nämlich, welche man erhält, wenn man auf den von einem festen Punkte der Peripherie ausgehenden Sehnen Strecken gleich dem Radius abträgt.

147. Setzt man in der Gleichung (6) $n = 1$ voraus und schreibt man n statt n', so erhält man die folgende Gleichung:

$$\varrho = \frac{2a \sin n\varphi}{\sin(n-1)\varphi} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (7)$$

Auf die so dargestellten Kurven traf der Ingenieur Wasserschleben und untersuchte sie in der Abhandlung *Zur Teilung des Winkels*[1]). Unabhängig von ihm und von Schoute, wurden sie darauf betrachtet von O. P. Dexter[2]), von Habich[3]) und von G. Lazzeri[4]). Der vorletzte der angeführten Autoren hat in seiner Arbeit eine geistvolle Beobachtung gemacht, die wir hier berichten wollen. Bei der Gl. (7) war bisher angenommen, daß n ganzzahlig sei; es ist klar, daß sie auch dann einen Sinn behält, wenn man für n gebrochene und irrationale Werte zuläßt; wir können daher in ihr n kontinuierlich sich verändern lassen, und erhalten demgemäß eine kontinuierliche Schar von Kurven. Wir nehmen nun im besonderen an, daß n nach 0 hin abnehme, während a ins Unendliche wächst, in der Weise, daß das Produkt $2an$ einem unendlichen Grenzwerte l zustrebt; wenn wir nun Gleichung (7) in folgender Weise nehmen

$$\varrho \sin(1-n)\varphi = -(2an)\varphi \frac{\sin n\varphi}{n\varphi},$$

so wird sie beim Grenzwerte zu

$$\varrho \sin \varphi = l\varphi,$$

welche (s. im II. Bd.) eine Quadratrix des Dinostratus darstellt; diese Kurve ist demnach eine Grenzform der Sektrices, mit denen wir uns hier beschäftigen.

Analog zu den durch die Gleichung (7) dargestellten Kurven sind diejenigen, von denen eine jede der Ort der Spitze P eines Dreiecks

---

1) Arch. Math. Phys. LVI, 1874. Daselbst sind die kartesischen Gleichungen der 3-Teilungs- und 5-Teilungskurve gegeben; in der zweiten dieser Gleichungen findet sich ein Versehen, das. von A. Radike verbessert worden (*Zur Teilung des Winkels*, das. LXIII, 1879); indem W. irrtümlich glaubte, daß die 3-Teilungskurve ein Folium Cartesii sei, so sah er sich veranlaßt, die n-Teilungskurven, die wir sogleich betrachten werden, Verallgemeinertes Cartesisches Blatt zu nennen; es ist klar, daß dieser Vorschlag zurückgewiesen wurde.

2) S. das Werkchen *The division of angles* (New-York, 1881).

3) S. den Artikel *Division de un angulo* in Nr. 12 der *Gaceta cientifica de Lima*, 1885.

4) *Division d'un angle en parties égales* (Mathésis, VI, 1886).

PAA' ist, dessen Grundlinie fest ist und dessen Winkel $PA'A$ das n-fache des Winkels PAA' ist[1]). Setzen wir wie vorhin $AA' = 2a$, $PA = \varrho$, $\sphericalangle PAA' = \varphi$, so erhält man als Polargleichung der Kurve

$$\varrho = \frac{2a \sin\varphi}{\sin(n+1)\varphi}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

es sei hervorgehoben, daß die Gleichung (8) aus (7) durch einfachen Wechsel des Vorzeichens der Konstanten n sich herleitet. Die durch (8) dargestellte Kurve ist von der Ordnung n, hat den Punkt A als $(n-1)$fachen, geht nicht durch A' und schneidet AA' im Punkte C, so daß $AC = \frac{2na}{n+1}$; die Kurventangenten im Punkte A bilden mit der Geraden AA' die Winkel $\frac{\pi}{n}, \ldots\ldots, \frac{(n-1)\pi}{n}$, die entsprechenden Asymptoten laufen im Punkte $\left(\frac{2a}{n+1}, 0\right)$ zusammen; usw.

Die zwischen den Kurven (7) und (8) bestehende Analogie veranlaßte W. Heymann, sie mit demselben Namen zu bezeichnen, nämlich mit Araneïden[2]), indem er für die erstere das Beiwort verschlungene und für die andere gestreckte hinzufügte; wir wollen der Kürze halber die Kurve (7) mit C_n und die (8) mit Γ_n bezeichnen und noch zwei Ableitungsgesetze, die zwischen ihnen bestehen, darlegen.

Es seien P und P' zwei entsprechende, d. h. mit A auf derselben Geraden liegende Punkte von C_n und Γ_n (Taf. XIII, Fig. 103). Wir ziehen $A'D$ senkrecht zu AA'; da nun $\sphericalangle PA'A = P'A'B = n\varphi$, so wird $\sphericalangle P'A'D = PA'D$; $A'D$ ist Halbierungslinie des Winkels $PA'P'$; wenn wir also einen der Punkte P', P kennen, so ist auch der andere bestimmt, und liegt eine der Kurven C_n, Γ_n gezeichnet vor, so läßt sich auch die andere punktweise mit Leichtigkeit bestimmen.

Sei P (Taf. XIII, Fig. 104) ein beliebiger Punkt von C_n, P' der Punkt von Γ_{n-2}, der auf der Geraden AP liegt, so hat man, wenn

$$\sphericalangle PAA' = \varphi, \quad \sphericalangle PA'B = n\varphi, \quad \sphericalangle P'A'A = (n-2)\varphi,$$

und daher

$$\sphericalangle P'PA' = (n-1)\varphi, \quad \sphericalangle AP'A' = (n-1)\varphi.$$

Dies zeigt, daß das Dreieck $PP'A'$ ein gleichschenkliges ist, daß — mit anderen Worten — P und P' auf einem Kreise mit dem Zentrum A' liegen; ist daher die Kurve Γ_{n-2} gezeichnet, so kann man auch die Kurve C_n punktweise konstruieren.

Wenn wir diese beiden Ableitungsgesetze wechselweise mit einander kombinieren, so gelangen wir zu folgenden beiden Reihen

---

1) Mariantoni et Palatini, *Sur le problème de la polysection de l'angle* (Nouv. Ann. Mathém., 3e Sér., XIX, 1899).

2) Vgl. die Abhandlung *Über Winkelteilung mittelst Araneïden* (Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 1899).

von Kurven, deren jede aus der vorhergehenden abgeleitet werden kann:

$\Gamma_0 C_2 \Gamma_2 C_4 \Gamma_4 \ldots\ldots C_{2n} \Gamma_{2n} \ldots; \quad \Gamma_1 C_3 \Gamma_3 C_5 \Gamma_5 \ldots\ldots \Gamma_{2n-1} C_{2n-1} \ldots\ldots$

Nun wird für $n = 0$ bekanntlich die Gleichung (8) zu $\varrho = 0$, also ist Γ_0 ein Punkt, während sie für $n = 1$ zu $\varrho \cdot \cos\varphi = a$ wird, welche die Gerade b darstellt, den Ort der von A und A' gleichweit entfernten Punkte; wenn wir also vom Punkte A oder der Geraden b ausgehen, so gelangen wir durch Anwendung jener beiden einfachen Ableitungsverfahren zur Konstruktion aller Araneïden.

Von Heymann wurde noch eine andere bemerkenswerte Eigenschaft der Araneïden für spezielle Fälle bewiesen und für den allgemeinen Fall ausgesprochen. Um diese darzutun, nehmen wir die durch Gleichung (7) dargestellte C_n mit einem beliebigen durch die Punkte A und A' gehenden Kreise geschnitten. Da die Gleichung des letzteren die Gestalt hat

$$\varrho = 2a \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha},$$

so sind die Anomalien φ der Punkte, in denen er von der C_n geschnitten wird, die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha} = \frac{\sin n\varphi}{\sin(n-1)\varphi}.$$

Nun kann man diese auch folgendermaßen schreiben:

$$\sin\varphi \cdot \cos\left(\overline{n-1} \cdot \varphi + \alpha\right) = 0,$$

ihre Wurzeln sind, wenn k eine ganze Zahl, $\varphi = k\pi$, die aber nur die Punkte A und A' liefern, und

$$\varphi = \frac{(2k+1)\pi - 2\alpha}{2(n-1)};$$

um Wurzeln zu erhalten, die zueinander inkongruent ($\mathrm{mod}\ \pi$) sind, muß man dem k die Werte geben $2, 4, \ldots\ldots, 2(n-1)$; man wird dementsprechend $n-1$ äquidifferente Werte erhalten; jene Schnittpunkte bilden daher ein regelmäßiges Vieleck mit der Seitenzahl $(n-1)$; da nun α beliebig ist, so schließen wir: **In eine Kurve C_n können ∞^1 regelmäßige $(n-1)$-Ecke einbeschrieben werden**; jedes derselben ist zugleich einem Kreise einbeschrieben, der durch die Punkte A und A' geht. — In ähnlicher Weise zeigt man: **In eine Kurve Γ_n können ∞^1 regelmäßige $(n+1)$-Ecke einbeschrieben werden.**

Heymann hat auch eine organische Erzeugung der Araneïden durch eine kontinuierliche Bewegung angegeben, die ihre tatsächliche Anwendung für die Teilung eines Winkels in gleiche Teile ermöglicht (vgl. S. 388).

148. Zu einer besonderen, sehr bemerkenswerten Kategorie der isozyklotomischen Kurven ist man durch ein Verfahren gelangt[1]), das verschieden und unabhängig von dem in Nr. 146 angewendeten ist, und dessen wir hier Erwähnung tun müssen. Seien (Taf. XIII, Fig. 105) in einer Ebene Π zwei feste Punkte A, B gegeben, d sei ihre Entfernung und M die Mitte derselben. Wir bezeichnen nun mit K_m den Kreis mit dem Durchmesser AB und dem Zentrum M, mit K_a und K_b die beiden mit dem Radius d und den Zentren A und B bzw. Wir nehmen jetzt beliebig den Punkt P_1 in der Ebene Π, ziehen AP_1 und bezeichnen deren Schnitt mit K_m als P, darauf bestimmen wir auf der Geraden AP_1 den Punkt P_2 derart, daß die Strecke P_1P_2 den Punkt P zum Mittelpunkte hat. Auf diese Weise wird für die Punkte von Π eine involutorische Cremonasche Transformation hergestellt, die wir mit $\mathfrak{T}_a$ bezeichnen wollen; offenbar ist der Kreis K_m für dieselbe eine Kurve, deren Punkte sich selber entsprechen.

Nehmen wir A als Pol, AB als Polarachse und nennen die Koordinaten der entsprechenden Punkte P_1 und P_2, bzw. ϱ_1, ω_1, und ϱ_2, ω_2, so haben wir offenbar die Relationen

$$\omega_1 = \omega_2, \quad \varrho_1 + \varrho_2 = 2d \cdot \cos\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Gehen wir zu kartesischen Koordinaten über, so läßt sich die Transformation $\mathfrak{T}_a$ darstellen durch die Formeln

$$x_2 = x_1 \frac{2dx_1 - x_1^2 - y_1^2}{x_1^2 + y_1^2}, \quad y_2 = y_1 \frac{2dx_1 - x_1^2 - y_1^2}{x_1^2 + y_1^2}, \quad . \quad . \quad (10)$$

die beweisen, daß $\mathfrak{T}_a$ eine kubische Transformation ist; das entsprechende homaloidische Netz wird von ∞^2 Kurven dritter Ordnung gebildet, die A zum Doppelpunkte und B zum gemeinschaftlichen singulären Brennpunkte haben; sie ist daher eine spezielle kubische Transformation von de Jonquières, die zwei Paare zusammenfallender Fundamentalpunkte in den beiden Kreispunkten I und J hat, in den Richtungen BI und BJ. — Eine ähnliche Transformation erhält man, indem man den Punkt B an die Stelle von A setzt; wir wollen sie mit $\mathfrak{T}_b$ bezeichnen.

Führen wir jetzt die Transformation $\mathfrak{T}_a$ auf den Kreis K_a aus — den wir jetzt der größeren Klarheit halber mit Γ_1 bezeichnen wollen — so erhalten wir eine neue Kurve Γ_2; da nun Γ_1 die Gleichung $\varrho_1 = d$ hat, so zeigt die Gleichung (9), daß Γ_2 dargestellt wird durch

$$\varrho_2 = 2d \cos\omega_1 - d;$$

Γ_2 ist also eine spezielle Pascalsche Schnecke oder Kreiskonchoide (s. Nr. 69). Führt man nun auf Γ_2 die Transformation $\mathfrak{T}_b$ aus, so

1) H. Nägelsbach, *Die Kreiskonchoiden* (Progr. Erlangen, 1885).

erhält man eine Kurve Γ_3, die der Transformation $\mathfrak{T}_a$ unterworfen eine Kurve Γ_4 liefert; fahren wir so fort, so erhalten wir eine unbegrenzte Reihe von Kurven. Bezeichnen wir im allgemeinen eine beliebige derselben mit Γ_m und durch die symbolische Bezeichnung $\mathfrak{T}(\Gamma) \equiv \Delta$, daß die Kurve Δ aus Γ entsteht, indem man diese der Transformation $\mathfrak{T}$ unterwirft, so können wir allgemein schreiben

$$\mathfrak{T}_a(\Gamma_{2n-1}) \equiv \Gamma_{2n}, \quad \mathfrak{T}_b(\Gamma_{2n}) \equiv \Gamma_{2n+1}.$$

Die Kurven Γ_m heißen (aus leicht begreiflichen Gründen) Kreiskonchoiden höherer Ordnung; ihre Eigenschaften — insbesondere ihre analytische Darstellung — würde man durch Benutzung der Gleichungen erhalten können, welche zur Darstellung der Transformationen $\mathfrak{T}_a$ und $\mathfrak{T}_b$ dienen, aber es ist einfacher, sie durch folgende Betrachtungen an der Figur selbst aufzufinden.

Nennen wir die zweiten Schnittpunkte der Geraden AB mit den Kreisen K_a und K_b bezügl. Q und S, ferner α den Winkel P_1AR; ziehen wir nun die Gerade P_1B, so erweist sich das Dreieck AP_1R als gleichschenklig, und weil es auch das Dreieck BP_1P_2 ist, so schließt man

$$\sphericalangle AP_1B = \sphericalangle AP_2B = \frac{\alpha}{2}.$$

Daher sind die beiden Kreise K' und K'', von denen der erste durch die Punkte A_0, B_0, P_1 geht, der zweite durch A, B, P_2 zueinander symmetrisch in bezug auf die Gerade AB. Man zeichne nun den Punkt P_3, der in $\mathfrak{T}_b$ dem Punkte P_2 entspricht; das Dreieck BP_2P_3 erweist sich als gleichschenklig, daher ist

$$\sphericalangle AP_3B = \sphericalangle AP_2B = \frac{\alpha}{2},$$

infolgedessen liegt der Punkt P_3 auch auf dem Kreise K'. Ähnlich erkennt man, daß

$$\sphericalangle AP_4B = \sphericalangle AP_3B = \frac{\alpha}{2},$$

weshalb P_4 auf dem Kreise K'' liegt. Fährt man in dieser Weise fort, so erkennt man, daß die Punkte $P_1, P_3, P_5 \ldots P_{2n+1}, \ldots$ auf K' liegen, und $P_2, P_4 \ldots P_{2n} \ldots$ auf K''. Beachten wir auch, daß $\sphericalangle BAP_2 = \alpha$, und daß P_1BP_3 als Außenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks BP_1P_2 auch gleich α ist; ferner, daß der Winkel P_2BP_4 als Außenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks AP_2P_3 ebenfalls gleich α ist usw., so haben wir im allgemeinen

$$\sphericalangle AP_{2n}B = \sphericalangle AP_{2n+1}B = \frac{\alpha}{2}; \ \sphericalangle P_{2n-2}AP_{2n} = \sphericalangle P_{2n-1}BP_{2n+1} = \alpha.$$

Infolgedessen ist

$$\sphericalangle ABP_{2n+1} = \frac{2n+1}{2}\alpha, \qquad \sphericalangle BAP_{2n} = n\alpha,$$
$$\sphericalangle BAP_{2n+1} = \pi - (n+1)\alpha, \qquad \sphericalangle ABP_{2n} = \pi - \frac{2n+1}{2}\alpha,$$
$$\sphericalangle P_{2n+1}AR = (n+1)\alpha; \qquad \sphericalangle P_{2n}BS = \frac{2n+1}{2}\alpha.$$

Daraus folgt dann

$$\frac{\sphericalangle P_{2n+1}AR}{\sphericalangle P_{2n+1}BA} = \frac{2n+2}{2n+1} \qquad \Bigg| \qquad \frac{\sphericalangle P_{2n}BS}{\sphericalangle P_{2n}AB} = \frac{2n+1}{2n},$$

und diese Relationen berechtigen uns zu dem Schlusse, **daß die Kreiskonchoiden höherer Ordnung spezielle Sektrices der in Nr. 146 definierten Art sind.**

Die gewonnenen Beziehungen zwischen den Winkeln führen direkt zur Polargleichung der Kurven Γ_{2n} und Γ_{2n+1}. Beziehen wir nämlich die ersten auf ein Polarkoordinaten-System ϱ, φ, das A als Pol, AB als Polarachse hat, so haben wir:

$$AP_{2n} = \varrho, \quad \sphericalangle P_{2n}AB = \varphi$$

und da nun aus dem Dreieck $P_{2n}AB$ sich ergibt

$$\frac{AP_{2n}}{\sin ABP_{2n}} = \frac{AP}{\sin AP_{2n}B},$$

so folgert man, indem man die vorhergehenden Relationen beachtet, daß

$$\varrho = d\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2n}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

die Polargleichung der Kurve Γ_{2n} ist. Ähnlich erkennt man, daß

$$\varrho = d\,\frac{\sin\frac{2n+2}{2n+1}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2n+1}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

die Polargleichung von Γ_{2n+1} ist, wenn man B als Pol und BA als Polarachse nimmt. Offenbar sind die Gleichungen (11) und (12) Spezialfälle der Gleichung (6′).

Wenden wir die bewiesenen Sätze für alle Kreiskonchoiden höherer Art an, so erkennt man: **Jede Kurve Γ_{2n} ist rational und von der Ordnung $4n$; Punkte von der Vielfältigkeit $2n$ sind A und die imaginären Kreispunkte, während B ein vielfacher Punkt von der Ordnung $2n-1$ ist; jede Kurve Γ_{2n+1} ist rational und von der Ordnung $4n+2$, B und die Kreispunkte sind $(2n+1)$-fache Punkte derselben, während A nur ein $2n$-facher ist. Keine dieser Linien hat reelle Punkte im Unendlichen.**

Wir wollen noch eine letzte Bemerkung machen betreffend die Anwendung der Kurven Γ_{2n} und Γ_{2n+1} auf die Aufgabe der Teilung

eines Winkels. Aus den vorhin aufgestellten Winkelbeziehungen, ergeben sich leicht folgende weiteren:

$$\sphericalangle AP_{2n}B = \frac{1}{2n+1} \cdot \sphericalangle P_{2n}BS$$

$$\sphericalangle AP_{2n+1}B = \frac{1}{2n} \cdot \sphericalangle P_{2n}AR.$$

Wenn man also einen Winkel konstruiert mit dem Scheitel in B und mit dem einen Schenkel auf BS, der gleich einem gegebenen Winkel α ist, so wird der andere Schenkel die Kurve Γ_{2n} in $2n+1$ Punkten P_{2n} schneiden. Verbinden wir einen beliebigen derselben mit den Punkten A, B, so erhalten wir einen Winkel, welcher der $(2n+1)$te Teil von $\alpha + k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 2n)$ ist. Ähnlich, wenn wir ihn zeichnen mit dem Scheitel in A, mit dem einen Schenkel auf AR, gleich einem gegebenen Winkel α, so wird der andere Schenkel Γ_{2n+1} in $2n+2$ Punkten P_{2n+1} schneiden; verbinden wir einen beliebigen derselben mit den Punkten A, B, so erhalten wir einen Winkel, welcher der $(2n+2)$te Teil von $\alpha + k\pi$ ist $(k = 0, 1, 2 \ldots 2n+1)$. Liegt also die Kurve Γ_m gezeichnet vor, so wird die Teilung eines beliebigen Winkels in $m+1$ Teile ausführbar sein.

149. III. Analog zu den vorhergehenden Sektrices sind diejenigen Kurven, von denen jede der Ort der Spitzen P eines Dreiecks ist, dessen Grundlinie AB fest ist, und dessen Höhe PH den Winkel APB in zwei Teile teilt, die in dem Verhältnisse stehen wie $1:(n-1)$[1]. Setzen wir $\sphericalangle APH = \varphi$, so ist $\sphericalangle BPH = (n-1)\varphi$. Nehmen wir nun ein kartesisches Koordinatensystem, das A als Anfang und AB als x-Achse hat, so erhalten wir, wenn $AB = a$,

$$x = y \cdot \operatorname{tg} \varphi, \quad a - x = y \cdot \operatorname{tg}(n-1)\varphi,$$

und daher:

$$x = a \frac{\sin\varphi \cdot \cos(n-1)\varphi}{\sin n\varphi}, \quad y = a \frac{\cos\varphi \cdot \cos(n-1)\varphi}{\sin n\varphi}, \quad . \; . \quad (13)$$

welches die parametrische Darstellung der Kurve ist. Es ergibt sich daraus, daß sie rational ist, wenn n eine ganze Zahl ist; wenn ferner $n > 0$, so ist sie von der Ordnung n, mit A als $(n-1)$fachem Punkte. Setzen wir

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} - \omega,$$

so finden wir nun die Polargleichung der Kurve als

$$\varrho = a \frac{\cos(n-1)\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)}{\sin n\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

1) Hesse, *Über die Teilung des Winkels, speziell die Trisektion* (Montabaur, 1881).

die, je nachdem n gerade oder ungerade die eine oder andere von folgenden beiden Formen annimmt

$$\varrho = a\frac{\sin(n-1)\omega}{\sin n\omega} \cdot \quad (14\,\text{I}), \qquad \varrho = a\frac{\cos(n-1)\omega}{\cos n\omega} \cdot \quad (14\,\text{II})$$

Wir überlassen es dem Leser, aus dieser Gleichung die Eigenschaften der fraglichen Kurve abzuleiten. Wir beschränken uns auf die Bemerkung, daß im zweiten Falle die Kurve durch den Punkt B geht, während sie im ersteren Falle AB in einem Punkte C schneidet, derart, daß $AC = \frac{n-1}{n}a$. Schließlich: Denken wir uns die einem bestimmten Werte von n entsprechende Kurve gezeichnet, und beschreiben dann über AB einen Kreisbogen, der den gegebenen Winkel α faßt, so wird dieser die Kurve in gewissen Punkten P schneiden. Verbinden wir einen beliebigen derselben mit den Punkten A und B und ziehen PH senkrecht zu AB, so wird $\sphericalangle APH = \frac{\alpha}{n}$ sein; dies zeigt uns hinlänglich, daß die Kurve eine Winkel-n-Teilungskurve ist.

IV. Wenn man irgend einen der Kreisbögen, die zwei feste Punkte N_0 und N_n als Endpunkte haben, in n gleiche Teile teilen könnte, so wäre man offenbar auch imstande, einen beliebigen geradlinigen Winkel γ in n gleiche Teile zu teilen. Konstruieren wir nämlich das gleichschenklige Dreieck N_0CN_n mit dem Winkel γ an der Spitze, und beschreiben den Kreisbogen N_0N_n, dessen Mittelpunkt C ist, und teilen diesen in n gleiche Teile, so werden auch die entsprechenden Radien den Winkel γ in n gleiche Teile zu teilen. Um diese Teilung in n gleiche Teile ausführen zu können, genügt es, den Ort der Punkte N_r zu betrachten[1]), von denen jeder die r^{te} Ecke eines regulären Polygonzuges ist, der einem Kreisbogen einbeschrieben ist, dessen Endpunkte N_0 und N_n sind. Um die Gleichung des Ortes der Punkte N_r zu finden, nehmen wir den Mittelpunkt O von N_0N_n als Anfangspunkt, N_0N_n selbst als x-Achse eines kartesischen Koordinatensystems, und nennen C den Mittelpunkt eines der genannten Kreisbogen. Setzen wir $\sphericalangle N_0CN_n = 2\alpha$, so ist

$$\sphericalangle N_rN_0N_n = \frac{n-r}{n}\alpha, \quad \sphericalangle N_rN_nN_0 = \frac{r}{n}\alpha,$$

daher sind, wenn $N_0N_n = 2a$, die Gleichungen der beiden Geraden N_rN_0 und N_rN_n

$$\frac{y}{a+x} = \operatorname{tg}\frac{n-r}{n}\alpha, \quad \frac{y}{a-x} = \operatorname{tg}\frac{r}{n}\alpha.$$

---

1) C. Burali-Forti, *Sopra un sistema di curve che dividono in n parti eguali gli archi di circolo che passano per due punti fissi* (Giorn. Matem. XXVII, 1889). Diese Kurven waren früher von J. E. Wagner untersucht worden, in einer Arbeit, worüber man einen Bericht in den Nouv. Ann. Mathém. X, 1851, S. 297 liest.

Die Gleichung des betreffenden Ortes wird man nun erhalten, wenn man α aus diesen beiden eliminiert. Bequemer ist es jedoch diesen darzustellen, indem man x und y als Funktionen des Winkels $\beta = \frac{\alpha}{n}$ darstellt; man erhält so die beiden Gleichungen:

$$x = a \cdot \frac{\sin(2r - n)\beta}{\sin n\beta}, \quad y = 2a \cdot \frac{\sin r\beta \cdot \sin(n - r)\beta}{\sin n\beta} \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Leicht leitet man daraus ab, daß die so erhaltenen Kurven rational und von der Ordnung n sind. Man kennt bis jetzt keine mechanische Konstruktion derselben in kontinuierlichem Zuge, die sie für die Teilung eines Winkels tatsächlich anwendbar macht (vgl. die Bemerkung auf S. 388).

150. V. Erheblich komplizierter ist die Definition anderer Sektrix-Kurven[1]), zu deren Betrachtung wir gelangen durch folgenden Satz: In dem Kreise mit dem Mittelpunkt O und dem Durchmesser $A_oE = 2r$ sei der Winkel $A_{n-2}OA_o = (n-2) \cdot \sphericalangle A_1OA_o$ (s. Taf. XIII, Fig. 106, wo $n = 5$ angenommen ist) und man führe folgende Konstruktion aus: Man ziehe die Gerade A_1A_{n-2} und bezeichne deren Schnitt mit dem Durchmesser A_oE mit B_{n-2}; auf dem verlängerten Radius OA_1 trage man $OC_{n-2} = OB_{n-2}$ ab; man beschreibe den Kreis mit dem Mittelpunkte A_o und dem Radius A_oC_{n-2} und bestimme den zweiten Schnittpunkt D_n mit OA_1; man ziehe A_oD_n, welches neuerdings die Peripherie des gegebenen Kreises in A_{n+1} schneidet; man zeichne den Schnittpunkt P_n der Geraden A_oA_{n+1} mit dem Kreise um O und dem Radius OD_n; endlich ziehe man den Radius OP_nA_n. Dann ist der Winkel A_oOA_n das n-fache, und der Winkel A_oOA_{n+1} das $(n+1)$-fache des Winkels $A_oOA_1 = \varphi$.

Beweis: Es ist nämlich

$$\triangle A_1OB_{n-2} + \triangle A_1OA_{n-2} = \triangle A_{n-2}OB_{n-2}$$

oder

$$\frac{1}{2}r \cdot OB_{n-2} \sin\varphi + \frac{1}{2}r^2 \sin(n-3)\varphi = \frac{1}{2}r \cdot OB_{n-2} \sin(n-2)\varphi$$

daher

$$OB_{n-2} = \frac{r \sin(n-3)\varphi}{\sin(n-2)\varphi - \sin\varphi}.$$

Beschreibt man nun den Kreis um A_o mit dem Radius A_oO und bestimmt dessen zweiten Schnitt G mit OA_1, so ist

$$OG = 2r\cos\varphi, \quad OD_n = C_{n-2}G,$$

daher

$$OD_n = OG - OC_{n-2} = OG - OB_{n-2} = 2r\cos\varphi - \frac{r \sin(n-3)\varphi}{\sin(n-2) - \sin\varphi}.$$

---

1) A. van Grinten, *Die n- und (n + 1)-Teilung des Winkels und des Kreises* (Arch. Math. Phys. LXX, 1874).

Setzt man aber $OD_n = \varrho_n$, so findet man durch leichte Rechnung

$$\varrho_n = r\frac{\cos\frac{n+1}{2}\varphi}{\cos\frac{n-1}{2}\varphi} \quad (16), \qquad \text{oder} \qquad \varrho_n = r\frac{\sin n\varphi - \sin\varphi}{\sin(n-1)\varphi} \quad (16')$$

Bezeichnen wir nun mit ψ den Winkel $P_n O D_n$, so ergibt, da nach der Konstruktion $OP_n = OD_n$, die Relation

$$\triangle A_0 O D_n + \triangle D_n O P_n = \triangle A_0 O P_n,$$

oder $$\frac{1}{2} r\varrho_n \sin\varphi + \frac{1}{2}\varrho_n \sin\psi = \frac{1}{2} r\varrho_n \sin(\varphi + \psi),$$

und infolgedessen $$\varrho_n = \frac{\sin(\varphi+\psi) - \sin\varphi}{\sin\psi}.$$

Vergleicht man diese Beziehungsgleichung mit (16), so sieht man, daß $\psi = (n-1)\varphi$; daher ist

$$\sphericalangle A_1 O A_n = (n-1)\cdot\sphericalangle A_0 O A_1;$$
$$\sphericalangle A_0 O A_n = n\cdot\sphericalangle A_0 O A_1;$$
$$\sphericalangle A_0 O A_{n+1} = (n+1)\cdot\sphericalangle A_0 O A_1,$$

wie eben der ausgesprochene Satz besagte.

Variiert man φ, so stellt die Gleichung (16) oder (16′) in Polarkoordinaten den Ort Δ der Punkte D_n dar, wobei O Pol, OA Polarachse ist. — Setzen wir nun $OP_n = \varrho$, $n\varphi = \omega$, so werden, weil $OP_n = OD_n = \varrho$, die angeführten Gleichungen zu

$$\varrho = r\frac{\cos\frac{n+1}{2n}\omega}{\cos\frac{n-1}{2n}\omega} \quad (17) \qquad \varrho = r\frac{\sin\omega - \sin\frac{\omega}{n}}{\sin\frac{n-1}{2n}\omega} \quad (17')$$

und stellen dann in ähnlicher Weise den Ort Π der Punkte P_n dar.

Ist nun die Kurve Π konstruiert, so läßt sich die n-Teilung eines beliebigen Winkels mit Leichtigkeit ausführen. Legt man nämlich denselben mit dem Scheitel in O und mit dem einen Schenkel längs OA_0, so schneidet der andere Schenkel OA_n die Kurve Π im Punkte P_n. Man ziehe die Gerade $A_0 P_n$ und bestimme deren zweiten Schnitt D_n mit dem Kreise, dessen Mittelpunkt O und dessen Radius OP_n ist; wird nun die Gerade $OD_n A_1$ gezogen, so ist der Winkel $A_1 O A_0$ der n^{te} Teil des gegebenen. — Dieselbe Kurve dient jedoch auch zur Teilung eines Winkels in $n+1$ gleiche Teile. Legt man ihn nämlich mit dem Scheitel in O und mit dem einen Schenkel auf die Grade $A_0 O$, bezeichnet den Schnittpunkt des anderen Schenkels mit dem gegebenen Kreise mit A_{n+1}, zieht die Gerade $A_0 A_{n+1}$, und ist dann P der Schnitt dieser Geraden mit der Kurve Π, so ist der Winkel $P_n O A_{n+1}$ der $(n+1)^{\text{te}}$ Teil des gegebenen.

Der Kürze wegen wollen wir uns nicht mit der Diskussion der Kurven Δ und Π aufhalten, und nur bemerken, daß für $n = 2$ die Gl. (16′) wird zu $\varrho_2 = r(2\cos\varphi - 1)$, die eine besondere Pascalsche Schnecke (S. 147) darstellt, weshalb man auch die Kurven Δ als Verallgemeinerungen dieser bemerkenswerten Kurve auffassen darf.

VI. Einer ganz ähnlichen Darstellung, wie der durch die Gleichungen (6′), (7), (8), (10), (12), (13) gegebenen, sind auch andere Teilungskurven fähig, die von E. Oekinghaus betrachtet wurden[1]); es sind dies die durch die folgenden Polargleichungen dargestellten:

$$\varrho = a\frac{\sin\frac{n-2}{2}\varphi}{\sin\frac{n}{2}\varphi}, \qquad \varrho = a\frac{\cos\frac{n-2}{2}\varphi}{\cos\frac{n}{2}\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Derselbe Autor hat auch zuerst die Teilungskurven betrachtet, die eine Polargleichung von folgendem Typus haben:

$$\varrho^n - \binom{n}{2}a^2\varrho^{n-2} + \binom{n}{3}a^3\varrho^{n-3}\frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi} - \binom{n}{4}a^4\varrho^{n-4}\frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi} + \cdots = 0 \quad . \quad (19)$$

die sich augenscheinlich der besonderen Eigenschaft erfreuen, daß die Summe der Vektoren der auf einer beliebigen, durch den Pol gehenden Geraden gelegenen Kurvenpunkte, gleich Null ist.

151. VII. Zu einer weiteren und wichtigeren Klasse von Sektrix-Kurven gelangt man durch folgende Betrachtungen[2]): Da jede ganze Zahl entweder prim ist oder das Produkt von Primzahlen, so würde man irgend einen Winkel in eine beliebige Anzahl gleicher Teile teilen können, wenn man die Teilung in eine Primzahl gleicher Teile teilen könnte. Ist nun p eine Primzahl, so ist nach einem bekannten Satze von Fermat $2^{p-1} - 1$ durch p teilbar, demnach auch das Produkt $\left(2^{\frac{p-1}{2}} + 1\right)\left(2^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)$, es ist also wenigstens einer dieser beiden Faktoren ein Vielfaches von p. Wenn man nun die Teilung des Winkels in $\left(2^{\frac{p-1}{2}} \pm 1\right)$ Teile ausführen könnte, so würde man sie ganz allgemein ausführen können. Diese Teilung in $(2^n \pm 1)$ Teile läßt sich nun mit Hilfe der beiden Kurven, die wir jetzt definieren wollen, bewerkstelligen.

a) Man beschreibe um den Mittelpunkt M mit dem Radius a einen Kreis, der die x-Achse im Anfangspunkte O berührt (Taf. XIII, Fig. 107). Man ziehe nun eine beliebige Sehne OA in diesem Kreise und trage auf der Verlängerung derselben der Reihe nach ab

1) *Die Sektionskurven* (Arch. Math. Phys., 2. Serie, I, 1884).

2) A. Kempe, *De verdeeling van een hoek in* $2^n + 1$ *gelyke deelen*, sowie *De verdeeling van een hoek in een villkeurig antal gelyke deelen* (Nieuw Archiv voor Wiskunde. 2. Ser., I, 1894). Außerdem s. die Abh. *Sur les courbes sectrices* (Mém. Soc. Liège, 2e Sér., XX, 1898).

$$AB = AM, \quad BC = BM, \ldots;$$

variiert man jene Sehne, so beschreiben die Punkte $B, C, D \ldots$ ebensoviele Kurven $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \ldots$, deren n^{te} die Polargleichung hat

$$\varrho = a + 2a\sin\varphi + 2a\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right) + 2a\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\varphi}{4}\right) + \cdots$$
$$\cdots + 2a\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\varphi}{4}\right)\cdots\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}-\frac{\varphi}{2^n}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

und $2^n - 1$ Schleifen besitzt.

Um uns von der Anwendbarkeit dieser Kurve ((2^n+1)-*Teiler* genannt) für die Aufgabe der Winkelteilung zu überzeugen, verlängern wir die Geraden $AM, BM, CM \ldots$ nach $A', B', C' \ldots$, nennen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ die Winkel, welche die Geraden $MA, MB, MC \ldots$ mit OA bilden, und $\alpha', \beta', \gamma' \ldots$ die Winkel, welche die Verlängerungen $MA', MB', MC' \ldots$ mit OM machen. Die Betrachtung der Figur zeigt dann, daß

$$\alpha' = 2\alpha, \quad \beta' = 3\beta, \quad \gamma' = 5\gamma \ldots$$

aus diesen Beziehungen ergibt sich, daß, wenn man durch M eine beliebige Gerade zieht, die mit OM den beliebigen Winkel ω bildet, diese den gegebenen Kreis und jene Hilfskurven in den Punkten A_0, $B_0, C_0 \ldots$ schneiden wird, so daß die von ihr mit den Geraden OA_0, $OB_0, OC_0 \ldots$ gebildeten Winkel bzw. gleich $\frac{\omega}{2}, \frac{\omega}{3}, \frac{\omega}{5} \cdots$ sind. Somit können diese Kurven zur Teilung eines beliebigen Winkels in $2^n + 1$ gleiche Teile dienen[1]).

b) Um den Anfangspunkt als Zentrum und mit dem Radius a beschreibe man einen Kreis, der die x-Achse in N schneidet (Taf. XIII, Fig. 107). Dann ziehe man einen beliebigen Radius OD und trage auf seiner Verlängerung der Reihe nach

$$DE = DN, \quad EF = EN \ldots$$

ab. Die Punkte $D, E, F \ldots$ beschreiben dann ebensoviele Kurven, deren Polargleichung für O als Pol, ON als Achse man leicht — vgl. **a)** — findet[2]). Ebenso zeigt uns die Figur alsbald, daß

$$\sphericalangle\, ODN = OND, \quad \sphericalangle\, OEN = \frac{1}{3}\, ONE,$$
$$\sphericalangle\, OFN = \frac{1}{7}\, ONF \ldots$$

---

1) Für den Fall $n = 1$ wurden diese Kurven auch von G. La Manna Coppola (*Le sviluppo di un arco del cerchio e la trisezione dell' angolo*, Palermo 1902) betrachtet.

2) Sie sind:

$$\varrho = a + 2a\sin\frac{\omega}{2}, \quad \varrho = a + 2a\sin\frac{\omega}{2}\sin\frac{\omega+\pi}{4},$$

$$\varrho = a + 2a\sin\frac{\omega}{2} + 2a\sin\frac{\omega}{2}\sin\frac{\omega+\pi}{4} + 2a\sin\frac{\omega}{2}\sin\frac{\omega+\pi}{4}\sin\frac{\omega+3\pi}{8} \text{ usw.}$$

Wenn also eine beliebige durch N gezogene Gerade, die mit NO den Winkel ω bildet, die betreffenden Kurven in $E_0, F_0 \ldots$ schneidet, so wird sie mit den Geraden NE_0, $NF_0 \ldots$ bzw. die Winkel $\frac{\omega}{3}$, $\frac{\omega}{7}$, $\frac{\omega}{15} \cdots$ bilden; jene können daher zur Teilung eines beliebigen Winkels in $2^n - 1$ gleiche Teile dienen und werden daher $(2^n - 1)$-*Teiler* genannt; deren n^{te} $2^n - 2$ besitzt Schleifen.

Die genannten Kurven lassen sich auch mechanisch mit Hilfe gewisser Apparate zeichnen, von denen als der einfachste folgender beschrieben werden soll: Auf einem Lineal OG, das um den festen Punkt O drehbar ist, bewegen sich zwei Schlitten H und I (vgl. Fig. 108). Ein zweiter fester Punkt M, so gelegen, daß MO senkrecht zu OG ist, ist der Anheftepunkt eines fortlaufenden nichtelastischen Fadens $MHOKI$. In H, O und K befinden sich Röllchen, um die Reibung zu vermeiden. Unter H befindet sich eine Spitze, die der erzeugenden Kurve folgt, unterhalb I ein Bleistift, der die Sektrixkurve zeichnen soll. Zu Beginn der Bewegung ist notwendig und hinreichend, daß der Faden so gespannt ist, daß $MH + HO = OI$. Dies läßt sich exakt bewirken, indem man das Röllchen K, das durch eine Klemmschraube gehalten wird, verschiebt und es in geeigneter Lage festklemmt. Es ist klar wegen der Undehnbarkeit des Fadens, daß, wenn man den Fahrstift H verschiebt, sich auch der Schreibstift I verschiebt, jedoch so, daß immer $MH' = H'I'$ bleibt, wenn H', I' die neuen Lagen von H und I sind, und der Faden immer gespannt bleibt. Läßt man nun den Stift H zuerst den um M mit MO beschriebenen Kreis durchlaufen, indem man das Lineal zugleich um O dreht, so beschreibt I die Kurve Γ_1 (Nr. **151 a**), läßt man ihn darauf Γ_1 durchlaufen, so erzeugt I die Γ_2 usw.[1])

152. VIII. Die Teilung eines Winkels in $2^n + 1$ gleiche Teile läßt sich vermittels eines sehr einfachen Instruments ausführen — des Multisektors[2]) —, der die Form eines rechtwinkligen Sonnenzeigers hat (Taf. XIII, Fig. 109). Die einzige Bedingung ist, daß $TC = CP$ genommen wird und $RC \perp TP$; die gemeinsame Länge m dieser beiden Strecken nennt man den Modulus des Instrumentes. In P denke man sich einen Schreibstift befestigt. Denken wir uns nun eine beliebige feste Kurve Δ (die Direktrix) gegeben, sowie einen festen Punkt O und stellen uns vor, daß der Multisektor sich bewege derart, daß seine Kante RC fortwährend durch O geht, und der Punkt T die Direktrix beschreibe, so erzeugt der Punkt P eine neue Kurve

1) Mitgeteilt in einem Briefe an den Verfasser vom 19. Oktober 1908 von A. Kempe. — Eine andere Methode findet sich in einer Note desselben Geometers *Über die stetige Erzeugung gewisser Schleifenkurven, die einen beliebigen Winkel in drei gleiche Teile teilen* (Zeitschr. Math. Phys. XLIX, 1903).

2) T. W. Nicholson, *The multisection of angles* (The Analyst., X, 1883).

Π, die wir Polyode nennen (von: πολύς, viel, und ἡ ὁδός, der Weg). Zwischen den beiden Kurven Δ und Π besteht eine geometrische Beziehung, die in Formeln gekleidet, gestattet, die Gleichung der zweiten zu finden, wenn man die der ersten kennt. Bequemer ist es, alle betrachteten Figuren auf ein Polarkoordinatensystem mit dem festen Punkte O als Pol zu beziehen. Wenn

$$f(\varrho_1, \omega_1) = 0$$

die Gleichung der Direktrix Δ ist, und ϱ, ω die Koordinaten des beweglichen Punktes P sind, so ist, da P und T gleichen Abstand von O haben,

$$\varrho = \varrho_1 .$$

Ferner ist der Winkel POT gleich der Differenz zwischen den Winkeln ω und ω_1, daher ist, weil in dem rechtwinkligen Dreiecke OCT die Seite $CT = m$, $OT = \varrho$, $\sphericalangle COT = \frac{\omega - \omega_1}{2}$,

$$m = \varrho \cdot \sin \frac{\omega - \omega_1}{2} .$$

Die Gleichung der Kurve Π ist nun nichts weiter als das Resultat der Elimination von ϱ_1 und ω_1 aus den drei vorhergehenden Gleichungen, also

$$f\left(\varrho, \omega - 2 \arcsin \frac{m}{\varrho}\right) = 0 .$$

Nehmen wir z. B. als Direktrix die Polarachse, für welche immer $\omega_1 = 0$, so ist die Gleichung der Polyode

$$m = \varrho \cdot \sin \frac{\omega}{2} ;$$

die Polyode ist daher eine Trisekante (s. S. 231), für die sich infolgedessen eine neue Erzeugungsweise ergibt. Nehmen wir, was allgemeiner, für Δ eine Parallele zur Polarachse, so haben wir für diese

$$\varrho_1 \sin \omega_1 = k ,$$

wo k der Abstand des Poles von der Geraden ist; man gelangt jetzt zu einer Kurve Π von der vierten Ordnung, die in kartesischen Koordinaten durch die Gleichung

$$y^2 (x^2 + y^2 - k^2) = (x^2 + y^2 - kx - 2 m^2)^2$$

dargestellt wird, und die man als eine Verallgemeinerung der Trisekanten ansehen kann. Die Fig. 110 auf Taf. XIII zeigt uns die Gestalt der Kurve für den Fall $k < m$ und $k > m$, letztere punktiert, während Fig. 111 uns die Polyode eines Kreises darstellt für den Fall, daß der Pol auf der Peripherie liegt.

Zeigen wir nunmehr die Anwendung der Polyoden auf das Problem der Teilung eines beliebigen Winkels AOB.

a) Man ziehe die Gerade b parallel zu OB, in einem Abstande von dieser gleich dem Modulus m (Taf. XIII, Fig. 112); man nehme als festen Punkt den Scheitel O, OA als Direktrix und zeichne die entsprechende Kurve Π; ist P einer der Schnitte von Π mit b, so hat man

$$\sphericalangle POB = \frac{1}{3} \sphericalangle AOB.$$

Trägt man auf OA nun $OT = OP$ ab, fällt das Lot OC auf PT und ist PH senkrecht OB, so sind die drei Dreiecke OCT, OCP, OHP kongruent, daher ist insbesondere $\sphericalangle TOC = COP = POH$, woraus die angegebene Behauptung sich ergibt.

b) Um die 5-Teilung desselben Winkels AOB auszuführen (Taf. XIV, Fig. 113), ziehe man zuerst die Gerade b und die der Geraden OA entsprechende Polyode Π; dann nimmt man von neuem O als festen Punkt und die Gerade b als neue Direktrix, beschreibt eine neue Polyode Π' und bestimmt deren Schnitt P mit Π. Dann zeichne man den Kreis mit dem Zentrum O und dem Radius OP und bezeichne mit T und T' dessen Schnitte mit OA und b; nachdem man die Geraden PT und PT' gezogen hat, fälle man auf diese die Lote OC und OC' und ziehe schließlich $T'H$ senkrecht zu OB. Die fünf rechtwinkligen Dreiecke OCT, OCP, $OC'P$, $OC'T'$, OHT' ergeben sich als kongruent nach der Konstruktion, und also ist

$$\sphericalangle T'OH = \frac{1}{5} \sphericalangle AOB.$$

c) In ähnlicher Weise verfährt man, um die 7-Teilung desselben Winkels AOB auszuführen (Taf. XIV, Fig. 114). Man zeichnet auch die Gerade b und die beiden Polyoden Π und Π', die bei der 5-Teilung gedient haben, dann nimmt man neuerdings O als Pol und Π' als Direktrix und konstruiert die zugehörige Polyode Π''. Sei P der gemeinsame Punkt von Π und Π''; ihm entspricht, als Punkt von Π betrachtet, der Punkt T von OA, während, wenn er als Punkt von Π'' betrachtet wird, T'' der entsprechende von Π' sein möge; schließlich entspricht T'' dem T' auf b. Man ziehe nun die Geraden PT, PT'', T'', T', fälle auf diese die Lote OC, OC'', OC', und ziehe auch noch $T'H$ senkrecht zu OB. Infolgedessen entstehen sieben kongruente rechtwinklige Dreiecke, die beweisen, daß

$$\sphericalangle T'OH = \frac{1}{7} \sphericalangle AOB.$$

Die soeben für die Teilung in 3, 5, 7 Teile angewandte Methode läßt sich ohne weiteres auf die 9, 11 . . . Teilung erweitern; somit kann also der Multisektor — wie behauptet — zur Teilung eines beliebigen Winkels in $2n + 1$ gleiche Teile dienen[1]).

---

1) S. H. Johnson hat die Bemerkung gemacht (s. die Note *The multi-*

IX. Die Trisekante von Delanges gehört auch zu der jüngsten Klasse von Trisektricen, welche wir kennen[1]); ihre Entstehungsweise ist folgende:

Um den Nullpunkt O der Achse OX (wir bitten den Leser, die leichte Figur selbst zu entwerfen) beschreibe man mit einem beliebigen Radius r den Kreis, der die x-Achse in A schneide. Von A aus trage man die fest gegebene Strecke $2a$ wiederholt als Sehne in den Kreis, als $AA_2 = A_2A_4 = A_4A_6 = \cdots = 2a$. Die Mittelpunkte der Bogen AA_2, A_2A_4, A_4A_6, ... seien der Reihe nach A_1, A_3, A_5, ..., die der zugehörigen Sehnen B_1, B_3, B_5, ... Diese Konstruktion führe man an jedem einzelnen Kreise der Schar konzentrischer Kreise um O als Mittelpunkt aus, indem man mit $r = a$ beginnt. Dann ist, auf Polarkoordinaten ϱ, ω bezogen, die Gleichung des Ortes A_n der Punkte A_n, weil $\sphericalangle A_n O A = \omega$, also $\sphericalangle A_n O A_{n-1} = \frac{\omega}{n}$ ist:

$$\varrho \sin \frac{\omega}{n} = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Ferner ist die Gleichung des Ortes B_n von B

$$\varrho \operatorname{tg} \frac{\omega}{n} = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Auf diese Weise entstehen also die beiden Scharen von Kurven A_n und B_n die leicht zu zeichnen und (wie man unschwer sehen kann) zur Winkelteilung dienen können.

Von den Eigenschaften der Kurven A_n mögen die folgenden erwähnt werden:

Sie besitzen alle eine Asymptote im Abstande $y = an$ von OX. Aus $y = \varrho \sin \omega = a \frac{\sin \omega}{\sin \frac{\omega}{n}}$ folgt nämlich für $\omega = 0$ (und folglich $\varrho = \infty$) der Grenzwert $y = an$. Ist n gerade, so ist $y = -an$ eine zweite Asymptote.

Der Sektor der Kurve, begrenzt von einem beliebigen Radius OP der Kurve ($\sphericalangle POX = \omega$) und dem Radius OY, senkrecht zu OX, hat den Flächeninhalt

$$I = \frac{1}{2} n a^2 \left[\cot \frac{\omega}{n} - \cot \frac{\pi}{2n}\right] \cdot$$

---

section of angles, The Analyst., X, 1883), daß die dargelegte Vielteilung sich schon in einer Abhandlung vom Jahre 1880 von J. B. Miller findet (*The Chordel and its application to the general section of an angle,* Van Vorstrands Engineering Magazine, XXII); dieser benutzt gewisse Kurven — von ihm Chordalen genannt —, die allgemeiner als die Polyoden sind.

1) E. Lampe, *Über eine Gattung von Kurven, die zur Teilung eines Winkels in n gleiche Teile dienen können* (Sitzungsber. der Berliner math. Ges. 1909).

Der Radius OP schneide die Asymptote in P_1, ebenso schneide die Asymptote in Y_1, so ist der Flächeninhalt I von PP_1Y_1Y:

$$I = \frac{1}{2} n a^2 \left[n \operatorname{cotg} \omega - \operatorname{cotg} \frac{\omega}{n} + \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2n} \right] \cdot$$

Für $\omega = 0$ ist $\lim \left[n \cot \omega - \cot \frac{\omega}{n} \right] = 0$; daher ist der Inhalt I_a der Fläche begrenzt von der Kurve, ihrer Asymptote und der y-Achse

$$I_a = \frac{1}{2} n a^2 \operatorname{cotg} \frac{\pi}{2n} \cdot$$

Die Ordnung der Kurven A_n ist n, wenn n eine ungerade Zahl, dagegen $2n$, wenn n eine gerade Zahl ist.

a) Für ein ungerades n hat man nämlich:

$$\sin(n\alpha) =$$
$$n\left[\sin\alpha - \frac{n^2-1^2}{3!}\sin^3\alpha + \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}\sin^5\alpha - \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2^{n-1}\sin^n\alpha\right] \cdot$$

Setzt man nun $\alpha = \frac{\omega}{n}$, $\sin\alpha = \sin\frac{\omega}{n} = \frac{\alpha}{\varrho}$, $\sin\omega = \frac{y}{\varrho}$, so folgt nach Multiplikation mit ϱ^n

$$y\varrho^{n-1} = n\left[\alpha\varrho^{n-1} - \frac{n^2-1}{3!}\alpha^3\varrho^{n-3} + \frac{(n^2-1)(n^2-3^2)}{5!}\alpha^5\varrho^{n-5} - \cdots\right] \cdot$$

Die Exponenten von ϱ sind alle geradzahlig; ersetzt man daher ϱ^2 durch $x^2 + y^2$, so erhält man eine Gleichung n^{ten} Grades zwischen x und y. Für den einfachsten Fall $n = 3$ wird die Gleichung

$$(x^2 + y^2)(3a - y) = 4a^3$$

welche eine Trisektrix von Maclaurin darstellt (S. 85) welche in $(0, 2a)$ ihren Knotenpunkt hat. Da die obige allgemeine Gleichung x nur in geraden Potenzen enthält, so ist die y-Achse eine Symmetrieachse der Kurve A_n bei ungeraden n; die x-Achse aber nicht; ihre Asymptote ist eine Wendeasymptote.

b) Für ein gerades n gilt die Gleichung:

$$\cos n\alpha = 1 - \frac{n^2}{2!}\sin^2\alpha + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}\sin^n\alpha - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}\sin^6\alpha + \cdots$$
$$+ (-1)^{\frac{n}{2}} 2^{n-1}\sin^n\alpha \cdot$$

Setzt man wieder $\alpha = \frac{\omega}{n}$, also $n\alpha = \omega$, $\sin\frac{\omega}{n} = \frac{\alpha}{\varrho}$, $\cos\omega = \frac{x}{\varrho}$, so folgt nach Multiplikation mit ϱ^n:

$$x\varrho^{n-1} = \varrho^n - \frac{n^2}{2!}a^2\varrho^{n-2} + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}a^4\varrho^{n-4} - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}a^6\varrho^{n-6} + \cdots$$

Nun ist aber $n - 1$ eine ungerade Zahl; daher muß die Gleichung, um in $x^2 + y^2 = \varrho^2$ rational zu werden, ins Quadrat erhoben werden, und dadurch steigt ihr Grad auf $2n$. Die so erhaltene Gleichung

enthält nur gerade Potenzen von x und y; daher sind die Koordinatachsen Symmetrieachsen der Kurven. Für den einfachsten Fall $n = 2$ wird die Gleichung

$$(4a^2 - y^2)(x^2 + y^2) = 4a^4,$$

welche eine Trisekante von Delanges darstellt (m. s. S. 231).

Die Ordnung der Kurven B_n ist $2n + 2$. Ihre Gleichung folgt aus der Formel

$$\operatorname{tg}(n\alpha) = \frac{\binom{n}{1}\operatorname{tg}\alpha - \binom{n}{3}\operatorname{tg}^3\alpha + \binom{n}{5}\operatorname{tg}^5\alpha - \cdots}{1 - \binom{n}{2}\operatorname{tg}^2\alpha + \binom{n}{4}\operatorname{tg}^4\alpha - \cdots}$$

indem man $\alpha = \frac{\omega}{n}$ setzt. Nun ist die Gleichung der Kurve B_n $\varrho \operatorname{tg}\frac{\omega}{n} = a$, also

$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{n} = \frac{a}{\varrho}, \quad \operatorname{tg}(n\alpha) = \operatorname{tg}\omega = \frac{y}{x}.$$

Führt man dies in die Gleichung für $\operatorname{tg}(n\alpha)$ ein und multipliziert den Bruch auf der rechten Seite mit ϱ^n, so folgt

$$\frac{y}{x} = \frac{\binom{n}{1}\varrho^{n-1} - \binom{n}{3}a^3\varrho^{n-3} + \binom{n}{5}a^5\varrho^{n-5} - \cdots}{\varrho^n - \binom{n}{2}\varrho^{n-2}a^2 + \binom{n}{4}\varrho^{n-4}a^4 - \cdots}$$

Um diese Gleichung, in der $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ zu setzen ist, rational zu machen, muß man sie ins Quadrat erheben, und dann wird die linke Seite, nachdem man mit dem Nenner der rechten Seite multipliziert hat, $y^2\varrho^{2n}$, also von der Ordnung $2n + 2$ w. z. b. w. Die Kurve niedrigster Ordnung der Schar B_n ist B_2, mit der Gleichung $\varrho \operatorname{tg}\omega = a$, also die Kappakurve (S. 196). Alle Kurven B_n sind symmetrisch zu OX und OY.

Dreizehntes Kapitel.

Kurven mit Zentrum oder mit Symmetrie-Achsen[1]).

153. Unter dem Zentrum einer ebenen Kurve Γ versteht man einen Punkt C ihrer Ebene, von der Beschaffenheit, daß jede durch ihn gezogene Gerade die Γ in Punktpaaren schneidet, die symmetrisch

1) Die Kurven, denen dieses Kagitel gewidmet ist, sind Spezialfälle jener, die in einer Homographie sich selber entsprechen; S. Kantor hat eine Methode angegeben ihre allgemeine Gleichung zu finden; s. *Premiers fondéments pour une théorie des transformations planes univoques* (Mem. Accad. Sc. Napoli 3, 1891) I. Teil § 2. Die Bestimmung aller Kurven vierter Ordnung, die projektive Transformationen in sich selbst zulassen, wurde neuerdings von E. Ciani in *Le quartiche projettive a sè stesse* (Rend. Circ. matem. XXVIII, 1909) durchgeführt.

in bezug auf C sind; die Punkte von Γ verteilen sich daher auf ∞^1 Paare, gebildet jedes von einem Punkte und seinem Gegenpunkt; zu sich selbst Gegenpunkt ist das Zentrum C und alle Punkte der unendlich fernen Geraden. Wenn die Kurve Γ ein Zentrum hat (und mehr als eins kann sie offenbar nicht besitzen, es sei denn, daß sie transzendent sei, oder aus einem Büschel paralleler Geraden bestehe), so nennt man sie zentro-symmetrisch, und sie enspricht sich dann selbst in einer harmonischen Homologie, die zum Zentrum C hat und als Achse die unendlich ferne Gerade; daher gehört sie zur Klasse der homologisch-harmonischen Kurven. Die Definition des Zentrums setzt nicht voraus, daß die Kurve algebraisch sei, und in der Tat gibt es transzendente zentrische Kurven; wir wollen jedoch festhalten, daß die im Verlaufe dieses Kapitels behandelten Kurven algebraisch seien[1]).

Alle Kurven zweiter Ordnung besitzen ein Zentrum (in endlicher oder auch in unendlicher Entfernung); alle Kurven dritter Ordnung können in die mit einem Zentrum versehenen projiziert werden (s. Nr. **14**); die Kurven höherer Ordnung besitzen im allgemeinen kein Zentrum, noch auch können sie in zentrische Kurven projiziert werden; dennoch existieren viele Kurven 4ter, 6ter und auch höherer Ordnung, die sich dieser wichtigen Eigenschaft erfreuen (s. Abschn. III u. IV). Daß es zentrische Kurven beliebiger Ordnung gibt, ersieht man, indem man beachtet, daß, wenn man im allgemeinen mit f_k eine binäre Form in x, y (kartesischen Koordinaten) von der Ordnung k bezeichnet, die Gleichungen

$$f_0 + f_2 + f_4 + \cdots + f_{2\mu} = 0, \quad f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2\nu-1} = 0 \;. \quad (1)$$

zwei solche Kurven darstellen, die erstere von der Ordnung $n = 2\mu$ die zweite von der Ordnung $n = 2\nu - 1$, welche beide den Anfangspunkt als Zentrum haben. Die erste enthält

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2\mu + 1) = (\mu + 1)^2 = \frac{n(n+4)}{4} + 1$$

Konstanten, während die zweite deren enthält

$$2 + 4 + \cdots 2\nu = \nu(\nu + 1) = \frac{n(n+4) - 1}{4} + 1.$$

Daraus folgt: **Es gibt $\infty^{\frac{n(n+4)}{4}}$ oder $\infty^{\frac{n(n+4)-1}{4}}$ Kurven n^{ter} Ordnung,**

---

1) Für das Folgende vgl. insbesondere die große Abhandlung von Steiner, *Über solche algebraische Kurven, welche einen Mittelpunkt haben und über darauf bezügliche Eigenschaften allgemeiner Kurven, sowie über geradlinige Transversalen der letzteren* (Crelles Journ., XLVII, 1854; Ges. Werke II). Viele der daselbst ausgesprochenen Sätze wurden von Grüßfeld *in allgemeinerer Form* bewiesen in der Arbeit *Über Curven, welche einen harmonischen Pol und eine harmonische Gerade besitzen* (Math. Ann. II, 1870).

die einen gegebenen Punkt als Zentrum haben, jenachdem n gerade oder ungerade ist. Da es nun $\infty^{\frac{n(n+3)}{2}}$ Kurven von der Ordnung n gibt, **so ist der Umstand, einen bestimmten Punkt als Zentrum zu haben, für eine Kurve n^{ter} Ordnung äquivalent mit $\frac{n(n+2)}{4}$ oder $\frac{n(n+2)-1}{4}$ einfachen Bedingungen, jenachdem n gerade oder ungerade ist.** Man erkennt daraus, daß, **wenn das Zentrum der Lage nach nicht gegeben ist, es in der Ebene $\infty^{\frac{n(n+4)+8}{2}}$ oder $\infty^{\frac{n(n+4)+7}{2}}$ zentrische Kurven von der Ordnung n gibt, jenachdem n gerade oder ungerade ist. Durch** $\frac{n(n+4)+8}{2}$ oder $\frac{n(n+4)+7}{2}$ beliebige Punkte der Ebene gehen daher im allgemeinen eine endliche Zahl zentrischer Kurven von der Ordnung n; die Bestimmung ihrer Anzahl ist ein Problem, das Steiner für einige spezielle Fälle gelöst hat, das er im allgemeinen aufgestellt hat[1]), von dem wir aber glauben, daß es bis heute noch nicht gelöst worden ist. Da in den Gleichungen (1) eine gewisse Anzahl Glieder fehlen können, so folgt: **Eine zentrische Kurve gerader Ordnung enthält selbst ihr eignes Zentrum entweder gar nicht, oder sie geht durch dieses eine gerade Anzahl von Malen hindurch; eine zentrische Kurve ungerader Ordnung hingegen geht durch ihr Zentrum eine ungerade Anzahl $(2r+1)$ von Malen hindurch**; falls $r=0$, so ist die entsprechende Tangente eine Wendetangente.

Es sei I ein einfacher unendlich ferner Punkt der in bezug auf C symmetrischen Kurve Γ; da I mit seinem Gegenpunkte koinzidiert, so muß CI die Kurve in I berühren; folglich: **Alle Asymptoten, die zu einfachen unendlich fernen Punkten einer zentrischen Kurve gehören, gehen durch das Zentrum.** Um zu sehen, wie die Tangenten in einem unendlich fernen, r-fachen Punkte einer zentro-symmetrischen Kurve verteilt sein können, schreiben wir die Gleichungen (1) in folgender Weise:

$$\left.\begin{aligned} f_0 z^{2\mu} + f_2 z^{2\mu-2} + \cdots f_{2\lambda} z^{2\mu-2\lambda} + (ax+by)^r \varphi_{2\mu-r} = 0, \\ f_1 z^{2\nu} + f_3 z^{2\nu-2} + \cdots f_{2\lambda+1} z^{2\nu-2\lambda} + (ax+by)^r \varphi_{2\nu+1-r} = 0, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (1')$$

wo z eingeführt ist, um die Homogenität herzustellen. Jede Tangente im Punkte $(ax+by=0,\ z=0)$ wird eine Gleichung von der Form $ax+by=\omega z$ haben; außerdem sieht man leicht, daß, wenn $r<2\mu-2\lambda$ ist, $\omega=0$ sein muß, während, wenn $r>2\mu-2\lambda$, $\omega=\infty$ sein wird. Im ersteren Falle geht jene Tangente durch das Zentrum der Symmetrie, während sie im zweiten mit der unendlich fernen Geraden zusammenfällt. In dem zwischenliegenden Falle, $r=2\mu-2\lambda$, erhält man

1) *Aufgaben und Sätze* (Crelles Journ., XLVII. S. 105, Nr. 1).

$$\omega = \sqrt[r]{-\frac{f_{2\lambda+1}}{\varphi_{2\lambda+1}}},$$

wobei man sich vorzustellen hat, daß in den Formen $f_{2\lambda+1}$, $\varphi_{2\lambda+1}$ $\frac{x}{y} = -\frac{a}{b}$ gesetzt sei. Weil nun r eine gerade Zahl ist, so sind die r Werte von ω, von denen nicht mehr als zwei reell sind, paarweise gleich, aber von entgegengesetztem Vorzeichen. Folglich: **Die Tangenten in einem unendlich fernen vielfachen Punkte einer zentrosymmetrischen Kurve fallen entweder mit der unendlich fernen Geraden zusammen, oder gehen durch das Zentrum, oder sind in bezug auf dieses paarweise symmetrisch; reell sind höchstens zwei derselben.**

Seien M, N zwei auf einer durch C gehenden Geraden g gelegene Punkte von Γ, dann liegen auf g auch die Gegenpunkte M' und N' von M und N; wenn wir nun im besonderen annehmen, daß M und N zusammenfallen, so fallen auch M' und N' zusammen, und g wird eine Doppeltangente werden; daraus folgt: **Alle Geraden durch das Zentrum einer Kurve, welche diese in endlicher Entfernung berühren, sind Doppeltangenten derselben.** Ebenso: Betrachtet man zwei beliebige Punkte von M und N von Γ und ihre Gegenpunkte M' und N', so werden die Sehnen MN und $M'N'$ nicht nur parallel sein, sondern auch gleichen Abstand vom Zentrum haben; insbesondere wenn M mit N zusammenfällt, tun dies auch M' und N', und demnach: **Die Tangenten in zwei Gegenpunkten einer zentrischen Kurve sind in bezug auf das Zentrum symmetrische Gerade.** In ähnlicher Weise kann man nachweisen: **Die singulären Punkte einer zentrischen Kurve, die nicht im Zentrum, noch auch in unendlicher Entfernung liegen, sind zu je zweien symmetrisch in bezug auf das Zentrum; dasselbe gilt für die zugehörigen Tangenten.** Demnach sind auch die vielfachen Tangenten zu je zweien symmetrisch, und ihre Berührungspunkte sind Gegenpunkte.

Die ersten Polaren des Zentrums in bezug auf die Kurve (1) bestehen aus der unendlich fernen Geraden und einer Kurve Γ_1 von der Ordnung $n-2$, die dargestellt wird durch eine der beiden folgenden Gleichungen:

$$\mu f_0 + (\mu-1) f_2 + \cdots + f_{2\mu-1} = 0,$$
$$(\nu-1) f_2 + (\nu-2) f_3 + \cdots + f_{2\nu-1} = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

beide haben den Punkt C als Zentrum. Machen wir für Γ_1 dieselben Schlüsse wie für Γ, und fahren so fort, so erhalten wir eine Reihe Kurven von der Ordnung $n-4$, $n-6$, $n-8, \ldots$; die letzte derselben ist ein Kegelschnitt, wenn n gerade, und eine Gerade, wenn n ungerade ist, nämlich die Tangente an die Kurve im Zentrum.

Bezeichnen wir mit f die linke Seite einer der beiden Gleichungen (1) und betrachten den unendlich fernen Punkt P der Richtung, die mit Ox den Winkel ω bildet, so sehen wir alsbald, daß die erste Polare von P dargestellt wird durch die Gleichung

$$\cos\omega \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\omega \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Diese Polare ist demnach eine Kurve von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung und konzentrisch mit der Kurve Γ. Variieren wir P, so variiert auch die Kurve (3) und erzeugt ein Büschel, daß zu Grundpunkten die $(n-1)^2$ Punkte hat, in denen sich die Kurven $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ schneiden. Ist n gerade, so sind die Grundpunkte das Zentrum und $\frac{n(n-2)}{2}$ Paare von Gegenpunkten; wenn jedoch n ungerade ist, so bestehen die Grundpunkte aus $\frac{(n-1)^2}{2}$ Gegenpunktepaaren.

Steiner hat bemerkt, daß die zentrischen Kurven bei der Untersuchung der metrischen Eigenschaften der algebraischen Kurven auftreten: um dies an einem Beispiele zu zeigen, möge folgende Betrachtung dienen. Es sei Γ eine beliebige Kurve n^{ter} Ordnung, O ein beliebiger Punkt seiner Ebene; Γ' sei die zu Γ in bezug auf O symmetrische Kurve. Dann haben Γ und Γ' offenbar die unendlich fernen Punkte gemeinsam; die übrigen $n(n-1)$ gemeinsamen Punkte sind dann auf einer Kurve Π von der Ordnung $n-1$ gelegen und bilden $\frac{n(n-1)}{2}$ Paare von in bezug auf O symmetrischen Punkten. Diese Schlüsse kann man in folgendem Satze aussprechen: **Durch einen beliebigen Punkt der Ebene einer Kurve n^{ter} Ordnung gehen im allgemeinen $\frac{n(n-1)}{2}$ Sehnen, die jenen Punkt als Mittelpunkt haben; wenn ausnahmsweise $\frac{n(n-1)}{2}+1$ derselben hindurchgehen, so ist die Kurve in bezug auf diesen Punkt symmetrisch: in dem allgemeinen Falle liegen die Endpunkte jener Sehnen auf einer Kurve von der Ordnung $n-1$, welche nach Steiner die „innere Polare“ des betreffenden Punktes heißt.** Wenn dieser Punkt ein vielfacher der gegebenen Kurve ist, so erfährt der obige Satz Modifikationen, die man leicht angeben kann[1]).

1) Die Untersuchung der zentrosymmetrischen Kurven bietet eine gewisse Analogie mit folgendem Problem: „Gegeben zwei senkrechte Achsen Ox und Oy; eine Kurve C zu finden derart, daß, wenn man einen Punkt m derselben nimmt und auf Om einen Punkt μ, so daß die Strecke μm gleich einer Konstanten $2a$ ist, der Ort der Punkte μ eine Kurve Γ wird, die in gleicher Weise zu Ox gelegen ist, wie C in bezug auf Oy.“ Euler fand (m. s. P. H. Fuss, *Correspondence mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIième Siècle*, St. Pétersburg 1843, I, S. 72), daß die allgemeine parametrische Darstellung einer solchen Kurve ist

154. Eine Gerade r wird der zu einer bestimmten Richtung d konjugierte Durchmesser (im engeren Sinne[1])) einer Kurve Γ genannt, wenn jede zu d parallele Gerade Γ in Punktpaaren schneidet, deren Mitten auf der Geraden r liegen; in einem solchen Falle verteilen sich die Punkte Γ in ∞^1 Paaren von gegenüberliegenden Punkten; die Kurve heißt dann achsialsymmetrisch oder hemisymmetrisch und entspricht sich selber in der harmonischen Homologie, deren Achse r, und deren Zentrum der unendlich ferne Punkt von d ist; sie ist also eine homologisch-harmonische Kurve (s. Nr. **153**). Es entsprechen sich selber dieser Punkt der unendlich fernen Geraden und alle Punkte jenes Durchmessers. Wenn insbesondere d senkrecht zu r ist, so haben wir eine orthogonale Symmetrie, und r ist eine Achse der Kurve. Nehmen wir als x-Achse den Durchmesser r und als y-Achse eine Gerade, welche dieselbe Richtung wie d hat, so wird eine Kurve Γ, die eine solche Symmetrie besitzt, wenn sie algebraisch und von der Ordnung n ist, eine Gleichung haben, die sich nicht ändert, wenn das Vorzeichen von y auch wechselt, d. h. eine Gleichung von dem einen oder anderen der folgenden Typen, jenachdem n gerade oder ungerade:

$$f_0(x)y^{2\mu} + f_2(x)y^{2\mu-2} + \cdots + f_{2\mu}(x) = 0,$$
$$f_1(x)y^{2\nu-2} + f_3(x)y^{2\nu-4} + \cdots + f_{2\nu-1}(x) = 0, \quad . \quad . \quad (4)$$

wo $f_k(x)$ im allgemeinen ein Polynom vom Grade k in x ist. Wenden wir auf diese dieselben Betrachtungen wie auf (1) an, so ergibt sich: **Es gibt $\infty^{\frac{n(n+4)}{4}}$ oder $\infty^{\frac{n(n+1)-1}{4}}$ Kurven n^{ter} Ordnung mit einer bestimmten axialen Symmetrie, jenachdem n gerade oder ungerade ist; eine bestimmte Symmetrie zu besitzen, ist daher äquivalent mit $\frac{(n+1)^2-1}{4}$ oder $\frac{(n+1)^2}{4}$ einfachen Bedingungen für eine Kurve n^{ter} Ordnung, jenachdem n gerade oder ungerade ist. Die Zahl der Kurven n^{ter} Ordnung mit axialer Symmetrie beträgt daher $\infty^{\frac{(n+1)^2-1}{4}+3}$ bezw. $\infty^{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2+3}$.**

Die Tangenten an die Kurve Γ, die r zum konjugierten Durchmesser in bezug auf die Richtung d hat, in den einfachen Punkten, in welchen r sie schneidet, sind parallel zu d. Alle übrigen zu d

---

$$x = \frac{(a+2)\sqrt{a^2+z^2+2Q}}{\sqrt{2(a^2+z^2)}}, \quad y = \frac{(a+2)\sqrt{a^2+z^2+2Q}}{\sqrt{2(a^2+z^2)}},$$

wo z ein Parameter und Q eine ungerade Funktion desselben ist; wenn z. B. $Q = naz$ ist, erhält man eine Kurve 8ter Ordnung.

1) Im allgemeinen ist ein Durchmesser die Polare eines unendlich fernen Punktes in bezug auf die Kurve; vgl. V. Kommerell, *Durchmesser ebener algebraischer Kurven* (Württemberg. Mitth., 2. Ser. X, 1907).

parallelen Tangenten sind Doppeltangenten. Die Tangenten in zwei gegenüberliegenden Punkten schneiden sich auf der Achse; singulären Punkten entsprechen symmetrisch gegenüberliegende usw. — Wenn die Kurve von ungerader Ordnung ist, so geht sie durch den unendlich fernen Punkt von d und hat daselbst einen Wendepunkt; in besonderen Fällen kann dieser von einer größeren, aber immer ungeraden Vielfachheit sein; wenn dagegen die Kurve von gerader Ordnung ist, so geht die Kurve eine gerade Anzahl von Malen, Null nicht ausgenommen, durch den unendlich fernen Punkt von d.

Zwischen den Krümmungen in zwei entsprechenden Punkten einer axial-symmetrischen Kurve besteht eine Beziehung, die ausgedrückt wird durch den folgenden

Satz von Mannheim: Hat eine Kurve einen geradlinigen Durchmesser, so verhalten sich die Krümmungsradien in den Endpunkten der zu ihm konjugierten Sehne wie die Kuben der entsprechenden Tangenten, gerechnet von ihrem Berührungspunkt bis zum Schnitt mit jenem Durchmesser[1]).

Zum Beweise beziehen wir die Kurve auf ein Koordinaten-System mit jenem Durchmesser als x-Achse und nehmen als y-Achse die Parallele zu der gemeinsamen Richtung der konjugierten Sehnen. Ist nun ω der Winkel zwischen den Koordinatachsen, so haben wir für den Krümmungsradius R und die Länge T der Tangente in irgend einem Punkte (x, y) die beiden Ausdrücke

$$R = \frac{(1 + 2y' \cos\omega + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y'' \sin\omega}, \quad T = \frac{y(1 + 2y' \cos\omega + y'^2)^{\frac{1}{2}}}{y'},$$

woraus sich in absoluten Werten ergibt

$$R = \frac{T^3 y'^3}{y^3 \cdot y'' \sin\omega}.$$

Sind nun R_1 und T_1 die entsprechenden Werte für den Punkt $(x, -y)$, so hat man ebenfalls in absoluten Werten,

$$R_1 = \frac{T_1^3 y'^3}{y^3 y'' \sin\omega},$$

woraus $R : R_1 = T^3 : T_1^3$ folgt, w. z. b. w.

Allen, die axial-symmetrischen Kurven betreffenden Sätzen, entsprechen im allgemeinen solche die zentrosymmetrischen Kurven betreffende. Jedoch die letzteren erfreuen sich einer Besonderheit, der nichts Analoges bei den Kurven entspricht, mit denen wir uns jetzt beschäftigen; während nämlich eine algebraische, nicht zerfallende Kurve nur in bezug auf ein Zentrum symmetrisch sein kann (da eine Strecke ja nur einen Mittelpunkt haben kann), so kann sie in bezug auf mehrere Achsen symmetrisch sein; um dies zu zeigen, möge das Beispiel der Kegel-

1) *Note de géométrie infinitésimale* (Ann. di Matem. II, 1859).

schnitte genügen, die ja symmetrisch in bezug auf jeden Durchmesser und den dazu konjugierten sind. Die Untersuchung der Verteilung der Durchmesser einer Kurve wurde mit mäßigem Erfolge von Euler[1]) versucht, der jedoch das Leitgesetz dieser Verteilung erkannt hat; dieses Gesetz wurde dann später in seiner ganzen Allgemeinheit von Wantzel[2]) aufgestellt, dessen Beweisführung wir nunmehr in ihren Hauptzügen wiedergeben wollen.

Eine Kurve, die einen einzigen Durchmesser hat, wird im allgemeinen keine anderen Spezialitäten haben als diejenigen, die sich aus der Definition des Durchmessers ergeben; dasselbe kann man sagen, wenn die Kurve ein Paar konjugierter Durchmesser besitzt. Aber: **Wenn eine Kurve zwei Durchmesser hat, die nicht zueinander konjugiert sind, so hat sie noch einen dritten, der durch den Schnittpunkt jener beiden ersten geht; infolgedessen noch einen vierten und so weiter ins Unendliche, es sei denn, daß dieser wieder mit einem zusammenfiele, von dem man ausgegangen ist.** Um dies zu beweisen, nehmen wir an, daß OA und OB die beiden gegebenen Durchmesser seien, und daß die Geraden a und b (Taf. XIV, Fig. 115), die durch den Schnittpunkt gezogen sind, die Richtungen der bezüglichen konjugierten Sehnen angeben; die beiden Symmetrien seien bzw. $\mathfrak{S}_a$ und $\mathfrak{S}_b$. Es gibt nun unendlich viele Kegelschnitte K, die OA und a, OB und b als Paare konjugierter Durchmesser haben; es sind lauter konzentrische und homothetische Kurven, Ellipsen oder Hyperbeln, jenachdem die beiden konjugierten Durchmesserpaare sich trennen oder nicht; im Speziellen sind es Kreise, wenn OA und OB Symmetrieachsen sind. In jedem Falle geht durch einen beliebigen Punkt der Ebene eine einzige und bestimmte Kurve K. Von den Kegelschnitten K betrachten wir denjenigen, der durch einen Punkt M der Kurve Γ geht, die der Annahme gemäß sich der beiden Symmetrien $\mathfrak{S}_a$ und $\mathfrak{S}_b$ erfreut. Wir ziehen durch M die Sehne MP von K, die parallel zu a ist, und die Sehnen MN und PQ, die parallel zu b sind, wir verbinden O mit dem Mittelpunkte C der Sehne NQ. Es wird behauptet: **Der Durchmesser OC hat eine von dem auf Γ gewählten Punkte M unabhängige Lage.** Aus der angegebenen Konstruktion ergibt sich nämlich

$$\text{Sektor } QOB = \text{Sektor } POB; \quad \text{Sektor } NOB = \text{Sektor } MOB,$$

daher
$$\text{Sektor } NOC = \text{Sektor } MOA,$$

und
$$\text{Sektor } BOC = \text{Sektor } BOA.$$

Folglich ist OC jener Durchmesser von K, der mit OB einen Sektor

1) *Sur quelques propriétés des sections coniques qui conviennent à une infinité d'autres lignes courbes* (Mém. de l'Acad. de Berlin I, 1745).

2) *Mémoire sur la théorie des diamètres rectilignes des courbes quelconques* (Liouvilles Journ., XIV, 1849).

bildet, der gleich ist dem durch die Durchmesser OA und OB gebildeten. Aber wegen der homothetischen und konzentrischen Lage der Kegelschnitte K ist er auch unabhängig vom Punkte M, durch den wir den beliebigen Kegelschnitt hindurchgehen ließen, er hängt daher ausschließlich ab von den Durchmesserpaaren OA, a und OB, b. — Wir beachten jetzt, daß, weil M ein Punkt von Γ war, dieser Kurve auch die Punkte P und N angehören, die in der Symmetrie $\mathfrak{S}_a$ und $\mathfrak{S}_b$ dem Punkte M entsprechen; ebenso wie Q dem P in $\mathfrak{S}_b$ entspricht. Außerdem entsprechen sich N und Q in der Symmetrie $\mathfrak{S}_c$, die durch den Durchmesser OC und die zu ihm konjugierte Richtung c bestimmt ist; demnach entspricht Γ auch sich selber in der Symmetrie $\mathfrak{S}_c$. Wenden wir nun dieselbe Überlegung wie bei OA und OB auf das Paar OB und OC an, so gelangen wir zu einer neuen Symmetrie $\mathfrak{S}_d$, welche jedoch mit einer der vorigen zusammenfallen kann. Fahren wir so fort, so erkennen wir: **Alle durch einen Punkt gehenden Durchmesser einer Kurve gehören einem Kegelschnitte an, in welchem sie zu den Richtungen der Sehnen selbst konjugiert sind, und begrenzen jeder mit dem folgenden und dem zugehörigen Bogen des Kegelschnittes einander gleich große Sektoren.** Im Speziellen: **Alle durch einen Punkt laufende Achsen einer Kurve bilden miteinander gleiche Winkel.** — Aus den obigen Überlegungen geht hervor, daß, wenn die Kurve Γ unendlich viele Durchmesser besäße, die durch einen Punkt gehen, so hätte sie mit dem Kegeschnitte K unzählig viele Punkte gemeinsam, müßte daher notwendigerweise transzendent sein; **daher haben die algebraischen Kurven eine endliche Zahl von Durchmessern, die durch einen Punkt laufen.** Im Falle ihre Ordnung ungerade ist, kann ihre Zahl die Ordnung der Kurve nicht übersteigen[1]), aus dem Grunde, weil mit jeder Symmetrie, in bezug auf eine Achse, ein unendlich ferner Punkt der Kurve selbst verknüpft ist. Insbesondere: **Die durch denselben Punkt gehenden Achsen einer algebraischen Kurve bilden eine Windrose.**

Bei dem Beweise des ersten der vorigen Sätze sind zwei Annahmen stillschweigend ausgeschlossen worden: erstens, daß a und b zusammenfallen, zweitens, daß die beiden Durchmesser parallel sind. Wir müssen jetzt zusehen, was in jedem dieser Spezialfälle eintreten wird:

a) Im ersten Falle ziehen wir (Taf. XIV, Fig. 116) eine Gerade AB parallel zur gemeinsamen Richtung von a und b. Nehmen wir dann beliebig einen Punkt M von Γ und suchen die entsprechenden P und N in $\mathfrak{S}_a$ und $\mathfrak{S}_b$, darauf den dem P in $\mathfrak{S}_b$ entsprechenden Q; es ist klar, daß die Punkte N, P, Q auf der durch M zu AB gezogenen

1) Waring, *Miscellanea analytica* (Cantabridgiae, 1762) S. 68.

Parallelen liegen, und daß, wenn man auf dieser Geraden die Strecke $BC = AB$ nimmt, die Punkte N und Q sich in der Symmetrie $\mathfrak{S}_c$ entsprechen, welche als Achse OC und als konjugierte Richtung AB hat, und daß die Kurve Γ sich auch dieser dritten Symmetrie erfreut. Fahren wir in dieser Weise fort, so sehen wir: **Wenn eine Kurve zwei sich schneidende Durchmesser hat, die derselben Sehnenrichtung konjugiert sind, so hat sie unzählige andere, die durch denselben Punkt gehen, und die auf einer Geraden, welche diese Richtung hat, einander gleiche Strecken abschneiden.**

b) Im zweiten Falle, wenn AA' und BB' zwei parallele Durchmesser der Kurve Γ sind, den Richtungen der Geraden a und b bzw. konjugiert, so konstruiere man eine Parabel K, in welcher den Durchmessern AA', BB' die zu a und b parallelen Sehnen konjugiert sind; wenden wir die vorige Überlegung mit den nötigen Modifikationen an, so ergibt sich: **Wenn eine Kurve zwei parallele Durchmesser hat, so hat sie deren unendlich viele in gleichen Abständen von einander, die derselben Parabel angehören, in welcher sie zu denselben Sehnen konjugiert sind.**

155. Die unter diesen beiden Voraussetzungen betrachteten Kurven Γ sind sämtlich transzendent; wir werden daher nicht weiter von diesen Voraussetzungen sprechen und kehren zu dem allgemeinen Falle zurück, um zu zeigen, wie man analytisch die übrigen Durchmesser einer Kurve Γ bestimmt, die zwei schon bekannte Symmetrien besitzt. Zu dem Zwecke nehmen wir ein kartesisches Koordinatensystem, welches OA und a als Achsen hat; wir nehmen an, daß α der von den Achsen gebildete Winkel sei, und daß

$$y = mx, \quad y = nx$$

die Gleichungen von OB und b seien. Haben m und n entgegengesetzte Vorzeichen, so sind die Kegelschnitte K sämtlich Ellipsen; die Gleichung einer von ihnen möge sein

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \,. \qquad (5)$$

Da OB und b zwei konjugierte Durchmesser von (5) sind, so besteht die Beziehung

$$mn + \frac{b^2}{a^2} = 0 \,. \qquad (6)$$

Gehen wir zu Polarkoordinaten ϱ und φ über, wobei O Pol, OA Polarachse ist, so müssen wir setzen

$$x = \varrho \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha}, \quad y = \varrho \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha};$$

wegen (5) bekommen wir dann:

$$\varrho^2 = \frac{a^2 b^2 \sin^2 \alpha}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \sin^2 (\alpha - \varphi)};$$

Die Fläche des Sektors Σ, der zwischen dem Halbmesser OA und dem Halbmesser, der mit OA den Winkel φ bildet, liegt, wird daher gegeben durch

$$\Sigma = \frac{1}{2}\int_0^\varphi \varrho^2 \cdot d\varphi = \frac{a^2 b^2 \sin\alpha}{2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{a^2 \sin^2\varphi + b^2 \sin^2(\alpha - \varphi)}$$

$$= \frac{a^2 b^2 \sin^2\alpha}{2}\int_0^\varphi \frac{d\,\mathrm{tg}\,\varphi}{b^2 \sin^2\alpha - 2b^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\varphi + (a^2 + b^2\cos^2\alpha)\,\mathrm{tg}^2\varphi};$$

nach Ausführung der Integration ergibt sich

$$\Sigma = \frac{ab\sin\alpha}{2}\,\omega, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

wenn man setzt

$$\omega = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{(a^2 + b^2\cos^2\alpha)\,\mathrm{tg}\,\varphi - b^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{ab\sin\alpha}$$

oder auch wegen Gleichung (6)

$$\mathrm{tg}\,\omega = \frac{(1 - mn\cos^2\alpha)\,\mathrm{tg}\,\varphi + mn\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{-mn}\sin\alpha}. \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Betrachten wir im besonderen als zweiten Halbmesser des Sektors den Halbmesser OB, so ist in diesem Falle

$$m = \frac{\sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}, \quad \text{oder auch} \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{m\sin\alpha}{1 + m\cos\alpha};$$

infolgedessen wird Gleichung (8) nach einigen Reduktionen

$$\mathrm{tg}\,\omega = \sqrt{-\frac{m}{n}\cdot\frac{1 + n\cos\alpha}{1 + m\cos\alpha}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Wenn aber, entgegen der vorhin gemachten Annahme, m und n dasselbe Vorzeichen haben, so sind die Kegelschnitte **K** sämtlich Hyperbeln. Ist nun

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5')$$

eine derselben, so hat man

$$mn = \frac{b^2}{a^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6')$$

es besteht auch die Gleichung (7), jedoch der Wert von ω wird nicht mehr durch (9) gegeben, sondern durch folgende Gleichung:

$$\mathfrak{Tg}\,\omega = \sqrt{\frac{m}{n}\cdot\frac{1 + n\cos\alpha}{1 + m\cos\alpha}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9')$$

Fassen wir zusammen, so können wir sagen: Die Fläche Σ des von den beiden gegebenen Halbmessern OA und OB begrenzten Sektors des Kegelschnitts **K** ist durch (7) gegeben, während ω durch (9) oder (9′) bestimmt wird, jenachdem **K** eine Ellipse oder eine Hyperbel ist. In dem Spezialfalle, daß OA eine Achse ist, werden die Gleichungen (7), (9), (9′), weil $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist, zu

$$\Sigma = \frac{ab}{2}\omega, \quad \mathrm{tg}^2\omega = -\frac{m}{n}, \quad \mathfrak{Tg}^2\omega = \frac{m}{n},$$

die von Wantzel aufgestellt wurden, der stillschweigend annahm, daß der erste Durchmesser, von dem man ausging, eine Achse sei

Wir betrachten nun einen dritten Durchmesser der Kurve Γ, OC und den dazu konjugierten. Wenn $y = m'x$ und $y = n'x$ die Gleichungen dieser beiden sind, so ist

$$m'n' = mn; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Die Fläche des Sektors BOC' wird gleich sein der des Sektors AOB, daher wird die des Sektors AOC das Doppelte von der des Sektors AOB sein, also gleich $\frac{ab\sin\alpha}{2}\cdot 2\omega$, und man erhält, je nach dem Falle, Ellipse oder Hyperbel

$$\mathrm{tg}\, 2\omega = \sqrt{-\frac{m'}{n'}\,\frac{1+n'\cos\alpha}{1+m'\cos\alpha}} \cdot \quad (11), \qquad \mathfrak{Tg}\, 2\omega = \sqrt{\frac{m'}{n'}\,\frac{1+n'\cos\alpha}{1+m'\cos\alpha}} \cdot \quad (11')$$

Kombinieren wir (10) mit (11) oder (11′), so erhalten wir m' und n', wodurch dann die dritte Symmetrie bestimmt ist, welche Γ besitzt. Eine vierte erhalten wir, wenn wir einen Durchmesser OD nehmen, so daß der Sektor OAD das Dreifache von AOB ist, usf. Es ist klar daß, wenn man schließlich wieder auf den Durchmesser AO zurückkommt, von dem man ausgegangen ist, der Fall der Ellipse vorliegen, und der durch Gleichung (9) definierte Winkel ω ein aliquoter Teil des vollen Winkels sein muß.

In dem Falle, daß die beiden Ausgangs-Symmetrien rechtwinklig sind, hat man $\alpha = \frac{\pi}{2}$, aber $mn = -1$, und Gleichung (9) liefert $\mathrm{tg}\,\omega = m$, wie es sein muß. Wenn außerdem noch $\omega = \frac{\pi}{r}$, so hat die Kurve Γ als Durchmesser die r Geraden durch den Anfangspunkt, welche mit OA die Winkel bilden

$$0, \quad \frac{\pi}{r}, \quad \frac{2\pi}{r}, \quad \frac{3\pi}{r}, \quad \ldots, \quad \frac{(r-1)\pi}{r}.$$

Nehmen wir an, daß Γ eine algebraische Kurve sei[1]) und die Polargleichung habe

$$f(\varrho, \cos\varphi, \sin\varphi) = 0,$$

so muß f von der Beschaffenheit sein, daß es sich nicht ändert, wenn das Vorzeichen von φ wechselt; daher dürfen in f nur die geraden Potenzen von $\sin\varphi$ auftreten, welche man vermittels der Identität $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ verschwinden lassen kann. Alsdann wird die vorige Gleichung die Form annehmen:

$$F(\varrho, \cos\varphi) = 0.$$

---

1) Euler, *Introductio in analysin infinitorum* (Lausannae, 1748) Kap. XV.

Da nun Γ symmetrisch in bezug auf die Gerade $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{k\pi}{n}$ ist $(k = 1, 2, 3 \ldots, n-1)$, so wird die nunmehr gefundene Gleichung identisch sein müssen mit

$$F\left(\varrho, \cos\left(\frac{2k\pi}{n} - \varphi\right)\right) = 0,$$

was erfordert, daß sie von der Form sei

$$\mathfrak{F}(\varrho, \cos n\varphi) = 0.$$

Machen wir hier die Voraussetzung, daß $\mathfrak{F}$ eine algebraische, rationale und ganze Funktion von ϱ und $\cos n\varphi$ sei, oder auf eine solche zurückführbar, so erhalten wir damit die analytische Darstellung einer algebraischen Kurve, die n-fach achsial-symmetrisch ist.[1])

Ein Beispiel von Kurven mit einer bestimmten Zahl von Symmetrie-Achsen bieten uns die Rhodoneen (s. Kap. 8 dieses Abschnittes).

Ein zweites liefern die Kurven, die durch eine Gleichung von folgender Form dargestellt werden

$$\varrho = \frac{p}{1 + e\cos n\omega}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (12)$$

wo p eine gegebene Strecke, e eine reelle und n eine ganze Zahl ist. Für $n = 0$ stellt diese Gleichung einen Kreis dar, für $n = 1$ einen Kegelschnitt, dessen Brennpunkt der Pol ist; demnach können die fraglichen Kurven als analytische Verallgemeinerung der Kegelschnitte aufgefaßt werden, können daher denjenigen zugesellt werden, von denen im 2.—6. Kap. dieses Abschnittes die Rede war. Sie wurden jedoch nicht in Hinsicht hierauf eingeführt, sondern wegen der Anwendung, die man von ihnen in der Kinematik macht, woselbst sie nach einem Vorschlage C. P. Lefébre's von Laboulaye[2]) den Namen Kurven mit n Bäuchen (courbes à n ventres) erhielten. Setzt man

$$\varrho_1 = a(1 + e\cos n\omega),$$

1) Weitere Entwicklungen über derartige Kurven finden sich in der Abhandlung von E. Ciani, *Le linee diametrali delle curve algebriche piane, in particolare i lori assi disimmetria* (Ann. Scuola norm. Pisa, 1889), ferner in den Aufsätzen von R. D. Carmichael, *On the classification of plane algebraic curves possessing fourfold symmetrg with respect to a point* (Annals of mathem., 2. Ser., IX., 1908) und *On the geometric properties of quartics curves possessing fourfold symmetry with respect to a point* (Id., X, 1909). Aus dem letzten entnehmen wir, daß die kartesische Gleichung einer Kurve 4. Ordnung mit vierfacher Symmetrie auf eine der folgenden Formen reduziert werden kann:

$$2a_0(x^4 + y^4) + 2a_1 xy(x^2 - y^2) + 4a_2 x^2y^2 + a_3(x^2 + y^2) + a_4 = 0,$$
$$a_0(x^4 - y^4) + 2a_1(x^2 + y^2) + a_2(x^2 - y^2) + 2a_3 xy = 0.$$

2) *Traité de cinématique* (Paris, 1849). Wir entnehmen diese Zitation ebenso die Definitionsgleichung (12) aus H. Brocard, *Notes de bibliographie des courbes géométriques* (Bar-le-Duc 1897, S. 65—66).

so hat man die Gleichung der Konchoide einer Rhodonee (Beispiel auf S. 374); infolgedessen kann man (12') schreiben als

$$\varrho \cdot \varrho_1 = ap.$$

Eine Kurve mit n Bäuchen ist die Inverse einer Rhodoneenkonchoide; damit ist ein Weg zu ihrer Konstruktion gegeben.

Die bloße Betrachtung der Gleichung (12) führt uns zu einer wichtigen Einteilung. Ziehen wir nämlich in Erwägung, daß, wenn wir ω derart wählen, daß

$$1 + e \cos n\omega = 0, \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

so muß $\varrho = \infty$ werden; nun hat diese Gleichung für ω nur dann reelle Wurzeln, wenn $|e| \geqq 1$; folglich: **Die durch (12) dargestellten Kurven erstrecken sich ins Unendliche, wenn $|e| \geqq 1$, andernfalls liegen sie ganz innerhalb des Kreisringes, der von den mit den Radien $p : |1 \pm e|$ um den Pol beschriebenen Kreisen begrenzt wird.**

Im ersteren Falle setzen wir $-\frac{1}{e} = \cos\alpha$; die Gleichung (1) wird alsdann

$$\varrho = \frac{p \cos\alpha}{\cos\alpha - \cos n\omega} \quad \ldots \ldots \quad (12')$$

und (13) liefert nun

$$\omega = \pm \frac{a + 2k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Bezeichnen wir mit β einen beliebigen der Winkel $\pm \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$, und betrachten somit einen beliebigen von den unendlich fernen Punkten der fraglichen Kurve, nennen d den Abstand der entsprechenden Asymptote vom Pol, so haben wir[1])

$$d = \lim_{\omega=\beta} \varrho(\omega - \beta) = \lim_{\omega=\beta} \frac{p\cos\alpha}{\cos\alpha - \cos n\omega}(\omega - \beta)$$

$$= p\cos\alpha \cdot \lim \frac{\omega - \beta}{\cos n\beta - \cos n\omega} = \frac{p\cos\alpha}{n}\frac{1}{\sin n\beta} = \frac{\pm p}{n \operatorname{tg}\alpha} = \pm\frac{p\sqrt{e^2-1}}{n}.$$

Weil dieser Ausdruck unabhängig von k ist, so ergibt sich: **Wenn eine Kurve mit n Bäuchen unendliche Zweige hat, so berühren die zugehörigen Asymptoten einen und denselben mit der Kurve konzentrischen Kreis.**

Wir beachten nun[2]), daß, wenn $\frac{1}{\varrho} = \sigma$ gesetzt wird, der Krümmungsradius in Polarkoordinaten im allgemeinen durch die Formel gegeben wird:

$$R = \frac{\left[\sigma^2 + \left(\frac{d\sigma}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\sigma^3\left(\sigma + \frac{d^2\sigma}{d\omega^2}\right)},$$

---

1) Siehe z. B Hoüel, *Cours de Calcul infinitésimal* II. (Paris, 1878), S. 22.
2) Serret-Harnack-Scheffers. I (Leipzig, 1906) S. 351.

daher sind alle diejenigen Punkte Wendepunkte, für welche

$$\sigma + \frac{d^2\sigma}{d\omega^2} = 0$$

wird; wenden wir dies auf den Fall $\sigma = \frac{1 + e\cos n\omega}{p}$ an, so erhalten wir

$$1 + e(1 - n^2)\cos n\omega = 0,$$

welches mit (2) kombiniert liefert

$$\varrho = \frac{n^2 - 1}{n^2} p;$$

damit ist gezeigt: **Alle Punkte, in welchen die durch (12) dargestellte Kurve von dem konzentrischen, mit dem Radius $\frac{n^2-1}{n^2}\,p$ beschriebenen Kreise geschnitten wird, sind Wendepunkte derselben.**

Wenn n eine ganze Zahl ist (und dies ist der häufigste Fall, der auch in Betracht kam, als man den hier untersuchten Kurven ihren Namen gab), so ist die durch (12) dargestellte Kurve rational. Geht man zu kartesischen Koordinaten über, so wird diese

wenn n gerade:

$$\left[e\left\{x^n - \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots\right\} + (x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}\right]^2 - p^2(x^2+y^2)^{n-1} = 0,$$

wenn n ungerade: (14)

$$\left[e\left\{x^n - \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots\right\} - p(x^2+y^2)^{\frac{n-1}{2}}\right]^2 - (x^2+y^2)^n = 0.$$

Hieraus ergibt sich: **Eine Kurve mit n Bäuchen ist von der Ordnung $2n$, und das Zentrum ist ein $2(n-1)$-facher Punkt, dessen zugehörende Tangenten mit den durch die Kreispunkte der Ebene gehenden Geraden zusammenfallen.** — Das Verhalten der Kurve im Unendlichen ist verschieden, jenachdem n gerade oder ungerade. Im ersten Falle hat sie auf der unendlich fernen Geraden n Doppelpunkte; im zweiten Falle sind ihre unendlich fernen Punkte sämtlich voneinander getrennt.[1])

Ein drittes Beispiel einer Kurve, die in bezug auf mehrere Achsen symmetrisch ist, bietet uns **der Ort der Punkte, die gleich stark erleuchtet werden von n gleichen Lichtern, die auf den Ecken eines**

---

1) Wollen wir auch den Fall betrachten, daß n eine gebrochene Zahl ist, und die kartesische Gleichung, sowie die Ordnung der Kurve auffinden, so können wir ein Verfahren anwenden, das demjenigen nachgebildet ist, welches wir in S. 362 bei den Rhodoneen angewandt haben; diese Rechnung auszuführen, überlassen wir dem Leser. Setzt man endlich nur voraus, daß n eine reelle Zahl ist, so bekommt man aus (12) eine Kurvenklasse, der man bei der Kegelabwicklung begegnet; m. s.: Th. Olivier, Journ. Ec. pol., XXII cah., 1833, S. 122; E. Catalan, Nouv. Ann. Math., XV, 1856, S. 107, und *Traité de géometrie descriptive* (Paris, 1857) II, S. 58.

regulären n-Ecks verteilt sind. Ein solcher Ort ist offenbar symmetrisch in bezug auf jeden, entweder durch die Ecken oder die Seitenmitten des Polygons gehenden Durchmesser des umbeschriebenen Kreises. Unter der gewöhnlichen Voraussetzung, daß die Stärke der Beleuchtung umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung des beleuchteten Punktes vom leuchtenden Punkte ist, und daß die Koordinaten der Ecken des gegebenen regulären Vielecks seien

$$x = a \cos \frac{2k\pi}{n}, \qquad y = a \sin \frac{2kn}{n} \qquad (n = 0, 1, 2, 3 \dots n-1)$$

ist die Gleichung des fraglichen Ortes ersichtlich

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{1}{\left(x - a\cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2 + \left(y - a \sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2} = \frac{1}{a^2} \dots \quad (15)$$

Den Ort selbst kann man Isophane nennen[1]).

Vierzehntes Kapitel.

Autopolare, anallagmatische und Richtungskurven.

156. Die Untersuchung der Kurven, denen das vorige Kapitel gewidmet war, gehört als spezieller Fall zu dem vielgestaltigen Problem, solche Kurven aufzusuchen, die bei einer bestimmten geometrischen Transformation sich selber entsprechen. Einen anderen speziellen Fall dieser Frage bietet die Untersuchung der autopolaren Kurven dar, d. h. solcher Kurven, die sich in sich selbst verwandeln, wenn sie einer polaren Transformation unterzogen werden. Sei

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

die homogene Gleichung des Direktrix-Kegelschnittes Γ einer ebenen Polarität; es gibt dann ∞^2 Kegelschnitte Σ, die zu sich selbst polar sind in bezug auf Γ; leicht sieht man, daß deren allgemeine Gleichung lautet:

$$2(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)^2 - (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = 0, \quad (2)$$

wo die ξ beliebige Parameter sind. Während hiermit das Problem der Bestimmung der zu Γ autopolaren Kurven zweiter Ordnung erledigt ist, wird das analoge Problem für die Kurven höherer Ordnung in folgender Weise gelöst[2]):

Nehmen wir an, daß in (2) die ξ beliebige Funktionen eines Parameters seien, dann stellt (2) ∞^1 Kegelschnitte Σ dar; die Enve-

---

1) Der einfachste Fall der Isophanen, $n = 2$, findet sich in E. Catalan, *Manuel des candidats à l'Ecole polytéchnique* I. (Paris, 1857) S. 330.

2) P. Appell, *Courbes autopolaires* (Nouv. Ann. Math., 3e Sér. XIII, 1894).

loppe derselben besteht aus der Kurve Γ und einer Kurve K, die autopolar in bezug auf Γ selbst ist. Ist nämlich A der Berührungspunkt von Γ mit einer der Σ und b die gemeinsame Tangente in A an beide Kurven, dann entspricht in der gegebenen Polarität Σ der Annahme gemäß sich selber, der K entspricht eine Kurve K', die Σ im Pole B von b berührt, weshalb K' in gleicher Weise wie K die Enveloppe der betrachteten Kegelschnitte Σ ist; daher fällt K' mit K zusammen, mit allenfallsiger Ausnahme gewisser Teile, die durch den Kegelschnitt Γ dargestellt werden ein- oder mehrfach genommen.

Umgekehrt kann jede in bezug auf Γ autopolare Kurve K auf diese Weise erzeugt werden. Ist nämlich A ein Punkt von K, und b die entsprechende Tangente, so berührt der Voraussetzung nach die Polare a von A K im Punkte B, welcher der Pol von b ist; man kann daher einen Kegelschnitt Σ auffinden, der autopolar in bezug auf Γ ist, der die Geraden a und b bzw. in A und B berührt; dieser ist daher auch doppelberührend für K; diese ist demnach die Enveloppe von unendlich vielen autopolaren Kegelschnitten, was zu beweisen war. — Die Untersuchung der autopolaren Kurven ist somit auf ein Problem zurückgeführt, das die Enveloppe einer Reihe von ∞^1 Kegelschnitten betrifft.

Eine andere Methode diese Frage zu lösen wurde von C. Rabut[1]) angegeben und verdient unsererseits einen Hinweis.

Die kartesische Gleichung des als Direktrix der Polarität dienenden Kegelschnittes Γ sei

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

und es seien f'_x, f'_y die partiellen Ableitungen von f. Es möge nun der Punkt $P(x, y)$ die Kurve Δ $\varphi(x, y) = 0$ durchlaufen. Seine Polare p in bezug auf Γ hat die Gleichung

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})\,X + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})\,Y \\ + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}) = 0,$$

folglich erhält man die Enveloppe von p durch Elimination von x, y, λ aus den beiden vorigen Gleichungen und den folgenden

$$a_{11}X + a_{12}Y + a_{13} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0,$$

$$a_{21}X + a_{22}Y + a_{23} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Nennen wir also x_1, y_1 die Koordinaten des Punktes, in welchem die Gerade p ihre eigene Enveloppe Γ_1 berührt, so haben wir

$$\frac{1}{2}f'_{x_1} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{1}{2}f'_{y_1} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0,$$

1) *Equations et propriétés fondamentales des courbes autopolaires dans le plan et dans l'espace* (C. R. CXXXII, 1901, S. 1470).

und daher auch

$$f'_{x_1} : f'_{y_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

d. h.

$$f'_{x_1} : f'_{y_1} = -\frac{dy}{dx}. \qquad (3)$$

In ähnlicher Weise erhält man

$$f'_x : f'_y = -\frac{dy_1}{dx_1}. \qquad (4)$$

Wenn nun aus den drei Gleichungen

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0, \qquad \frac{f'_x}{f'_y} = \frac{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}}{a_{21}x + a_{22}y + a_{23}}$$

x und y eliminiert werden, so bekommt man eine Gleichung von der Form

$$F\left(\frac{dy}{dx}, -\frac{f'_x}{f'_y}\right) = 0, \qquad (5)$$

von der die gegebene Kurve Δ ein Integral ist. Zufolge der Gl. (3) und (4) wird aber

$$F\left(-\frac{f'_{x_1}}{f'_{y_1}}, \frac{dy_1}{dx_1}\right) = 0. \qquad (5')$$

die Differentialgleichung der Kurve Δ_1, der Polare von Δ, sein. Wenn nun Δ_1 mit Δ zusammenfallen soll, so dürfen (5) und (5′) nur sich durch Vertauschung von x, y mit x_1, y_1 resp. unterscheiden und dies erfordert offenbar, daß die Funktion F symmetrisch in den beiden Größen sei, von denen sie abhängt. Ist diese Bedingung erfüllt, so stellt (5) die Differentialgleichung der zum Kegelschnitt Γ autopolaren Kurve dar.

Die Frage, ob es Kurven gibt, die in bezug auf eine endliche Zahl von Kegelschnitten autopolar sind, ist unseres Wissens noch nicht behandelt worden. G. Fouret dagegen hat gezeigt[1]), daß es Kurven gibt, die ihre eigenen Polaren in bezug auf ∞^1 Kegelschnitte sind; solche spezielle Kurven sind die interszendenten Parabeln, denen wir in Nr. **127** begegneten, und die wir ex professo im folgenden Abschnitte (Bd. II) untersuchen werden.

157. In der Geschichte der geometrischen Transformationen folgt auf die Theorie der projektiven Transformationen (kollineare oder reziproke) der Zeitfolge nach das Studium der Transformation durch reziproke Radien oder der Inversion; demnach folgt auf die in sich selbst durch Kollineation oder Reziprozität transformierten Kurven (mit denen wir uns im Vorigen beschäftigt haben) naturgemäß die

1) S. die Note *Sur les courbes planes ou surfaces qui sont leurs propres polaires reciproques par rapport à une infinité des coniques ou surfaces du second ordre* (Bull. Soc. Philom., Paris 1878).

Betrachtung der Kurven, die durch eine Inversion in sich selbst transformiert werden. Es sind dies diejenigen Kurven, die — nach der von T. Moutard vorgeschlagenen Benennung[1]) — anallagmatische Kurven genannt werden, eine Bezeichnung, die (von α privans und *ἀλλάττω*, ich ändere, hergeleitet) ein wenig unbestimmt ist.

Es sei $\mathfrak{J}$ eine Inversion, die durch den Kreis Ω mit dem Zentrum O und dem reellen oder rein imaginären Radius r, bestimmt ist[2]). Es gibt dann ∞^2 Kreise K rechtwinklig zu Ω; jeder ist bekanntlich anallagmatisch. Durch einen beliebigen Punkt M der Ebene gehen ∞^1 Kreise K; alle diese gehen dann auch durch den Punkt $\mathfrak{J}(M)$, der durch die Transformation $\mathfrak{J}$ aus M entsteht[3]); durch zwei beliebige Punkte der Ebene (in endlicher oder unendlich kleiner Entfernung) geht dagegen nur ein einziger bestimmter Kreis K.

Ist nun Γ eine reelle Kurve, anallagmatisch in bezug auf die Inversion $\mathfrak{J}$, P einer ihrer Punkte und t die bezügliche Tangente, so gibt es einen Kreis K, der die Gerade t im Punkte P berührt. Da nun sowohl Γ als auch K anallagamatisch sind, so entspricht dem Punkte P ein anderer Punk $\mathfrak{J}(P)$, der K und Γ gemeinsam ist und da die Inversion eine Berührungstransformation ist, so berühren sich Γ und K auch in $\mathfrak{J}(P)$. K ist also ein Kreis, der Γ zweifach berührt; variieren wir P, so nimmt K ∞^1 Lagen an, dabei wird sein Mittelpunkt eine gewisse Kurve Δ beschreiben; nach einem Vorschlage von de la Gournerie heißt sie die Deferente, sie ist algebraisch, wenn Γ es ist; ihre Ordnung wollen wir im folgenden mit n bezeichnen. Wir können dann sagen: **Jede anallagmatische Kurve kann als Enveloppe der ∞^1 Lagen eines zu einem festen Kreis orthogonalen Kreises, dessen Zentrum eine gegebene Kurve durchläuft, angesehen werden.** Umgekehrt ist klar, daß, wie auch immer man die Deferente und den gegebenen Kreis wählt, man jedesmal als Enveloppe eine anallagmatische Kurve erhält. Nicht ausgeschlossen ist, daß der Radius von Ω gleich Null ist; alle Kreise K gehen dann durch O. Wenn wir im allgemeinen Falle zwei aufeinanderfolgende Punkte von Δ, D_1 und D_2 betrachten sowie die zugehörigen Kreise K_1 und K_2, so schneiden sich diese in zwei Punkten P und Q von Γ, die symmetrisch zueinander in bezug auf die Gerade $D_1 D_2$ liegen,

1) *Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques* (Nouv. Ann. Math. 2. Sér. III, 1864). — Für das Folgende s. besonders J. de la Gournerie, *Mémoires sur les lignes spiriques* (Liouvilles Journ., 2. Ser. IV, 1869). Andere wichtige Betrachtungen sind von Ribaucour gemacht in der *Mémoire sur les courbes enveloppes de cercles et sur les surfaces enveloppes de sphères* (Nouv. Corr. math. V, 1879, und VI, 1880) und in der Note von Liguine, *Sur les aires des courbes anallagmatiques* (Bull. Sc. math, 2. Sér. V, 1881).

2) Man nennt ihn den Inversions-Kreis.

3) Wir bezeichnen im allgemeinen mit $\mathfrak{J}(\Phi)$ das, was man erhält, wenn man auf die Figur Φ die Inversion $\mathfrak{J}$ anwendet.

welche ja eine Tangente von $\varDelta$ ist; folglich: **Die Strecke zwischen zwei korrespondierenden Punkten einer anallagmatischen Kurve wird durch die entsprechende Tangente der Deferente senkrecht halbiert.**

Die Kreise K bilden ein einfach unendliches System, auf welches man die Chaslessche Methode der Charakteristiken anwenden kann; wir nennen daher μ die Zahl der Kreise K, die durch einen beliebigen Punkt der Ebene gehen, ν die Anzahl derer, die eine beliebige Gerade berühren, α die Zahl der als Hüllkurven in ein Punktepaar degenerierten Kreise K und β die Zahl der als Ortkurven in ein Geradenpaar degenerierten. Um diese vier Zahlen zu bestimmen, genügt es, zwei direkt zu bestimmen und dann die bekannten Formeln von Chasles anzuwenden:

$$2\mu - \nu = \alpha, \quad 2\nu - \mu = \beta.$$

Man findet nun μ auf folgende Weise: Alle Kreise K, die durch M gehen, gehen auch durch $\mathfrak{I}(M)$; ihre Mittelpunkte liegen daher auf der Geraden r, die die von M und $\mathfrak{I}(M)$ begrenzte Strecke senkrecht halbiert; anderseits gehören ihre Mittelpunkte auch der Kurve $\varDelta$ an, sie sind daher nichts anderes, als die Schnitte von r mit $\varDelta$; das beweist uns, daß $\mu = n$. Um β zu finden, beachten wir, daß, wenn F einer der $2n$ Schnittpunkte von Γ und Ω ist, die Verbindungslinien Γ mit den Kreispunkten der Ebene einen degenerierten Kreis des Systems bilden; wenn dann U einer der n unendlichfernen Punkte der Kurve Γ ist, so bilden der zu OU senkrechte Durchmesser von Ω und die unendlich ferne Gerade einen ferneren degenerierten Kreis des Systems; es ist leicht einzusehen, daß es weitere nicht gibt; demnach ist $\beta = 3n$. Setzen wir nun die für μ und β gefundenen Werte in die vorigen Gleichungen ein, so folgern wir, daß $\nu = 2n$ ist (also doppelt so groß als die Ordnung der Deferente), und daß $\alpha = 0$.

Aus der zur Bestimmung von β gemachten Überlegung ergeben sich zu gleicher Zeit folgende beiden Eigenschaften der anallagmatischen Kurve Γ: **Die $2n$ Schnittpunkte von Γ mit der Peripherie von Ω sind Brennpunkte der Kurve; die durch den Mittelpunkt von Ω rechtwinklig zu den Asymptoten der Deferente gezogenen Geraden sind ebensoviele Doppeltangenten der anallagmatischen Kurve.**

Im allgemeinen geht Γ nicht durch den Mittelpunkt O von Ω, daher schneidet jede durch O gezogene Gerade r sie in einer gewissen Anzahl von Punktepaaren M und $\mathfrak{I}(M)$; da die Gerade, welche die Verbindungslinie dieser beiden senkrecht halbiert, Tangente an $\varDelta$ ist, so ist die Zahl dieser Punktepaare gleich der Zahl der zu r senkrechten Tangenten von $\varDelta$, d. h. gleich der Klasse von $\varDelta$. Wir sind also zu dem Schlusse berechtigt: **Die Ordnung einer anallagmatischen Kurve ist im allgemeinen doppelt so groß, als die Klasse ihrer Deferente.**

Betrachten wir noch einen durch O gehenden Kreis $\varDelta$, so wird dieser die Kurve $\varGamma$ in einer gewissen Zahl x von reellen Punkten X schneiden. Wir führen nun auf die ganze Figur die gegebene Inversion aus. $\varDelta$ wird sich dann in eine Gerade l und $\varGamma$ in sich selbst transformieren; daher werden die Punkte $\mathfrak{J}(X)$ die Schnitte von l und $\varGamma$ sein; x ist also gleich der Ordnung von $\varGamma$, d. h. gleich dem Doppelten der Klasse der Deferente. Andererseits ist die Gesamtzahl der Schnitte von $\varGamma$ und $\varDelta$, da sie doppelt so groß als die Ordnung von $\varGamma$ ist, gleich dem Vierfachen der Klasse der Deferente; folglich: **Eine reelle anallagmatische Kurve geht durch jeden der Kreispunkte der Ebene so oft, als die Klasse ihrer Deferente dies angibt.** Es ist leicht einzusehen, daß die bezüglichen Tangenten auch die Deferente berühren, in der Art, **daß die Brennpunkte der Deferente singuläre Brennpunkte der anallagmatischen Kurve sind.** — Die anallagmatische Kurve kann auch vielfache Punkte haben; sie entsprechen den eventuellen vielfachen Tangenten der Deferente paarweise. Wenn diese eine Kurve von der allgemeinen Klasse N ist, so bestimmt sie mit dem Kreise Ω eine allgemeine anallagmatische Kurve $\varGamma$ von der Ordnung $2N$; diese Kurve $\varGamma$ hängt daher von $\frac{N(N+3)}{2}+3$ Konstanten ab, kann daher durch ebensoviele beliebige Punkte der Ebene hindurchgehen; die Gleichung einer solchen Kurve kann immer in die Form gebracht werden $F(f_1, f_2, f_3) = 0$, wo F eine ternäre Form vom Grade N und $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $f_3 = 0$ die Gleichungen dreier Kreise sind, die nicht demselben Büschel angehören und deren Orthogonalkreis der Inversionskreis von $\varGamma$ ist.

In dem Falle, den wir bis jetzt ausgeschlossen haben, daß die Deferente die unendlich ferne Gerade berührt, vermindert sich die Ordnung der anallagmatischen Kurve um eine Einheit und die Kurve geht dann durch den Pol der Inversion; wenn aber die Berührung zweiter Ordnung ist, so beträgt die Verminderung zwei Einheiten; demnach kann man sagen: **Die Ordnung der anallagmatischen Kurve ist gleich der doppelten Klasse der Deferente vermindert um die Zahl der Berührungen, welche diese mit der unendlich fernen Geraden hat, und vermindert um die doppelte Anzahl ihrer Inflexionstangenten, die mit der Geraden selbst zusammenfallen.** Die übrigen vorhergehenden Sätze erleiden infolgedessen Modifikationen, die der Leser auch leicht ohne unsere Hilfe finden dürfte.

$\varGamma$ sei wiederum eine anallagmatische Kurve; sie wird die Enveloppe von ∞^1 Kreisen K sein, die senkrecht zu einem Kreise Ω sind. Wir wenden auf dieses System eine beliebige Inversion $\overline{\mathfrak{J}}$ an; es entsteht dann ein System von ∞^1 Kreisen $\overline{\mathsf{K}}$, die alle orthogonal zu einem Kreise $\overline{\Omega}$ sind (dem Transformierten von Ω) und deren Enveloppe eine anallagmatische Kurve $\overline{\varGamma}$ ist; da nun $\overline{\varGamma}$ dasselbe ist, als

was man erhält, wenn man Γ der Inversion $\overline{\mathfrak{J}}$ unterwirft, so ist klar: **Transformiert man eine anallagmatische Kurve durch reziproke Radien, so erhält man eine andere Kurve derselben Art.** — Machen wir hiervon sogleich eine Anwendung: Eine orthogonale Symmetrie S in bezug auf eine Achse a kann als eine Grenzform der Inversion aufgefaßt werden; der feste Kreis hat als Peripherie die Achse a und als Zentrum den unendlich fernen Punkt in der zu a senkrechten Richtung; daraus folgt: **Transformiert man eine Kurve, die in bezug auf eine Achse rechtwinklig symmetrisch ist, durch reziproke Radien, so erhält man eine anallagmatische Kurve.** Verfährt man in derselben Weise mit einer Kurve, die mehrfache rechtwinklige Symmetrien in bezug auf mehrere durch einen Punkt gehende Achsen besitzt, so gelangt man zu einer Kurve, die in bezug auf mehrere Kreise desselben Büschels anallagmatisch ist[1]).

158. Die Untersuchung der anallagmatischen Kurven kann noch von einem anderen Gesichtspunkte aus in Angriff genommen werden, der wert ist hervorgehoben zu werden, da er uns zu neuen Resultaten führt. Erinnern wir uns nämlich[2]), daß, wenn man eine reelle Kurve Γ von der Ordnung n, die den Pol und die imaginären Kreispunkte I und J als vielfache Punkte von den Ordnungen bzw. ω, ι, ι, hat, einer Inversion $\mathfrak{J}$ unterzieht, ihr eine Kurve Γ' von der Ordnung $n' = 2n - (\omega + 2\iota)$ entspricht, für welche O, I, J vielfach sind bzw. nach $\omega' = n - 2\iota$, $\iota' = n - (\omega + \iota)$; nun ist klar, daß, damit Γ anallagmatisch in bezug auf $\mathfrak{J}$ sei, $n' = n$, $\omega' = \omega$, $\iota' = \iota$ sein muß; alle diese Bedingungen werden aber erfüllt, wenn man $n = \omega + 2\iota$ setzt. — Geben wir dem ω einen beliebigen Wert p, gerade oder ungerade, jenachdem n es ist, so entsteht eine Kurve Γ' von der n^{ten} Ordnung, die O als p-fachen und die Kreispunkte als $\frac{n-p}{2}$-fache Punkte hat; sie wird von der unendlich fernen Geraden in p weiteren Punkten geschnitten. Ist P einer derselben, so entspricht diesem der dem O unendlich nahe Punkt auf OP, welcher Punkt, wenn Γ anallagmatisch ist, zu Γ selbst gehören muß; dies besagt, wenn Γ eine anallagmatische Kurve ist, die p Geraden OP sind nichts anderes, als die in O berührenden Geraden. Z. B.: wenn n gerade ist und wir nehmen $p = 0$, so erhalten wir Kurven n^{ter} Ord-

1) Außer dieser Kurve, die anallagmatisch in bezug auf eine endliche Zahl von Inversionen ist, gibt es eine, nämlich den Kreis, der offenbar anallagmatisch in bezug auf ∞^2 Inversionen ist; daß es deren keine gibt, die anallagmatisch in bezug auf ∞^1 sind, hat G. Fouret bewiesen in der Abhandlung *Recherche d'une courbe plane possédant un lieu géométrique de pôles principales d'inversion* (Nouv. Ann. Math. 3e Sér. II, 1883).

2) Man s. z. B. Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Paris, 1873) S. 2.

nung, welche die Kreispunkte der Ebene als $\frac{n}{2}$-fache Punkte haben: sie gehören zur Klasse der isotropischen Kurven[1]). Wenn man, bei beliebigem n, $p = n - 2$ nimmt, so erhält man[2]) eine Kurve n^{ter} Ordnung mit einem $(n-2)$-fachen Punkte, die durch die Kreispunkte und durch die $n-2$ unendlich fernen Punkte der Geraden geht, welche die Kurve im Punkte O berühren. Eine solche Kurve auf ein orthogonales Koordinatensystem mit dem Ursprung O bezogen, hat eine Gleichung von folgender Form

$$(x^2+y^2)f_{n-2}(x,y) + f_{n-1}(x,y) + R^2 f_{n-2}(x,y) = 0,$$

wo f_{n-1}, f_{n-2} binäre Formen in x, y sind vom Grade $n-1$ und $n-2$ und R eine Konstante ist. Beim Übergang zu Polarkoordinaten wird diese

$$\varrho^2 f_{n-2}(\cos\omega, \sin\omega) + \varrho f_{n-1}(\cos\omega, \sin\omega) + R^2 f_{n-2}(\cos\omega, \sin\omega) = 0.$$

Wenn man also mit ϱ_1, ϱ_2 zwei Werte von ϱ bezeichnet, welche demselben Werte von ω entsprechen, so hat man $\varrho_1 \cdot \varrho_2 = R^2$, was bestätigt, daß die genannte Kurve durch eine Inversion mit dem Zentrum O und der Potenz R^2 in sich selbst transformiert wird; im Falle $p = n-2$ sind die vorhin gefundenen Bedingungen demnach nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, damit die Kurve anallagmatisch sei. Alle Kurven n^{ter} Ordnung, die mit den vorhin beschriebenen Eigentümlichkeiten versehen sind, sind folglich anallagmatisch. Die entsprechenden Kurven sind Deferenten von der Klasse $n-1$, welche die unendlich ferne Gerade zur $(n-2)$-fachen Tangente haben; jede besitzt im allgemeinen $2(n-3)(n-4)$ Doppelpunkte, $3(n-3)$ Spitzen und ist daher von der Ordnung $2(n-2)$.

159. Die isotropischen Kurven der vorigen Nr. sind Spezialfälle der s-fach zyklischen Kurven von F. P. Ruffini[3]); man gebraucht diesen Namen, um die Kurven n^{ter} Ordnung zu bezeichnen, deren Schnitte mit der unendlich fernen Geraden aus den Kreispunkten und noch $n-2s$ anderen Punkten bestehen, also Kurven, die in kartesischen Koordinaten eine Gleichung haben, deren Glieder höchster Ordnung in einer binären Form vom Grade $n-2s$ in x, y das Produkt $(x^2+y^2)^s$ sind. Derartige Kurven ergeben sich bei der Lösung folgender Frage: „Gibt es, außer dem Kreise, noch Kurven, die sich

---

1) *Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques* (Paris 1893) S. 51, nach einem Vorschlage von M. d'Ocagne (Journ. math. spéc. 3. Sér., I, S. 125) so benannt; E. Ciani in der S. 423 angef. Abh. (*Le linee diametrali etc.*) zog den Namen hypercyklische Kurven vor.

2) H. Piquet, *Sur une nouvelle espèce de courbes et de surfaces anallagmatiques* (C. R. LXXXVII, 1878).

3) *Delle curve piane algebriche che hanno potenza in rispetto a ogni punto del loro piano, ovvero in rispetto ad alcuni dei loro proprii punti* (Mem. Acc. Bologna 4. Ser. X, 1890); *Della lemniscata* (Rendic. Acc. Bologna 1907).

der Besonderheit erfreuen, daß das Produkt aus den Abständen eines beliebigen festen Punktes ihrer Ebene von den auf einem beliebigen durch den festen Punkt gezogenen Strahl, gelegenen Schnittpunkten für alle solche Strahlen konstant ist?“[1]). Dieses Problem, welches Euler schon 1748 untersucht hat[2]), und A. Mannheim neuerdings wieder aufgestellt hat[3]), wurde im Jahre 1869 von J. Petersen gelöst[4]), und mehr als 20 Jahre später, ohne daß er die bezügliche Arbeit des dänischen Mathematikers kannte, in einer noch vollständigeren Weise von F. P. Ruffini[5]): die von dem letzteren befolgte Methode, um zu den sog. Potenzkurven zu gelangen, ist zu einfach und elementar, als daß sie hier nicht Platz finden sollte.

Es sei
$$f(x, y) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (6)$$
die Gleichung von Γ, einer der verlangten Kurven, und es sei:
$$\sum_{r=0}^{r=n} a_r x^{n-r} \cdot y^r$$
der Komplex ihrer Glieder höchster Ordnung. $O(x_0, y_0)$ sei der feste Punkt, von welchem aus man die Transversalen zieht; setzt man nun in (6) ein
$$x = x_0 + \varrho \cos \omega; \quad y = y_0 + \varrho \sin \omega,$$
so erhält man eine Gleichung n^{ten} Grades in ϱ, deren Wurzeln $\varrho_1 \varrho_2 \dots, \varrho_n$ sein mögen; damit nun Γ in bezug auf O die Potenz π habe, ist notwendig und hinreichend, daß das Produkt
$$\pi = \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \varrho_3 \cdot \dots \cdot \varrho_n$$
einen von ω unabhängigen Wert habe. Setzt man nun zur Abkürzung
$$\cos \omega = \alpha, \quad \sin \omega = \beta,$$
so hat man
$$f(x, y) = f(x_0 + \varrho \cdot \cos \omega,\ y_0 + \varrho \cdot \sin \omega) = f(x_0 + \varrho \alpha,\ y_0 + \varrho \beta).$$
Entwickelt man nun nach dem Taylorschen Satze und wendet allgemein bekannte Bezeichnungen an, so wird Gleichung (3) zu
$$f(x_0, y_0) + \frac{\varrho}{1}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)_0 + \frac{\varrho^2}{2!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)_0^{(2)}$$
$$+ \dots \frac{\varrho^n}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)_0^{(n)} = 0 \quad \dots\dots \quad (7)$$

1) Indem man die gebräuchliche Steinersche Bezeichnung erweitert, kann man jenes konstante Produkt die Potenz des festen Punktes in bezug auf eine Kurve nennen und Potenzkurven jene Kurven, welche die genannte Eigenschaft haben.

2) *Introductio in analysin infinitorum II* (Lausannae, 1748), S. 226.

3) *Intermédiaire* III, 1896, S. 274.

4) S. den Aufsatz *Om et punkts potens met hensyn til en curve* (Tidskrift, 2. Ser. V, 1869).

5) S. die erste in Note 3 auf S. 433 zitierte Abhandlung.

Daraus folgt nun

$$\pi = (-1)^n \frac{f(x_0, y_0)}{\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)_0^{(n)}}.$$

Der Zähler dieses Bruches ist, wie man sieht, unabhängig von ω; damit dies auch für den Bruch selbst eintrete, muß sein

$$\frac{d}{d\omega}\cdot\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)_0^{(n)} = 0,$$

oder

$$\frac{d}{d\omega}\sum_{r=0}^{r=n} a_r \alpha^{n-r}\cdot\beta^r = 0,$$

oder endlich

$$\sum \{(n-r+1)\,a_{r-1} - (r+1)\,a_{r+1}\}\,\alpha^{n-r}\cdot\beta^r = 0.$$

Damit diese Beziehung für alle Werte von α und β gültig sei, müssen folgende $n+1$ Relationen bestehen:

$$(n-r+1)\,a_{r-1} = (r+1)\,a_{r+1} \quad (r = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots n),$$

wobei zu bemerken ist, daß $a_{-1} = a_{n+1} = 0$. Es ist nun notwendig folgende beiden Fälle zu unterscheiden:

I. Wenn $n = 2p$, so findet man, wenn man in (7) der Reihe nach $r = 0, 2, \ldots 2p-2$ setzt, $\alpha_1 = \alpha_3 = \ldots\ldots = \alpha_{2p-1} = 0$; setzt man hingegen $r = 1, 3, \ldots\ldots, 2p-1$, so bekommt man

$$p a_0 = 1\cdot a_2,\quad (p-1)\,a_2 = 2\cdot a_4,\ \ldots\ldots,\quad (p-k)\,a_{2k} = (k+1)\,a_{2k+2},$$
$$\ldots\ldots 1\cdot a_{2p+2} = p\cdot a_{2p},$$

daher im allgemeinen

$$a_{2k+2} = \binom{p}{k+1} a_0; \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (8)$$

man schließt daraus, daß

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)_0^{(n)} = \sum_{r=0}^{r=n} a_r\alpha^{n-r}\beta^2 = a_0(\alpha^2+\beta^2)^n = a_0;$$

daher ist

$$\pi = (-1)^n \frac{f(x_0, y_0)}{a_0},$$

welche Größe tatsächlich unabhängig von ω ist. Nun lassen die vorhin für die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots\ldots$ gefundenen Werte erkennen, daß die Glieder höchsten Grades in den Koeffizienten der Kurve $f = 0$, abgesehen von dem Faktor a_0, die Potenz $(x^2+y^2)^p$ bilden, weshalb f die Form hat $(x^2+y^2)^p + F(x, y) = 0$, wo F ein Polynom von niederem Grade als $2p$ ist. Wir sind daher in der Lage zu schließen: **Die Kurven gerader Ordnung $2p$, die eine Potenz in bezug auf jeden Punkt ihrer Ebene haben, sind p-fach zirkulare Kurven**; und um-

gekehrt: **Alle Kurven gerader Ordnung die außer den Kreispunkten keine unendlich fernen haben, sind Potenzkurven.**

II. Wenn $n = 2p + 1$, und man nimmt in (8) zunächst $r = 0, 2, 4, \ldots.$, dann $r = 2p+1,\ 2p-1,\ 2p-3, \ldots\ldots$, so sieht man, daß alle Koeffizienten $a_r = 0$ sind; **folglich gibt es keine Kurven ungerader Ordnung, die eine Potenz in bezug auf alle Punkte ihrer Ebene haben.**

Bisher haben wir angenommen, daß der feste Punkt O der Kurve selbst nicht angehöre. In diesem Falle, $f(x_0, y_0) = 0$, hat die Gleichung (4) eine Wurzel $\varrho = 0$, und als Potenz von O erhält man die Größe:

$$\pi = \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdots \varrho_{n-1} = (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)_0^{(1)}}{\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\beta\right)_0^{(n)}},$$

wenn diese unabhängig von ω ist; dies tritt tatsächlich ein, wenn O ein Doppelpunkt ist, weil dann $\pi = 0$. Diesen trivialen Fall ausgeschlossen, sieht man, nach einer einfachen Diskussion, daß diese Tatsache nur dann eintritt, wenn Γ alle Glieder höchsten Grades verliert; dies führt zu dem Schlusse, **daß es keine algebraischen Kurven gibt, die in bezug auf alle ihre Punkte eine Potenz haben.** Dennoch gibt es Kurven, die in bezug auf einige ihrer Punkte eine Potenz haben; so hat Ruffini — mit Beweisen der Art, wie die hier angeführten — gezeigt: **Jede Kurve von der Ordnung $2p+1$, die p-fach zirkular ist, hat eine Potenz in bezug auf die Berührungspunkte der Tangenten, die man an sie von dem einzigen reellen Punkte, den sie auf der unendlich fernen Geraden besitzt, ziehen kann.**

Man kann nach dem Orte der Punkte P der Ebene fragen, die in bezug auf eine gegebene Potenzkurve die gleiche Potenz haben; P wird dann eine Kurve durchlaufen, die wir nach H. Wieleitner[1]) Kurve gleicher Potenz nennen wollen; ihre Betrachtung läßt uns neue Beziehungen zwischen verschiedenen Linien entdecken; so erscheinen die spirischen Linien (Nr. 61) als Kurven gleicher Potenz der Boothschen Lemniskaten (Nr. 65) und die Cartesischen Ovale (Nr. 78) als ebensolche Kurven für die Pascalsche Schnecke (Nr. 70).

160. Wir wollen dieses Kapitel — welches wie das vorige hauptsächlich solchen Kurven gewidmet ist, die aus der Theorie spezieller geometrischer Transformationen hervorgehen — nicht abschließen, ohne zuvor einen Hinweis auf die Richtungs-Kurven (courbes de direction) zu geben, zu denen E. Laguerre im Verlauf seiner Untersuchungen

---

1) *Über einige Zusammenhänge zwischen speziellen Quartiken* (Wiener Sitzungsber. CXVI, Abt. IIa, 1907).

über die „Direktionsgeometrie"[1]) gelangte, und die man sämtlich als Antikaustiken (vgl. Kap. 7 des VII. Abschnittes) algebraischer Kurven betrachten kann, wenn die auffallenden Strahlen als parallel angenommen werden[2]). Wenn $\omega(x, y) = 0$ die Gleichung einer algebraischen Richtungskurve ist, so kann man die Kosinus der Richtungen der Tangenten in einem ihrer Punkte vermittelst rationaler Funktionen der Koordinaten des Berührungspunktes ausdrücken[3]). Wenn s der Bogen der Kurve ist, so sind diese Kosinus gegeben bzw. durch

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2}}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)^2}};$$

damit also $\omega(x, y) = 0$ eine Richtungskurve sei, ist notwendig und hinreichend, daß eine der beiden Größen $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$ eine rationale Funktion von x, y sei[4]).

Nun hat P. Appell[5]) eine Methode ersonnen, aus der Gleichung einer Richtungskurve

$$F(X, Y) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

die von unzählig vielen anderen abzuleiten: sie besteht in folgendem:

Man bezeichne mit S den Bogen der Kurve (9) und mit R eine rationale Funktion. Wegen der gemachten Annahme, daß (9) eine Richtungskurve sei, können wir schreiben

$$dS = R(X, Y) \cdot dX. \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

---

1) *Sur la géométrie de diréction* (Bull. Soc. math. France, VIII, 1880; *Œuvres de Laguerre* II, S. 592 ff.). Die Tangentialgleichung solcher Kurven, im Falle daß alle Brennpunkte im Endlichen liegen, ist von der Form

$$\Phi_n(u, v) - (u^2 + v^2) F_{n-2}(u, v) = 0,$$

wo Φ_n und F_{n-2} binären Formen der Grade n und $n - 2$ in u, v sind.

2) Laguerre, *Sur les anticaustiques par réflexion de la parabole, les rayons incidents étant parallèles* (Nouv. Ann. Math. 2e Sér. II, 1883; *Œuvres*, II S. 636).

3) Dieser Eigenschaft verdanken die Richtungskurven ihre Wichtigkeit bei der Untersuchung der algebraisch rektifizierbaren Kurven, d. h. solcher, deren Bogen durch eine algebraische Funktion der Koordinaten ausgedrückt werden kann. Vgl. G. Humbert, *Sur les courbes algébriques planes rectificables* (Liouvilles Journ. 4e Sér. IV, 1888).

4) E. Köstlin hat eine geistvolle Methode vorgeschlagen zur *Erzeugung einer speziellen Gattung von Richtungskurven mit Hilfe der rationalen Kurven dritter Ordnung, deren Doppelpunkt im Endlichen liegt* (Württemberg. Mitt., II. Ser., IX, 1907). Ist nämlich Γ eine Kurve 3. Ordnung mit dem Doppelpunkt O, und **K** ein Kreis, welcher durch O geht und Γ in einem veränderlichen Punkte P berührt, so schneidet **K** die Kurve Γ noch in zwei Punkten, deren Verbindungslinie eine Richtungsklasse einhüllt; ihre Klasse ist eine der Zahlen 4, 6, 8, und ihre Ordnung der Reihe nach 5 oder 3, 8 oder 6, 11 oder 9.

5) *Exercises sur les courbes de direction* (Nouv. Ann. math. 2e Sér. XV, 1896).

Man betrachte auch eine rationale Funktion Ω von $z = x + iy$, die der Bedingung genügt, daß alle die Residuen von $\Omega^2(z)$ gleich Null sind. Dann wird $\int \Omega^2(z) \cdot dz$ eine rationale Funktion von z sein, und wir dürfen setzen

$$Z = X + iY = \int \Omega^2(z) \cdot dz = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Die Formeln

$$X = \varphi(x, y), \qquad Y = \psi(x, y)$$

bestimmen dann in der Ebene eine Korrespondenz zwischen den Punkten (x, y) und (X, Y). Wir behaupten nun, daß diese die Kurve (9) in eine andere Richtungskurve

$$f(x, y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

transformiere. Da nämlich $dX + i \cdot dY = \Omega^2(z)(dx + i \cdot dy)$, so haben wir ferner $dX - i \cdot dY = \overline{\Omega(z)}^2 \cdot (dx - i \cdot dy)$, wo $\overline{\Omega(z)}$ die zu $\Omega(z)$ konjugiert imaginäre Größe ist. Multiplizieren wir diese beiden Beziehungsgleichungen, benutzen die Gleichungen (10) und bezeichnen mit s den Bogen der Kurve (11), so ergibt sich:

$$ds = \frac{R(X, Y)}{\Omega(z) \cdot \overline{\Omega(z)}} \cdot dX.$$

Da aber $X = \varphi(x, y)$, $Y = \psi(x, y)$, $\Omega(x + iy)$, $\overline{\Omega(x + iy)}$ rationale Funktionen von x, y sind, so ist es auch der Koeffizient von dX in dieser Gleichung; da außerdem

$$dX = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0,$$

so ist auch $\frac{dX}{dx}$ eine rationale Funktion von x, y; die vorige Beziehung kann aber in der Form geschrieben werden

$$ds = r(x, y) \cdot dx,$$

wo r eine neue rationale Funktion bedeutet. Dies genügt zum Nachweise, daß die Gleichung (11) eine Richtungskurve darstellt.

Wenden wir diese Methode auf ein Beispiel an. Bedeutet k eine ganze Zahl und setzen wir $\Omega(z) = \sqrt{2k+1} \cdot z^k$, dann wird

$$\int \Omega(z)^2 dz = z^{2k+1} = \varrho^{2k+1}\{\cos(2k+1)\omega + i \sin(2k+1)\omega\};$$

so daß die anzuwendende Transformation ist:

$$X = \varrho^{2k+1} \cos(2k+1)\omega, \qquad Y = \varrho^{2k+1} \sin(2k+1)\omega.$$

Wenden wir diese auf die Gerade $X = a^{2k+1}$ an — die offenbar eine Richtungskurve ist — so erhalten wir die durch folgende Gleichung

$$\varrho^{2k+1} \cos(2k+1)\omega = a^{2k+1}$$

dargestellte andere Richtungskurve, die, wie wir in kurzem sehen werden, eine Sinusspirale ist (s. Kap. 18 dieses Abschn.)[1]).

1) Dies wurde zum erstenmal von G. Humbert bemerkt (*Sur le theorème*

Fünfzehntes Kapitel.

Geometrie der Polynome.

161. Die geometrische Darstellung komplexer Zahlen durch die Punkte einer Ebene führt zu der Betrachtung verschiedener algebraischer Kurven und gestattet deren Untersuchung. Diese Kurven verdienen wegen ihres engen Zusammenhanges mit der Lehre von den isogonalen Transformationen den in den vorigen Kapiteln behandelten an die Seite gestellt zu werden; ihr Zusammenhang mit der Betrachtung der Polynome veranlaßt uns, sie als ein besonderes Kapitel der Wissenschaft der Ausdehnung zu behandeln, welches wir, dem Beispiele F. Lucas folgend, „Geometrie der Polynome“ betiteln.

Es sei

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

ein vollständiges Polynom der Variabelen $z = x + iy$, dessen Koeffizienten wir der Allgemeinheit wegen als beliebige komplexe Zahlen annehmen. Trennen wir den reellen Teil des $f(z)$ von dem rein imaginären, so können wir schreiben

$$f(z) = P(x, y) + i\,Q(x, y);$$

P und Q sind dann Polynome vom n^{ten} Grade in x, y mit reellen Koeffizienten; wenn wir daher x und y als rechtwinklige kartesische Koordinaten interpretieren, so stellen die Gleichungen

$$P(x, y) = 0, \qquad Q(x, y) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

zwei Kurven n^{ter} Ordnung dar, die sich in n reellen Punkten schneiden werden, nämlich den n Wurzel-Punkten der Gleichung $f(z) = 0$. — Die Einführung solcher Kurven in die Wissenschaft geht auf das Ende des 18. Jahrhunderts zurück, indem gerade aus der Untersuchung ihrer Eigenschaften Gauß die Elemente seines ersten Beweises für den Fundamentalsatz der Theorie der algebraischen Gleichungen herleitete[1]) und fünfzig Jahre darauf sich ihrer bediente bei dem vierten seiner Beweise für denselben Satz[2]). Die Untersuchung

---

d'Abel et quelquesunes de ses applications, Liouvilles Journ. 4e Sér. III, 1887, S. 395) als er die zirkularen Richtungskurven untersuchte, d. h. solche, die durch die beiden unendlich fernen Kreispunkte gehen.

1) *Demonstratio novae theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi resolvi posse* (Inaug.-Dissert. Helmstedt, 1799).

2) *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen* (Götting. Abhandlungen IV, 1850).

der Eigenschaften dieser Kurven jedoch wurde von W. Walton[1]) vor etwa 50 Jahren unternommen und größtenteils ausgebaut; ihm verdankt man den Namen Wurzel-Kurven (rhizic curves), mit dem sie bezeichnet zu werden pflegen. Neuerdings wurden sie von E. Kanser erforscht[2]), der sie algebraic potential curves nannte, da man, wie bekannt, $\varDelta_2 P = 0$ und $\varDelta_2 Q = 0$ hat.

Sind τ_P und τ_Q die von den Tangenten an die Kurven (1), in einem ihrer gemeinsamen Punkte $M(x, y)$, gebildeten Winkel, so wird sein:

$$\operatorname{tg} \tau_P = -\frac{\partial P}{\partial x} : \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad \operatorname{tg} \tau_Q = -\frac{\partial Q}{\partial x} : \frac{\partial Q}{\partial y},$$

und da man bekanntlich hat

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 0, \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

so ergibt sich, daß

$$\operatorname{tg} \tau_P \cdot \operatorname{tg} \tau_Q + 1 = 0 .$$

Diese Gleichung beweist: **Die beiden Kurven $P = 0$, $Q = 0$ schneiden sich in allen Punkten, die sie gemeinsam haben, unter rechtem Winkel.**

Differenzieren wir die Gleichungen (2), so ergeben sich daraus leicht die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^{2r} P}{\partial x^{2\alpha} \cdot \partial y^{2r-2\alpha}} &= (-1)^{\alpha} \frac{\partial^{2r} P}{\partial x^{2r}} \\
\frac{\partial^{2r} Q}{\partial x^{2\alpha} \cdot \partial y^{2r-2\alpha}} &= (-1)^{\alpha} \frac{\partial^{2r} Q}{\partial x^{2r}} \\
\frac{\partial^{2r} P}{\partial x^{2\alpha+1} \cdot \partial y^{2r-2\alpha-1}} &= (-1)^{\alpha} \frac{\partial^{2r} Q}{\partial x^{2r}} \\
\frac{\partial^{2r} Q}{\partial x^{2\alpha+1} \cdot \partial y^{2r-2\alpha-1}} &= (-1)^{\alpha+1} \frac{\partial^{2r} P}{\partial x^{2r}}
\end{aligned}\right\}, \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

von denen wir alsbald Gebrauch machen werden. Wir nehmen einmal an, daß $M(x, y)$ ein $2r$-facher Punkt der Kurve $P = 0$ sei; die Winkel ϑ_P, welche die zugehörigen Tangenten mit der x-Achse bilden, werden durch eine Gleichung bestimmt, die man symbolisch folgendermaßen wiedergeben kann:

$$\left(\cos \vartheta_P \frac{\partial}{\partial x} + \sin \vartheta_P \frac{\partial}{\partial y}\right)^{2r} P(x, y) = 0,$$

---

1) Man sehe die Aufsätze *Note on the rhizic curves, On the spoke asymptotes of rhizic curves,* und *On the curvature of rhizic curves at multiples points* (Quarterly Journ. Mathem. XI, 1871). Über denselben Gegenstand kann man nachsehen: T. Bond Sprague, *On the nature of the curves whose intersections give the imaginary roots of an algebraic equation* (Edinburgh. Trans. XXX, T. II, 1883).

2) *On the algebraic potential curves* (Bull. Amer. math. Soc., II Ser., VII, 1901).

wenn man darunter versteht, daß, wenn die Potenz dieses Binoms entwickelt ist, man im allgemeinen $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^q P(x, y)$ ersetzt durch $\frac{\partial^{p+q} P(x,y)}{\partial x^p \cdot \partial y^q}$. Demnach ist jene Gleichung in Wirklichkeit äquivalent mit folgender anderen:

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=r} \binom{2r}{2\alpha} \cos^{2\alpha} \vartheta_P \cdot \sin^{2r-2\alpha} \vartheta_P \cdot \frac{\partial^{2r} P}{\partial x^{2\alpha} \cdot \partial y^{2r-2\alpha}}$$

$$+\sum_{\alpha=0}^{\alpha=r-1} \binom{2r}{2\alpha+1} \cos^{2\alpha+1} \vartheta_P \cdot \sin^{2r-2\alpha-1} \vartheta_P \cdot \frac{\partial^{2r} P}{\partial x^{2\alpha+1} \partial y^{2r-2\alpha-1}} = 0,$$

und diese verwandelt sich, wenn man sich der Identitäten (3) und der Multiplikationsformeln für die Bogen bedient, in folgende viel einfachere

$$\frac{\partial^{2r} P}{\partial x^{2r}} \cos(2r\vartheta_P) + \frac{\partial^{2r} Q}{\partial x^{2r}} \sin(2r\vartheta_P) = 0 \, . \, . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Bezeichnet man nun mit μ einen Wert des Winkels $2r\vartheta_P$, welcher dieser Gleichung genügt, so kann ϑ_P folgende Werte annehmen

$$\frac{\mu}{2r}, \quad \frac{\mu+\pi}{2r}, \quad \frac{\mu+2\pi}{2r}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{\mu+(2r-1)\pi}{2r},$$

die einander inkongruent $(mod\ \pi)$ sind; es geht daraus hervor: **Die Tangenten an die Kurve $P = 0$ in ihrem $2r$-fachen Punkte teilen den vollen Winkel um P in $2r$ gleiche Teile.** Dieselbe Eigenschaft gilt für einen Punkt von ungerader Vielfachheit, und wird in ähnlicher Weise bewiesen.

Ist hingegen $M(x, y)$ ein $2r$-facher Punkt der Kurve $Q(x, y) = 0$, so findet man bei Wiederholung der vorigen Rechnung statt der Gleichung (4) die folgende

$$\frac{\partial^{2r} Q}{\partial x^{2r}} \cos\left(2r\vartheta_Q\right) - \frac{\partial^{2r} Q}{\partial x^{2r}} \sin\left(2r\vartheta_Q\right) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

welcher — wenn μ dieselbe Bedeutung hat wie vorhin — durch folgende Werte von ϑ_Q genügt wird:

$$\frac{\mu+\frac{\pi}{2}}{2r}, \quad \frac{\mu+\frac{\pi}{2}+\pi}{2r}, \quad \frac{\mu+\frac{\pi}{2}+2\pi}{2r}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{\mu+\frac{\pi}{2}+(2r-1)\pi}{2r};$$

dies zeigt: **Die Tangenten an die Kurve $Q(x, y) = 0$ im r-fachen Punkte M erhält man, wenn man die entsprechenden Tangenten der Kurve $P(x, y) = 0$ um den Winkel $\frac{\pi}{4r}$ dreht.** Ähnliches trifft

zu für einen Punkt von der Vielfachheit $2r-1$, jedoch ist die Größe der entsprechenden Drehung $\frac{\pi}{2(2r-1)}$.[1])

Die Betrachtung der Asymptoten der Kurven $P=0$, $Q=0$ führt zu einem ähnlichen Satze, wie der vorhergehende. Um ihn zu beweisen, nehmen wir der Einfachheit halber die Koeffizienten a_r der gegebenen Gleichung als reell an. Wir erinnern uns[2]), daß wir die Gleichung der Kurve n^{ter} Ordnung in der Form schrieben

$$f_n(x,y)+f_{n-1}(x,y)+\cdots\cdots+f_1(x,y)+f_0=0,$$

wo $f_k(x,y)$ eine binäre Form vom Grade k in x und y ist. Ihre Asymptoten haben die Gleichung

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}X+\frac{\partial f_n}{\partial y}Y+f_{n-1}=0,$$

wo X und Y die laufenden Koordinaten sind und x, y der homogenen Gleichung $f_n(x,y)=0$ genügen[3]). Um dieses auf unsern Fall anzuwenden, setzen wir

$$a_{n-r}(x\pm iy)^r=P_r\pm iQ_r,$$

oder

$$\frac{P_r}{2a_{n-r}}=(x+iy)^r+(x-iy)^r,\quad \frac{Q_r}{2ia_{n-r}}=(x+iy)^r-(x-iy)^r;$$

wir sehen dann, daß die Gleichung einer beliebigen von den Asymptoten der Kurve $P=0$ sein wird

$$\frac{\partial P_n}{\partial x}X+\frac{\partial P_n}{\partial y}Y+P_{n-1}=0\quad(\text{unter der Bedingung } P_n=0),$$

---

1) Vor Walton waren diese Sätze schon von W. J. Macquor Rankine bemerkt worden in der Abhandlung *On curves fulfilling the equation*

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}=0.$$

(Proc. R. Soc. London, XIV, 1867; Phil. Mag. 1868).

2) Gregory, *Of asymptotes to algebraic curves* (Cambridge Math. Journ. IV, 1845); Casorati, *Nuova e migliore forma delle equazioni degli asintoti di una linea piana algebrica* (Rend. Ist. Lomb. 2. Ser. XII, 1879; vgl. Rendic. Circ. mat. Palermo III, 1889, S. 49 ff.).

3) Um dies zu verifizieren, schreibe man die Gleichung der Kurve in homogener Form also:

$$\sum_0^n f_{n-r}(x,y)\,u^r=0;$$

da eine Asymptote nichts anderes ist als eine Tangente in einem ihrer unendlich fernen Punkte, d. h. in einem Punkte, wofür $u=0$, $f_n=0$, so wird sie die Gleichung haben

$$\frac{\partial f_n}{\partial x}X+\frac{\partial f_n}{\partial y}Y+f_{n-1}=0$$

unter der Bedingung $f_n=0$, wie auch im Texte behauptet wird.

oder noch einfacher

$$\begin{aligned} & na_0\left\{(x+iy)^{n-1}+(x-iy)^{n-1}\right\}X \\ & + nia_0\left\{(x+iy)^{n-1}-(x-iy)^{n-1}\right\}Y \\ & + a_1\left\{(x+iy)^{n-1}+(x-iy)^{n-1}\right\}=0, \end{aligned}$$

unter der Bedingung

$$(x+iy)^n+(x-iy)^n=0.$$

Setzen wir $x=\varrho\cos\omega$, $y=\varrho\sin\omega$, so werden diese beiden Relationen zu

$$na_0\cos(n-1)\omega\cdot X-na_0\sin(n-1)\omega\cdot Y+a_1\cos(n-1)\omega=0$$
$$\cos n\omega=0;$$

oder auch

$$na_0\sin\omega\cdot X-na_0\cos\omega\, Y+a_1\sin\omega=0,\qquad \cos n\omega=0.$$

Die zweite von diesen Beziehungen gibt nun

$$\omega=\frac{(2k+1)\pi}{2n}\quad (k=0,1,2,\ldots,n-1),$$

und folglich stellen die Gleichungen

$$na_0\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n}Y=(na_0X+a_1)\sin\frac{(2k+1)\pi}{2n}$$

die n Asymptoten der Kurve $P=0$ dar. Sie zeigen, **daß die Asymptoten selbst in einen Punkt $C\left(-\frac{a_1}{na_0},\,0\right)$ zusammenlaufen und mit der x-Achse die Winkel $\frac{\pi}{2n}$, $\frac{3\pi}{2n}$, $\ldots$, $\frac{(2n-1)\pi}{2n}$ bilden**; demnach bilden zwei aufeinanderfolgende miteinander den Winkel $\frac{\pi}{n}$. Ähnlich zeigt man, daß die Asymptoten der Kurve $Q=0$ auch durch den Punkt C gehen und mit der x-Achse die Winkel 0, $\frac{\pi}{n}$, $\ldots$, $\frac{(n-1)\pi}{n}$ bilden. Sie sind also die Winkelhalbierer zwischen zwei aufeinanderfolgenden Asymptoten der Kurve $P=0$. Dies beweist, daß die Wurzelkurven spezielle Equilateren von P. Serret sind (s. Nr. **133**).

Die Kurven $P=0$, $Q=0$ haben beide in einem r-fachen Punkte M, r Krümmungsmittelpunkte, die auf einer Geraden liegen, und wenn dieser Punkt ein vielfacher für beide ist, so fallen die betreffenden so entstehenden Geraden zusammen. Den Beweis dieser Sätze wollen wir dem Leser überlassen und zu anderen Linien übergehen, als deren Spezialfälle man die Wurzelkurven ansehen kann.

162. Es seien $z=x+iy$, $Z=X+iY$ zwei komplexe Variabeln, die durch die Gleichung

$$Z=z^n+p_1z^{n-1}+p_2z^{n-2}+\cdots+p_{n-1}z+p_n \quad . \quad . \quad (6)$$

(worin die p_k beliebige komplexe Zahlen sind) miteinander verknüpft sind. Stellen wir diese in gewohnter Weise auf zwei Ebenen π und Π dar, so entsteht eine isogonale Transformation. Betrachten wir in der Ebene Π eine beliebige Gerade

$$\frac{Y-b}{X-a} = \operatorname{tg} \gamma \qquad (7)$$

und suchen die entsprechende Kurve in π auf. Zu dem Zwecke bezeichnen wir die rechte Seite von Gleichung (6) mit $f(z)$, mit $\bar{\xi}$ die zu ξ konjugierte Größe und mit c die komplexe Zahl $a + bi$; da man nun Gleichung (7) schreiben kann

$$\gamma = \operatorname{arc\,tg} \frac{Y-b}{X-a} = \frac{1}{2i} \operatorname{arc\,tg} \frac{(X+iY)-(a+bi)}{(X-iY)-(a-bi)},$$

so haben wir, wegen Gleichung (6)

$$\gamma = \frac{1}{2i} \log \frac{f(z)-c}{\overline{f(z)}-\bar{c}}.$$

Bezeichnen wir nun mit $c_1, c_2, c_3 \ldots . c_n$ die Wurzeln der Gleichung $f(z) = c$, d. h. setzen wir

$$f(z) - c = (z-c_1)(z-c_2) \ldots . . (z-c_n), \qquad (8)$$

so wird die vorige Gleichung

$$\gamma = \frac{1}{2i} \log \prod_{k=1}^{k=n} \frac{z-c_k}{\bar{z}-\bar{c}_k} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{2i} \log \frac{z-c_k}{\bar{z}-\bar{c}_k},$$

oder schließlich

$$\gamma = \sum_{k=1}^{k=n} \operatorname{arc\,tg} \frac{y-b_k}{x-a_k}.$$

Um diese Gleichung der transformierten Kurve zu deuten, beachten wir, daß $\operatorname{arc\,tg} \frac{y-b_k}{x-a_k}$ den Winkel φ_k mißt, den die Gerade, welche den Punkt $M(x, y)$ mit dem festen Punkte $P_k(a_k, b_k)$ verbindet, mit der x-Achse bildet. Die vorige Gleichung ist demnach äquivalent mit der folgenden anderen

$$\gamma = \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots\cdots + \varphi_n. \qquad (9)$$

Demnach — wenn wir mit Laguerre unter der Orientierung eines Systems von Geraden die Summe der Winkel verstehen, die diese mit einer festen Geraden bilden[1]) — sind wir zu dem Schlusse berechtigt, **daß in der durch die Gleichungen (6) angegebenen isogonalen Transformation den Geraden der Ebene Π Kurven n^{ter} Ord-**

---

1) Vgl. auch G. Humbert, *Sur l'orientation des systèmes de droites* (Nouv. Ann. Math., 3e Sér., XII, 1893).

nung in der Ebene entsprechen, die alle den Ort der Punkte bilden, von denen n Gerade ausgehen, die durch ebenso viele feste Punkte gehend, ein System konstanter Orientierungen bilden. Die so erhaltenen Kurven werden nach G. Holzmüller[1]) irreguläre Hyperbeln n^{ter} Ordnung genannt; in dem speziellen Falle, daß alle Koeffizienten $p_1, p_2, \ldots, p_n$ gleich Null sind, sind die festen Punkte die Ecken eines regelmäßigen Vielecks, und die entsprechenden Kurven heißen reguläre Hyperbeln n^{ter} Ordnung; der Grund für diese Bezeichnung liegt darin, daß für $n = 2$ die genannten Kurven gemeine Hyperbeln zweiter Ordnung, gleichseitige oder ungleichseitige, werden. — Die genannten Kurven erfreuen sich einer schönen Eigenschaft, die zu Tage tritt, wenn man beachtet, daß die durch Gleichung (7) dargestellte Gerade sich nicht von der folgenden unterscheidet:

$$\frac{Y - (b + d \sin \gamma)}{X - (a + d \cos \gamma)} = \operatorname{tg} \gamma, \quad \ldots\ldots \quad (7')$$

wo d eine ganz beliebige Konstante ist; mit (7′) kann man gerade so verfahren, wie wir es mit (7) getan haben, und zu ähnlichen Schlüssen gelangen; der einzige Unterschied besteht darin, daß die Gleichung $f(z) = c$ ersetzt ist durch $f(z) = c + de^{i\gamma}$, und daher die festen Punkte P_k verändert sind. Man sieht also: **Die regulären oder irregulären Hyperbeln n^{ter} Ordnung sind ∞^1 Definitionen fähig, ähnlich der oben angegebenen; infolgedessen hat man ∞^1 Gruppen von n festen Punkten, die alle denselben Schwerpunkt haben;** die entsprechenden Orientierungen sind alle einander gleich.

Wir betrachten in der Ebene Π zwei beliebige Geraden, die den Winkel α bilden; ihnen entsprechen in π zwei Hyperbeln, die sich unter einem Winkel schneiden, der in jedem Punkte für sie derselbe ist; folglich: **Zwei Holzmüllersche Hyperbeln derselben Ordnung, die auf dieselben festen Punkte bezogen sind, schneiden sich in allen gemeinschaftlichen Punkten unter demselben Winkel.**

Betrachten wir jetzt in der Ebene Π einen Kreis mit dem Zentrum (a, b) und dem Radius R und beachten, daß seine Gleichung

$$(Z - c)(\overline{Z} - \bar{c}) = R^2,$$

so sehen wir, daß er sich in die Kurve verwandelt

$$\left(f(z) - c\right)\left(\overline{f(z)} - \bar{c}\right) = R^2,$$

oder wegen Gleichung (8)

$$\prod_{k=1}^{k=u} (z - c_k)(\bar{z} - \bar{c}_k) = R^2; \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

1) *Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften* (Leipzig, 1882) S. 170 u. 203.

nun bedeutet $(z - c_k)(\bar{z} - \bar{c}_k)$ das Quadrat des Abstandes d_k des Punktes $M(x, y)$ von dem Punkte $P_k(a_k, b_k)$; daher ist diese Gleichung äquivalent mit der anderen

$$d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \ldots . d_n = R.$$

Folglich: **Bei der durch die Gleichung (6) definierten isogonalen Transformation entsprechen den Kreisen in der Ebene Π Kurven von der Ordnung $2n$ in der Ebene π; jede derselben ist der Ort der Punkte, deren Abstände von n festen Punkten ein konstantes Produkt ergeben.** Für $n = 2$ sind diese Kurven Cassinische Ovale (Nr. **90**) oder im speziellen Bernoullische Lemniskaten (Nr. **93**); im allgemeinen werden sie nach Holzmüller Lemniskaten höherer Ordnung genannt, reguläre, wenn $p_1 = p_2 = \cdots p_n = 0$, irreguläre im allgemeinsten Falle[1]) und nach F. Lucas Äquipotentialkurven[2]); die regulären wurden in älterer Zeit von W. Roberts Cassinoiden mit n Brennpunkten genannt[3]). Es ist klar, daß die jetzt erhaltenen allgemeinen Lemniskaten die orthogonalen Trajektorien der vorhin definierten Hyperbeln sind[4]).

Wenn wir, statt von Gleichung (6) auszugehen, die folgende Gleichung

$$Z = \frac{f(z)}{F(z)}$$

als Ausgangspunkt unserer Betrachtungen genommen hätten (wo f und F zwei Polynome von z, die zueinander prim sind und vom Grade m und n), so würden wir zu zwei neuen Klassen von Kurven gelangen, die statt durch die Gleichungen (9) und (10) durch die analogen Gleichungen

$$(\varphi_1' + \varphi_2' + \cdots + \varphi_m') - (\varphi_1'' + \varphi_2'' + \cdots + \varphi_n'') = \gamma,$$

$$\frac{d_1' \cdot d_2' \ldots . d_m'}{d_1'' \cdot d_2'' \ldots . d_n''} = R$$

1) S. 172 und 204 des eben angeführten Werkes.

2) S. die Note *Détermination electrique des racines réelles et imaginaires de la dérivée d'un polynome quelconque* (C. R. CVI, 1888); wo eine elektrische Methode angegeben ist, diese Kurve zu zeichnen.

3) *Note sur la rectification de la cassinoïde à n foyers* (Liouvilles Journ. XIII, 1848), daselbst sind die Kurven durch die Polargleichung dargestellt: $\varrho^{2n} - 2a^n\varrho^n \cos n\omega + a^{2n} = b^{2n}$, die sich recht gut zur Diskussion der Kurve eignet; z. B. läßt sie erkennen, daß, wenn man b variieren läßt, man ∞^1 Kurven erhält, deren Wendepunkte auf einer Sinusspirale (vgl. Nr. **171**) liegen, die durch die Gleichung $\varrho^n + (n-1)a^n \cos n\omega = 0$ dargestellt wird.

4) Auf Kurven dieser Art kommt man offenbar auch, wenn man die Örter der Punkte einer Ebene sucht, in denen das Polynom $z^n + p_1 z^{n-1} + \cdots + p_n$ ein gegebenes Argument, oder einen gegebenen Modul hat; sie sind die courbes d'égale module und die courbes d'égal argument von H. Laurent (*Thèse d'analyse sur la continuité des fonctions imaginaires et des séries en particulier*, Metz 1865).

charakterisiert werden, für die G. Holzmüller ebenfalls die Namen Hyperbeln und Lemniskaten anwandte. Sie waren schon früher von G. Darboux untersucht worden[1]), der einige schöne Eigenschaften derselben auffand; ferner hatte sich noch früher A. Genocchi[2]) mit dem Falle beschäftigt, in welchem die festen Punkte die Ecken zweier regelmäßiger konzentrischer Polygone von derselben Seitenzahl sind, indem er eine Art der Transformation der Figuren anwandte, die von W. Roberts im Jahre 1842 erdacht wurde.

163. Zu den in der vorigen Nr. untersuchten Kurven kann man auch gelangen und ist man auch tatsächlich gelangt, ohne auf die Theorie der isogonalen Transformationen zurückzugehen, wenn man als Ausgangspunkt eine der Eigenschaften nimmt, deren sich, wie wir sahen, die regulären bezw. irregulären Hyperbeln erfreuen; da diese Methode zu neuen Resultaten geführt hat, so können wir nicht umhin, hier darauf hinzuweisen.

In einer Ebene seien n feste Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ gegeben; es gibt dann in derselben Ebene unzählig viele Punkte M derart, daß die n Geraden $MP_1, MP_2, \ldots, MP_n$ ein System von gegebener Orientierung liefern; der Ort derselben ist eine Kurve n^{ter} Ordnung, die F. Lucas[3]) Stelloide n^{ten} Grades genannt hat. Wir wollen sie kurz mit $\mathfrak{S}_n$ bezeichnen und die festen Punkte derselben die Angelpunkte (pivots) nennen. Für $n = 1$ reduziert sich die $\mathfrak{S}_n$ auf eine Gerade, die von dem einzigen Angelpunkte ausgeht. Aber auch, wenn $n > 1$, geht die $\mathfrak{S}_n$ durch ihre Angelpunkte; nämlich durch den Punkt P_k können wir immer eine Gerade ziehen, die mit den Geraden $P_kP_1, \ldots, P_kP_{k-1}, P_kP_{k+1}, \ldots, P_kP_n$ ein System von n Geraden, das die gegebene Orientierung hat, bildet. Um die Gleichung von $\mathfrak{S}_n$ zu finden, bezeichnen wir mit a_k, b_k die Koordinaten von P_k und mit x, y die von M. Setzen wir dann $c_k = a_k + ib_k$, $z = x + iy$, so wird der Winkel der Geraden MA_k mit Ox sein $= \arg(z - a_k)$. Daher wird wegen der Bedingungen des Problems

$$\sum_{k=1}^{k=n} \arg(z - a_k) = c$$

sein, oder

$$\arg \prod_{k=1}^{h=n} (z - a_k) = c.$$

Setzt man daher

1) *Sur une classe remarquable de courbes et des surfaces algébriques* (Paris, 1873) S. 66—75.

2) *Intorno alla rettificazione e alle proprietà delle caustiche secondarie* (Ann. di Mat. VI, 1864).

3) *Géometrie des polynômes* (Journ. Éc. polyt. XLVI. Heft, 1879). Die Haupteigenschaften der Stelloiden finden sich dargestellt in der Abhandlung von G. Fouret, *Sur quelques propriétés géometriques des stelloïdes* (C. R. CVI, 1888).

$$f(z) = (z - c_1)(z - c_2) \ldots . (z - c_n) = P(x, y) + iQ(x, y),$$

so wird die vorige Gleichung

$$\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = c, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

welche beweist, daß $\mathfrak{S}_n$ eine Kurve n^{ter} Ordnung ist; schreibt man dagegen

$$\frac{\frac{1}{2}\left(f(z) + \overline{f(z)}\right)}{\frac{1}{2i}\left(f(z) - \overline{f(z)}\right)} = c, \quad \text{oder} \quad \frac{f(z)}{\overline{f(z)}} = \frac{c + i}{c - i}, \quad . \; . \; . \quad (12)$$

so erkennt man, daß die Stelloiden nicht verschieden sind von den Holzmüllerschen Hyperbeln.

Aus Gleichung (11) geht hervor: Damit eine Kurve eine Stelloide sei, ist notwendig und hinreichend, daß ihre Gleichung sich auf die Form bringen lasse

$$aP(x, y) + bQ(x, y) = 0,$$

wo a und b Konstanten, P und Q ganze Funktionen von x, y sind, derart, daß

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Daraus läßt sich ein bemerkenswerter Satz ableiten. Die Gleichung der ersten Polare eines unendlich fernen Punktes in bezug auf die Kurve $aP(x, y) + bQ(x, y) = 0$ hat eine Gleichung von folgender Form:

$$a\left(\xi\frac{\partial P}{\partial x} + \eta\frac{\partial P}{\partial y}\right) + b\left(\xi\frac{\partial Q}{\partial x} + \eta\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = 0,$$

oder auch infolge der vorhergehenden Gleichungen

$$a\left(\xi\frac{\partial P}{\partial x} + \eta\frac{\partial P}{\partial y}\right) + b\left(-\xi\frac{\partial P}{\partial y} + \eta\frac{\partial P}{\partial x}\right) = 0;$$

weil nun

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0,$$

so sieht man, daß

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\xi\frac{\partial P}{\partial x} + \eta\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\xi\frac{\partial P}{\partial y} + \eta\frac{\partial P}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\xi\frac{\partial P}{\partial x} + \eta\frac{\partial P}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(-\xi\frac{\partial P}{\partial y} + \eta\frac{\partial P}{\partial x}\right) = 0,$$

und daher kann man sagen: **Die ersten Polaren der Punkte der unendlich fernen Geraden in bezug auf eine Stelloide n^{ten} Grades sind Stelloiden $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades.**

Um eine andere Eigenschaft der Stelloiden darzustellen, stellen wir, wie es Darboux getan, einen beliebigen Punkt M durch zwei komplexe Zahlen dar, die konjugiert sind oder nicht, jenachdem M reell oder imiginär ist (sog. imaginäre symmetrische Koordi-

naten); wir bezeichnen dann als Gegenpaar des Punktepaares P_h, P_k die beiden Punkte, welche das dritte Paar von Gegenecken des vollständigen Vierseits sind, das entsteht, wenn man von P_h und P_k aus die beiden Kreispunkte projiziert. Weil nun c_h und $\bar{c}_h$ die imaginären symmetrischen Koordinaten von P_h sind und $c_k, \bar{c}_k$ die von P_k, so werden $c_h, \bar{c}_k$ und $\bar{c}_h, c_k$ die der Punkte Q'_{hk}, Q''_{hk} sein, die das Gegenpaar von P_h, P_k sind. Da nun die Gleichung (12) in ausführlicher Weise folgendermaßen geschrieben wird:

$$\frac{(x+iy-c_1)(x+iy-c_2)\ldots\ldots(x+iy-c_n)}{(x-iy-\bar{c}_1)(x-iy-\bar{c}_2)\ldots\ldots(x-iy-\bar{c}_n)}=\frac{c+i}{c-i}, \quad . \quad (12')$$

so ist klar, daß sie befriedigt wird, wenn man setzt:

sowohl $\qquad x+iy=c_k, \qquad x-iy=\bar{c}_k,$

als auch $\qquad x+iy=c_h, \qquad x-iy=\bar{c}_h.$

Sie wird daher sowohl durch die Koordinaten der Angelpunkte als auch durch die Koordinaten der Punkte der $\frac{n(n-1)}{2}$ Paare von Gegenpunkten befriedigt (Gegenpunkte in bezug auf die von den Angelpunkten selbst gebildeten Paare). Im ganzen gibt es $n+2\frac{n(n-1)}{2}=n^2$ Punkte, die allen den ∞^1 durch (12) dargestellten Kurven, wenn man c variiert, gemeinsam sind. **Diese Gleichung (12) stellt daher ein Büschel von Stelloiden dar**; welches die Grundpunkte desselben sind, ergibt sich aus dem Vorhergehenden. Z. B. bilden alle ersten Polaren der Punkte der unendlich fernen Geraden in bezug auf eine beliebige Stelloide ein solches Büschel.

Weitere Eigenschaften der Stelloiden entspringen leicht aus der Polargleichung, die wir nun aufstellen wollen. Zu dem Zwecke setzen wir

$$f(z)=p_0z^n+p_1z^{n-1}+p_2z^{n-2}+\cdots p_{n-1}z+p_n, \quad \text{wo } p_0=1; \quad (13)$$

ferner $\quad z=\varrho e^{i\omega}, \quad p_k=g_k e^{i\gamma_k} \quad (k=0,1,\ldots n), \quad c=\operatorname{tg}\gamma;$

dann wird $\qquad g_0=1 \quad \text{und} \quad \gamma_0=0;$

daher ist

$$P(x,y)=\sum_{k=0}^{k=n} g_k\varrho^{n-k}\cos\left(\gamma_k+\overline{n-k}\cdot\omega\right),$$

$$Q(x,y)=\sum_{k=0}^{k=n} g_k\varrho^{n-k}\sin\left(\gamma_k+\overline{n-k}\cdot\omega\right);$$

demnach wird Gleichung (11) zu

$$\sum_{k=0}^{k=n} g_k\varrho^{n-k}\cos\left(\gamma+\gamma_k+\overline{n-k}.\omega\right)=0. \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Dies ist die Polargleichung der Kurve. Wir werden daraus sogleich

eine Folgerung ziehen. Durch den Pol ziehen wir eine beliebige Gerade, die mit der Polarachse den Winkel α bildet; $\mathscr{P}(\alpha)$ sei das Produkt der Radienvektoren der n Punkte, in denen sie die Stelloide schneidet. Offenbar ist dann

$$\mathscr{P}(\alpha) = (-1)^n g_n \frac{\cos(\gamma + \gamma_n)}{\cos(\gamma + n\alpha)}.$$

Ähnlich ist, welches auch die beliebige ganze Zahl r sein möge,

$$\mathscr{P}\left(\alpha + \frac{r\pi}{n}\right) = (-1)^n g_n \frac{\cos(\gamma + \gamma_n)}{\cos(\gamma + n\alpha + r\pi)} = (-1)^n g_n \frac{\cos(\gamma + \gamma_n)}{(-1)^r \cos \gamma + n\alpha)};$$

aus der Vergleichung dieser beiden Relationen ergibt sich, daß

$$\mathscr{P}\left(\alpha + \frac{r\pi}{n}\right) = (-1)^r \mathscr{P}(\alpha).$$

Bedenkt man nun, das der Pol des Systems, auf das wir die Kurve bezogen haben, ein beliebiger Punkt der Ebene ist, so erkennt man, daß wir zu folgendem Resultate gelangt sind: **Schneidet man eine Stelloide n^{ten} Grades mit einem Winkel von der Größe $\frac{\pi r}{n}$ (r eine ganze Zahl), so ist das Produkt der Abstände des Scheitelpunktes von den Schnittpunkten des einen Schenkels immer gleich dem absoluten Werte des analogen Produktes bei dem andern Schenkel und unterscheidet sich auch nicht durch das Vorzeichen, wenn r gerade ist.**

Oft ist es angebracht, als Pol den Schwerpunkt der Angelpunkte zu nehmen; Fouret nennt diesen Punkt point de rayonnement (Ausstrahlungspunkt). In einem solchen Falle ist offenbar

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 0, \quad p_1 = 0, \quad g_1 = 0.$$

Nun entsprechen die unendlich fernen Punkte der Kurve (14) solchen Werten von ω, daß

$$n\omega + \gamma = (2r+1)\frac{\pi}{2};$$

machen wir $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, so haben wir n verschiedene Werte von ω, welche die Richtungen bestimmen, in denen sich die unendlich fernen Punkte der Stelloide befinden. Gibt man nun dem ω einen dieser Werte, so wird die Gleichung (14) in ϱ vom Grade $n-2$ sein, womit gezeigt ist, daß die durch den Pol in dieser Richtung gezogenen Geraden jede zwei Schnitte mit der Kurve im Unendlichen haben, weshalb sie Asymptoten der Kurve sind. Folglich: **Eine Stelloide n^{ter} Ordnung besitzt n reelle Asymptoten, die durch den Schwerpunkt der Angelpunkte gehen und eine n-strahlige Windrose bilden, die zugleich mit der unendlich fernen Geraden die erste Polarkurve des Ausstrahlungspunktes in bezug auf die Stelloide n^{ter} Ordnung bildet**[1].

1) Vgl. auch Briot et Bouquet, *Traité des fonctions elliptiques* (II. Aufl.

Dies sind etwa die hauptsächlichsten Eigenschaften der Stelloiden. Ebenso wie sie haben auch in der geometrischen Darstellung komplexer Zahlen ihren Ursprung diejenigen, welche aus dem Polynome

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

entspringen, wenn man mit F. Lucas

$$\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)^2}{P^2 + Q^2} = const., \quad \text{oder} \quad \frac{P\frac{\partial P}{\partial y} + Q\frac{\partial Q}{\partial y}}{P\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial Q}{\partial x}} = const.$$

setzt; sie werden beziehungsweise isodynamische Linien und halysische Linien (Irrlinien) genannt[1]).

Ähnlichen Ursprung haben die Linien, deren allgemeine Gleichung

$$z^{\frac{1}{n}} \bar{z}^{\frac{1}{n}} + Az^{\frac{1}{n}} + \bar{A}\bar{z}^{\frac{1}{n}} + \beta = 0$$

lautet, wobei β reell ist, und $z, \bar{z}$ sowie $A, \bar{A}$ komplex-konjugierte Größen sind; ihrer Ordnung gemäß heißen sie Kardioiden vom Grade $2n$[2]); die Bedeutung, die sie bisher in der Geometrie erlangt haben, ist nicht derart, daß wir uns veranlaßt sehen sollten, hier mehr als ihre Definition zu geben.

Es sei noch bemerkt, daß die Kurven von der Ordnung $3n$, die man aus den zirkularen Kurven dritter Ordnung durch eine isogonale Transformation vom Typus $w = \varphi(z)$ erhält, wo φ ein Polynom vom Grade n in z ist, zu analytischen Zwecken von N. Perry untersucht wurden[3]).

164. Wir schließen dieses Kapitel, indem wir noch auf einen anderen Weg hinweisen, der auf der geometrischen Darstellung der komplexen Zahlen fußend zu neuen Kurven führt. Da der Kreis eine rationale Kurve ist, so kann man eine eindeutige Korrespondenz zwischen seinen Punkten und denen einer Kurve vom Geschlechte 0 aufstellen. Dem Kreise können wir den Radius 1 geben, und dann kann man sagen, daß die Koordinaten eines beliebigen Punktes einer rationalen Kurve sich als rationale Funktionen einer komplexen Variabelen t mit dem

---

Paris 1875) S. 226; P. F. Laurin, *Sur la transformation isogonale définie par une fonction rationelle* (Diss. Lund, 1887) S. 89.

1) F. Lucas, *Généralisation du théorème de Rolle* (C. R. CVI, 1888); und *Statique des polynômes* (Bull. Soc. math. France XVII, 1889); H. Brocard (*Notes de bibliographie des courbes géométriques*, Partie complémentaire 1899) hat bemerkt, daß die erste Idee dieser Kurven Duhamel zukommt und auf das Jahr 1862 zurückgeht.

2) J. Goettler, *Conforme Abbildung eines von concentrischen gleichseitigen Hyperbeln oder gewissen Kurven n^{ter} Ordnung begrenzten Flächenstückes auf dem Einheitskreis* (Diss. München, 1897).

3) *Das Problem der conformen Abbildung für eine spezielle Kurve von der Ordnung $3n$* (Dissert. München, 1901).

Modulus 1 ausdrücken lassen. Diese Betrachtung wurde von F. Morley[1]) vorgeschlagen und bedeutend erweitert, indem er sich im speziellen mit den Enveloppen $\varDelta^{2n-2}$ befaßte, die, von der Klasse $2n-1$ und der Ordnung $2n$, gebildet werden durch Geraden von folgender Gleichung bei Variation des Parameters t:

$$(-1)^n(xt^n - yt^{n-1}) = (t^{2n-1} - 1) - (s_0 t^{2n-2} - s_{2n-2}t) + \cdots$$
$$+ (-1)^n(s_{n-2}t^{n+1} - s_{n+1}t^{n-2}),$$

wo im allgemeinen s_k und s_{2n-1-k} konjugiert imaginäre Größen sind. Diese Kurven sind rational ($p = 0$); mit Rücksicht auf ihre Ordnung und Klasse ergibt sich aus den Plückerschen Formeln daß sie $2n-1$ Spitzen, $(2n-1)(n-2)$ Doppelpunkte, $2(n-2)$ Wendepunkte und $2n^2 - 7n - 7$ Doppeltangenten haben. In dieser Kurvenkategorie findet sich eine wohlbekannte, nämlich die dreispitzige Hypozykloide, die Morley „Deltoid" nennt, und die man erhält, wenn $n = 2$. Alle diese Kurven besitzen höchst elegante Eigenschaften, die analog denen sind, die bei der dreispitzigen Hypozykloide sehr bekannt sind. Als Beispiel führen wir folgende an: „Die $2n-1$ Spitzentangenten einer $\varDelta^{2n-1}$ berühren eine $\varDelta^{2n-3}$. Im Spezialfall $n = 3$ erhält man eine spezielle Kurve 5ter Ordnung 6ter Klasse, die schon von W. K. Clifford[2]) betrachtet und gezeichnet wurde, und neuerdings von Grund aus mit Hilfe der Vektoranalysis von R. P. Steffens[3]) untersucht worden ist, der vorschlug, sie „Pentadeltoid" zu nennen, und sehr schöne Eigenschaften an ihr auffand, die größtenteils auch für alle hier betrachteten Enveloppen bestehen.

Indem er dieselben Betrachtungen weiter verfolgte, wurde F. Morley[4]) zu einer anderen Klasse rationaler Enveloppen geführt, die er Cyklogene nannte; es sind die Enveloppen der Geraden, die durch eine Gleichung von folgendem Typus dargestellt werden

$$\begin{aligned} a + \bar{a}t &= 0, \\ a + 2\eta t + at^2 &= 0, \\ a + bt + \bar{b}t^2 + \bar{a}t^3 &= 0, \\ a + bt + 2\eta t^2 + \bar{b}t^3 + \bar{a}t^4 &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

wo η eine reelle Größe bedeutet, während a und $\bar{a}$, b und $\bar{b}$ konjugiert imaginäre Größen sind. Nennen wir n die Klasse und m den Aspekt der Kurve, d. i. die Zahl der Tangenten einer bestimmten Richtung, so bezeichnet Morley die in Frage stehende Kurve mit C_m^n und be-

1) *On the metric geometry of the plane n-line* (Trans. Amer. Math. Soc. I, 1900) sowie *Orthocentric properties of the plan n-line* (Das. IV, 1903).

2) *Mathem. Papers* (London, 1882) S. 614—17.

3) *On the pentadeltoid* (Trans. Amer. math. Soc. VII, 1906).

4) *On reflexive geometry* (Trans. Amer. Math. Soc. VIII, 1907).

merkt, daß unter ihnen sich einige schon bekannte Kurven befinden, nämlich: C_1^1 der Punkt, C_2^2 der Kreis, C_1^3 das Deltoid oder die dreispitzige Hypozyklolde, C_3^3 die Kardioide; alsdann führt er die Namen Parastroide und Paranephroide ein, um die Kurven C_2^4 und C_4^4 zu bezeichnen. Besonders bemerkenswert sind die von ihm Ennakardioiden genannten und mit dem Symbol C^n bezeichneten Linien. Diese Kurven[1]) sind von der n^{ten} Klasse und von der Ordnung $2(n-1)$; für alle diese sind die Kreispunkte singulär und zwar so, daß jeder von diesen äquivalent mit $n-2$ Spitzen und $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ Knoten ist. Jede besitzt außerdem in endlicher Entfernung $n-2$ Spitzen und $(n-2)(n-3)$ Knoten, $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppeltangenten, aber keinen Wendepunkt. Sie lassen sich mit Hilfe zweier passend gewählter algebraischer Hypozykloiden zeichnen.

Sechzehntes Kapitel.

Allgemeines über die Untersuchung derjenigen algebraischen Kurven, deren Rektifikation von vorher bestimmten Funktionen abhängt.

165. Liegt eine Kurve als gegeben vor, so lehrt uns die Integralrechnung die Natur der Funktion kennen, die man anzuwenden hat, um deren Rektifikation auszuführen. Erheblich schwieriger ist die umgekehrte Aufgabe, nämlich die Auffindung aller algebraischen Kurven, deren Rektifikation vermittelst a priori bekannter Funktionen ausgeführt werden kann, oder, wenn man so sagen will, vermittelst Bogen von gegebenen Kurven[2]). Eben diesem allgemeinen Probleme hat Euler viele Zeit und Mühe gewidmet[3]), indem er es zunächst auf eine Frage der unbestimmten algebraischen Analysis zurückführte, und dann mit jener wunderbaren Virtuosität in der Rechnung behandelte, die nur

---

1) Edward C. Philips, *On the pentacardioid* (Diss. Baltimore, 1909) S. 9.

2) Unter diesem Gesichtspunkte wurde die in Rede stehende Frage durch J. Hermann (Acta erudit. 1723) und Johann Bernoulli (Id. 1724 oder *Opera* II S. 528) untersucht. Über diese, wie auch über ältere und neuere Arbeiten derselben Richtung gibt zahlreiche Nachrichten, nebst selbständigen Zusätzen, die inhaltsreiche Abhandlung von Allégret, *Mémoire sur la représentation des transcendantes par des arcs de courbes* (Ann. Ec. norm. sup., 2e Sér., II, 1873).

3) Man sehe die drei Abhandlungen: *De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus parabolicos metiri licet* (Nova Acta Petrop. V, 1789, vorgelegt am 3. Juni 1776); *De binis curvis algebraicis eadem rectificatione gaudentibus* (Mém. Acad. St. Pétersbourg, XI, 1830, vorgelegt am 20. Aug. 1781); *De lineis curvis quarum rectificatio per datam quadraturam mensuratur* (Leonhardi Euleri opera postuma mathematica et physica, I, Petropoli 1862, S. 439 u. 452).

vergleichbar ist mit ähnlichen Vermächtnissen, wie sie uns Diophant in zahlentheoretischen Untersuchungen hinterlassen hat.

Das Eulersche Problem kann man so ausdrücken: „Gegeben eine Funktion V einer Variabelen v, zwei andere Funktionen $x(v)$ und $y(v)$ aufzufinden, derart, daß identisch

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = V \cdot dv \text{.“} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Eine Lösung (oder wenn man will eine Umgestaltung) des Problems erhält man, indem man, wenn U eine beliebige Funktion von u, und A, B Konstanten sind, welche die Gleichung (1) identisch befriedigen, alsdann setzt

$$dx = V\frac{\sqrt{A+U}}{\sqrt{A+B}}\,dv, \quad dy = V\frac{\sqrt{B-U}}{\sqrt{A+B}}\,dv; \quad \ldots \quad (2)$$

somit ist die ganze Sache darauf zurückgeführt, jene so zu wählen, daß die beiden Integrationen

$$\int V\frac{\sqrt{A+U}}{\sqrt{A+B}}\,dv, \quad \int V\frac{\sqrt{B-U}}{\sqrt{A+B}}\,dv$$

ausführbar sind, und daß die resultierende parametische Darstellung $x = x(v), y = y(v)$ einer algebraischen Kurve angehöre. — Eine ähnliche Reduktion bekommt man, wenn man berücksichtigt, daß Gleichung (1) durch folgende beiden vertreten werden kann:

$$dx = V\cos\varphi \cdot dv, \quad dy = V\sin\varphi \cdot dv, \quad \ldots \quad (3)$$

womit die Frage zurückgeführt ist auf die Aufsuchung der Funktion $\varphi = \varphi(v)$, für welche die Gleichungen

$$x = \int V\cos\varphi \cdot dv, \quad y = \int V\sin\varphi \cdot dv$$

eine algebraische Kurve darstellen. — In dem Spezialfalle, daß $V = \sqrt{P^2 + Q^2}$, wo P und Q Funktionen von v sind, kann Gl. (1) ersetzt werden sowohl durch

$$\frac{dx}{dv} = \frac{P\sqrt{A+U} - Q\sqrt{B-U}}{\sqrt{A+B}}, \quad \frac{dy}{dv} = \frac{P\sqrt{B-U} + Q\sqrt{A+U}}{\sqrt{A+B}}, \quad (4)$$

als auch durch

$$\frac{dx}{dv} = P\sin\varphi + Q\cos\varphi, \quad \frac{dy}{dv} = P\cos\varphi - Q\sin\varphi, \quad . \quad (5)$$

wo A, B, V, φ dieselbe Bedeutung haben wie vorhin. Somit kann die Umgestaltung des ursprünglichen Problems auf zwei andere den vorigen ähnliche Arten vor sich gehen. Wenngleich diese Betrachtungen noch nicht zur allgemeinen Lösung des aufgestellten Problems führen, so können sie dennoch in besonderen Fällen zu bemerkenswerten Resultaten führen; die folgenden Anwendungen mögen dieses zeigen.

166. a) Kurven, die durch Parabelbogen rektifizierbar sind[1]. In diesem Falle kann man $V = \sqrt{1 + v^2}$, d. h. $P = 1$, $Q = v$ setzen; die Gleichungen (6) werden dann

$$\frac{dx}{dv} = \frac{\sqrt{A + U} - v\sqrt{B - U}}{\sqrt{A + B}}, \qquad \frac{dy}{dv} = \frac{\sqrt{B - U} + v\sqrt{A + U}}{\sqrt{A + B}};$$

Euler setzt $U = \sqrt[r]{v}$ und erhält algebraische Kurven. Bei derselben Annahme geben die Gleichungen (5)

$$\frac{dx}{dv} = \sin\varphi + v\cos\varphi, \qquad \frac{dy}{dv} = \cos\varphi - v\sin\varphi;$$

setzt man nun $v = \sin\vartheta$ und nimmt an, daß $\varphi = k\vartheta + \alpha$, wo k eine rationale Zahl ist, so erhält man integrierbare Formeln, die ebenfalls zu algebraischen Kurven führen. Ein drittes und besseres Verfahren gründet sich auf die Betrachtung des Bogendifferenzials einer Parabel, das in der Form $\frac{dz\sqrt{z^2 + a^2}}{a}$ geschrieben wird, wo z die unabhängige Variabele ist. Setzt man dann

$$dx = \frac{\sqrt{z^2 + a^2}}{a}\cos\varphi \cdot dz, \qquad dy = \frac{\sqrt{z^2 + a^2}}{a}\sin\varphi \cdot dz,$$

so ist die Frage darauf zurückgeführt, $\varphi = \varphi(z)$ so zu wählen, daß x und y in endlichen Ausdrücken erhalten werden. Euler setzt zu dem Zwecke

$$y = a\,\mathrm{tg}\,\varphi, \qquad \varphi = n\vartheta,$$

und erhält infolgedessen

$$dx = a\frac{\cos n\vartheta \cdot d\vartheta}{\cos^3\vartheta}d\vartheta, \qquad dy = a\frac{\sin n\vartheta \cdot d\vartheta}{\cos^3\vartheta}d\vartheta. \quad . \quad . \quad (6)$$

Um die Integrierbarkeit dieser Ausdrücke beurteilen zu können, setzen wir mit Euler

$$\varphi(n) = \int\frac{\cos n\vartheta \cdot d\vartheta}{\cos^3\vartheta}, \quad \psi(n) = \int\frac{\sin n\vartheta \cdot d\vartheta}{\cos^3\vartheta};$$

durch teilweises Integrieren findet man

$$\varphi(n) = \frac{2}{n-3}\frac{\sin(n-1)\vartheta}{\cos^2\vartheta} - \frac{n+1}{n-3}\varphi(n-2),$$

$$\psi(n) = -\frac{2}{n-1}\frac{\cos(n-1)\vartheta}{\cos^2\vartheta} + \frac{n+1}{n-3}\psi(n-2).$$

Demnach ist die Integration ausführbar für einen gewissen Wert $\bar{n}$ von n, und wird es auch sein für alle Werte in der Form $\bar{n} + 2k$; sie ist aber ausführbar für $n = 1$; daher ist sie es auch für jedes un-

1) Außer den drei vorigen Eulerschen Abhandlungen s. auch die mit dem Titel *De infinitis curvis algebraicis, quarum longitudo arcui parabolico aequatur* (Mém. Acad. St. Pétersbourg, XI, 1830; vorgelegt am 20. Aug. 1781).

gerade n. Direkter erhält man dieses Resultat, wenn man beachtet, daß aus den obigen Werten dx und dy sich ergibt

$$\frac{x+iy}{a} = \int \frac{e^{in\vartheta}\cdot d\vartheta}{\cos^3\vartheta} = \int \frac{e^{in\vartheta}\cdot d\vartheta}{\left(\frac{e^{i\vartheta}+e^{-i\vartheta}}{2}\right)^3} = 8\int \frac{e^{i(n+3)\vartheta}\cdot d\vartheta}{(e^{2i\vartheta}+1)^3};$$

setzt man dann $e^{i\vartheta} = t$, so wird

$$\frac{x+iy}{a} = -8i\int (1+t^2)^{-3} t^{n+1}\cdot dt;$$

nun versichert uns die bekannte Theorie der binomischen Differentiale, daß diese Integrierung ausführbar ist, wenn n eine ungerade Zahl ist. Wir schließen daher: **Welchen Wert auch die positive, ungerade Zahl n haben mag** (als positiv kann man n offenbar immer annehmen), **die Gleichungen (6) führen zu einer algebraischen Kurve, deren Bogen durch Parabelbogen ausgedrückt werden kann.**

b) Kurven, die durch Kreisbogen rektifizierbar sind. Die Anwendung des oben dargelegten Verfahrens zur Bestimmung derjenigen Kurven, die durch Kreisbogen rektifiziert werden können, ergab verschiedentlich als Resultat nur den Kreis selbst, und daher wurde Euler veranlaßt, den Satz als wahrscheinlich auszusprechen: „Außer dem Kreise gibt es keine algebraische Kurve, von der ein beliebiger Bogen sich durch Kreisbogen ausdrücken läßt“.[1]) Erneute Versuche und die Anwendung der Polarkoordinaten führten ihn jedoch zu einer neuen Kurve, die von dieser Beschaffenheit ist und ihn von der im obigen Satze ausgesprochenen Meinung abstehen ließ.[2])

Das Verfahren des großen Geometers war folgendes: Wenn ϱ und ω die Polarkoordinaten einer Kurve mit der beschriebenen Eigenschaft sind, so muß

$$\int \sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2} = \varphi$$

sein, wobei φ einen Kreisbogen bedeutet; daher ist umgekehrt

$$\omega = \int \frac{\sqrt{d\varphi^2 - d\varrho^2}}{\varrho};$$

erforderlich ist nun, zwischen ϱ und φ eine Beziehung aufzustellen, derart, daß diese Integration ausführbar werde. Euler setzt

1) S. die erste und dritte der in Note 3 (S. 453) zitierten Abhandlungen, sowie die in Note 1 des folgenden Kap. (S. 459) angeführten; außerdem einen Brief Eulers an Lagrange vom 23. März 1775 in *L. Euleri Opera posthuma* I, S. 588. An jeder dieser Stellen spricht Euler noch den anderen hypothetischen Satz aus: „Es gibt keine Kurve, deren allgemeiner Bogen gleich dem Logarithmus einer beliebigen Funktion ist.“ Ob die Richtigkeit oder Unrichtigkeit dieses Satzes erwiesen, ist uns unbekannt (vgl. *Intermédiaire* VII, 1900, S. 194, und VIII, 1901, S. 182).

2) *De curvis algebraicis, quarum omnes arcus per arcus circulares metiri liceat* (Mém. Acad. St. Pétersb. XI, 1830; vorgelegt 20. Aug. 1781).

$$\varrho = b + \cos\varphi$$

und erhält
$$\omega = \int \frac{\cos\varphi \cdot d\varphi}{b + \cos\varphi} = \varphi - b \int \frac{d\varphi}{b + \cos\varphi}.$$

Wird nun $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ gesetzt und die Konstante $b > 1$ angenommen, so findet sich

$$\int \frac{d\varphi}{b + \cos\varphi} = 2\int \frac{dt}{(b+1) + (b-1)t^2} = \frac{2}{\sqrt{b^2-1}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{b-1}{b+1}}\,t\right);$$

demnach ist
$$\omega = \varphi - \frac{2}{\sqrt{b^2-1}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{b-1}{b+1}}\,t\right).$$

Die entsprechende Kurve wird algebraisch sein, wenn $\frac{2b}{\sqrt{b^2-1}}$ eine rationale Zahl ist. Setzt man daher $\frac{b}{\sqrt{b^2-1}} = n$, so kann man schließen: **Welches auch die rationale Zahl n sein möge, die Gleichungen**

$$\varrho = b + \cos\varphi, \quad \omega = \varphi - \frac{2}{\sqrt{b^2-1}} \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{b-1}{b+1}}\,t\right),$$

wobei
$$t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi \quad \text{und} \quad b = \frac{n}{\sqrt{n^2-1}},$$

stellen in den Polarkoordinaten ϱ und ω eine algebraische Kurve dar, die durch Kreisbogen rektifizierbar ist.

In einer der Akademie der Wissenschaften zu Petersburg am 20. Aug. 1823 vorgelegten Abhandlung hat N. Fuß die Bemerkung gemacht, daß man zu den obigen Kurven auch gelangt, wenn man die Polargleichung derjenigen Kurven aufsucht, bei denen der Abstand des Poles von der Tangente durch $a\varrho - \varrho^2$ ausgedrückt wird, wo a eine gegebene Länge bedeutet.[1]) In der Tat läßt sich diese Aufgabe alsbald auf folgende Differentialgleichung zurückführen

$$\frac{\varrho^2 \cdot d\omega}{\sqrt{d\varrho^2 + \varrho^2 d\omega^2}} = a\varrho - \varrho^2;$$

um sie zu integrieren, schreibe man sie folgendermaßen — indem man mit ds das Bogendifferential bezeichnet —

$$\varrho \cdot d\omega = (a - \varrho)\, ds.$$

Man ersieht dann, daß, weil

$$ds^2 = d\varrho^2 + (\varrho \cdot d\omega)^2,$$

die vorige Gleichung ergibt:

$$ds = \frac{d\varrho}{\sqrt{1 - (a-\varrho)^2}};$$

daher ist $\quad s = \operatorname{arc\,cos}(a - \varrho), \quad$ oder $\quad \varrho = a - \cos s; \quad . \; . \; . \quad (7)$

1) *De curvis algebraicis, quarum singuli arcus arcubus circularibus aequantur* (Mém. Acad. St. Pétersb. XI, 1830).

die erstere beweist, daß die gefundene Kurve durch Kreisbogen rektifizierbar ist.

Man hat ferner, infolge der vorhergehenden Formeln

$$d\omega = \frac{a-\varrho}{\varrho}\,ds = \frac{a-\varrho}{\varrho}\,\frac{d\varrho}{\sqrt{1-(a-\varrho)^2}} = a\,\frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{1-(a-\varrho)^2}}$$

$$-\frac{d\varrho}{\sqrt{1-(a-\varrho)^2}} = a\,\frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{1-(a-\varrho)^2}} - ds$$

daher:

$$\omega + s = a\int\frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{1-(a-\varrho)^2}}.$$

Es ergibt sich nun, wenn $a > 1$, und wenn man

$$t = \sqrt{\frac{1-a+\varrho}{1+a-\varrho}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

setzt, daß

$$\omega + s = \frac{2a}{\sqrt{a^2-1}}\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\,t\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Diese Gleichungen im Verein mit (7) und (8) stellen die gesuchte Kurve dar und zeigen, daß sie von der Eulerschen nicht verschieden ist.

Diese ist nun ein ganz spezieller Fall einer sehr ausgedehnten Klasse von rationalen Kurven, die J. A. Serret in seiner *Mémoire sur les courbes algébriques dont les arcs s'expriment par des arcs de cercle* (Journ. de l'Éc. polyt. XXXV, 1853) kennen gelehrt hat. Wenn wir es für überflüssig erachten, uns hier mit der Kenntnisgabe derselben aufzuhalten, so liegt dies daran, daß eben Serret selbst dieselben sozusagen popularisiert hat, dadurch, daß er sie in zwei seiner bekanntesten Lehrbücher dargelegt hat.[1])

c) Kurven, die vermittelst Hyperbelbogen rektifizierbar sind. Eine Untersuchung solcher Kurven wurde von N. Fuß angestellt, der dazu ohne Zweifel durch die Ideen Eulers veranlaßt wurde.[2]) Man betrachte eine Hyperbel, deren Potenz k^2 und deren Asymptoten den Winkel α bilden. Nehmen wir dann ein orthogonales kartesisches Koordinatensystem, dessen Anfang der Mittelpunkt der Hyperbel und dessen x-Achse die eine Asymptote ist, so kann die Hyperbel selbst durch die Gleichungen dargestellt werden

$$x = \frac{k^2}{v} + v\cos\alpha, \quad y = v\sin\alpha,$$

daher ist

$$\frac{ds}{dv} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2} = \frac{1}{v^2}\sqrt{k^4 - 2k^2v^2\cdot\cos\alpha + v^4};$$

1) *Cours d'algèbre supérieure,* 4. Aufl. I. (Paris, 1877) S. 511—515; Serret-Harnack-Scheffers, II (Leipzig, 1907) S. 315—324, wo insbesondere (S. 320) die Eulerschen Kurven betrachtet und untersucht werden.

2) *De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus hyperbolicos metiri licet* (Nova Acta Petrop. XIV, Petersburg 1805).

und wenn man $v = z^{\frac{n}{2}}$ setzt, hat man

$$ds = \frac{n \cdot dz}{2 z^{\frac{n+2}{2}}} \sqrt{k^4 - 2k^2 z^n \cdot \cos\alpha + z^{2n}};$$

sucht man nun zwei Funktionen p und q von z auf, derart, daß identisch

$$p^2 + q^2 = k^4 - 2k^2 z^n \cdot \cos\alpha + z^{2n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

ist, so bekommt man, wenn man noch setzt

$$x = \frac{n}{2} \int \frac{p \cdot dz}{z^{\frac{n+2}{2}}}, \qquad y = \frac{n}{2} \int \frac{p \cdot dz}{z^{\frac{n+2}{2}}},$$

eine Kurve, die vermittelst Hyperbelbogen rektifizierbar ist. Nun läßt sich die rechte Seite von (10) in $2n$ lineare Faktoren zerlegen, die zu je zweien konjugiert sind; man bilde das Produkt von n derselben, von denen nicht zwei einander konjugiert sind; es sei $\varphi(z) + i\psi(z)$ dieses Produkt, dann ist das der anderen $\varphi(z) - i\psi(z)$. Setzt man also $p + qi = \varphi(z) + i\psi(z)$, so wird $p - qi = \varphi(z) - i\psi(z)$ und Gleichung (10) wird damit befriedigt werden. Es ist also hinreichend, $p = \varphi(z)$ und $q = \psi(z)$ zu nehmen. Berücksichtigt man noch das beliebige Element bei der Bildung des Produktes φ, so sieht man, daß man im allgemeinen $\sum_{k=2}^{k=n-1} \binom{n}{k} = 2^n - 2$ Kurven erhält, welche den Bedingungen des Problems genügen; läßt man nun n variieren, so bekommt man deren unzählig viele.

Siebzehntes Kapitel.

Algebraische Kurven, die durch Ellipsenbogen rektifizierbar sind. Die Kurven von Serret.

167. Weitere Anwendungen der in Nr. **165** dargelegten Methoden wurden von Euler auf solche Kurven gemacht, die durch Ellipsenbogen rektifiziert werden können.[1]) In diesem Falle müßte man (unter Beibehaltung der auf S. 454 angewandten Bezeichnungen) setzen

$$V = \frac{\sqrt{1 + (k^2 - 1)\, v^2}}{\sqrt{1 - v^2}};$$

und daher

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = dv \frac{\sqrt{1 + (k^2 - 1)\, v^2}}{\sqrt{1 - v^2}};$$

---

1) *De innumeris curvis algebraicis, quarum longitudinem per arcus ellipticos metiri licet* (Nova Acta Petrop. V, 1789, vorgelegt am 10. Juni 1776).

dieser Gleichung wird Genüge geleistet, wenn man setzt

$$dx = \frac{p+q}{\sqrt{2(1+v)}}\,dv, \qquad dy = \frac{p-q}{\sqrt{2(1-v)}}\,dv,$$

vorausgesetzt, daß die Funktionen p und q von v identisch der Beziehung genügen

$$p^2 + q^2 - 2pqv = 1 + (k^2 - 1)\,v^2.$$

Z. B. kann man $p = 1$, $q = (k+1)v$ nehmen und erhält so

$$dx = \frac{1+(k+1)v}{\sqrt{2(1+v)}}\,dv, \qquad dy = \frac{1-(k+1)v}{\sqrt{2(1-v)}}\,dv,$$

daher ist

$$x = \tfrac{1}{3}\Big[1 - 2k + (k+1)v\Big]\sqrt{2(1+v)},$$

$$y = \tfrac{1}{3}\Big[2k - 1 + (k+1)v\Big]\sqrt{2(1-v)},$$

womit eine Kurve sechster Ordnung dargestellt ist. — Dieselbe Frage läßt sich in verschiedener Weise behandeln.[1]) Die Gleichungen

$$dx = \sqrt{1 + \frac{m^2 z^2}{1-z^2}}\cos\varphi \cdot dz, \qquad dy = \sqrt{1 + \frac{m^2 z^2}{1-z^2}}\sin\varphi \cdot dz$$

stellen offenbar eine durch Ellipsenbogen rektifizierbare Kurve dar, wenn $\varphi = \varphi(z)$ in der Art bestimmt ist, daß x und y in endlichen Ausdrücken erhalten werden können. Um dies einzusehen, setze man $z = \sin\vartheta$; die vorigen Gleichungen werden dann:

$$dx = \sqrt{\cos^2\vartheta + m^2\sin^2\vartheta}\,\cos\varphi \cdot d\vartheta,$$

$$dy = \sqrt{\cos^2\vartheta + m^2\sin^2\vartheta}\,\sin\varphi \cdot d\vartheta.$$

Man stelle nun zwischen ϑ und einem neuen Winkel ω die Beziehung auf, daß

$$\operatorname{tg}\omega = m\operatorname{tg}\vartheta; \quad \text{daher ist} \quad \frac{d\omega}{\cos^2\omega} = m\frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta},$$

und man erhält:

$$dx = \frac{\cos\vartheta \cdot \cos\varphi}{\cos\omega}\cdot d\vartheta, \qquad dy = \frac{\cos\vartheta \cdot \sin\varphi}{\cos\omega}\cdot d\vartheta.$$

Setzen wir daher $\varphi + \omega = n\vartheta$ und eliminieren φ und ω, so ergibt sich

$$dx = d\vartheta\Big[\cos\vartheta \cdot \cos n\vartheta + m\sin\vartheta \cdot \sin n\vartheta\Big],$$

$$dy = d\vartheta\Big[\cos\vartheta \cdot \sin n\vartheta - m\sin\vartheta \cdot \sin n\vartheta\Big].$$

Integriert man, so findet sich, abgesehen von unwichtigen Konstanten,

$$x = \frac{m+1}{n-1}\sin(n-1)\vartheta - \frac{m-1}{n+1}\sin(n+1)\vartheta,$$

$$y = -\frac{m+1}{n-1}\cos(n-1)\vartheta + \frac{m-1}{n+1}\cos(n+1)\vartheta.$$

1) Euler, *De lineis curvis, quarum rectificatio per datam quadraturam mensuratur* (L. Euleri Opera postuma I, Petropoli, 1862, S. 439—452).

Diese Gleichungen stellen nun (vgl. das bez. Kap. des folgenden Abschn.) Epizykloiden dar, die algebraisch sind, wenn n eine rationale Zahl ist; **folglich sind alle algebraischen Epizykloiden rektifizierbar durch Ellipsenbogen.**

168. Die Untersuchung der durch elliptische Integrale rektifizierbaren Kurven beschäftigte außer Euler auch Legendre, der eine Kurve sechster Ordnung mit dieser Eigenschaft fand[1]); ferner J. A. Serret, der sich die Aufgabe stellte, alle rationalen Kurven mit dieser Eigenschaft zu bestimmen; er betrachtete dieses Problem als Spezialfall der Bestimmung zweier Funktionen $x(z), y(z)$, die der Bedingung genügen

$$dx^2 + dy^2 = Z \cdot dz^2,$$

wo Z eine rationale Funktion von z ist[2]). Wird

$$Z = \frac{c^2 z^{2n}}{\sqrt{(z-a)(z-\alpha) \cdot (z-b)(z-\beta)}}$$

gesetzt, wo a und α, b und β zwei Paare konjugiert imaginärer Zahlen sind, so geht die Aufgabe auf die von Euler schon behandelte zurück. Da in diesem Falle der Kurvenbogen s ein elliptisches Integral der Variabeln z wird, so ist z eine doppeltperiodische Funktion von s, demnach werden auch x und y doppeltperiodische Funktionen des Bogens sein. **Die Kurven von Serret erfreuen sich also der Eigentümlichkeit, daß ihre Koordinaten doppeltperiodische Funktionen des Bogens sind**; es läßt sich beweisen, daß sie die allgemeinsten rationalen Kurven von dieser Eigenschaft sind[3]). Wir können uns hier weder mit dem Beweise des Satzes aufhalten, noch mit der Wiedergabe der feinsinnigen Betrachtungen, die Serret angestellt hat, um

1) *Traité des fonctions elliptiques* I. (Paris, 1827) S. 35. — Die Legendresche Kurve 6ter Ordnung wird durch die Gleichungen dargestellt:

$$x = h \sin\varphi \left(1 + \frac{m}{3}\sin^2\varphi\right), \qquad y = bh\cos\varphi\left(1 + m - \frac{m}{3}\cos^2\varphi\right),$$

wo

$$m = \frac{3k^2}{1-k^2}, \qquad h = \frac{1-2k^2}{b^2};$$

infolgedessen ist

$$s = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{k^2}{b^2}\sin\varphi \cdot \cos\varphi \cdot \Delta(\varphi).$$

2) *Mémoire sur la rappresentation des fonctions elliptiques et hyperelliptiques* (Liouvilles Journ. X, 1845); *Développements sur une classe d'équations relatives à la représentation géométrique des fonctions elliptiques* (Das.); *Notes sur les courbes elliptiques de première classe* (Das.); *Théorie géométrique de la lemniscate et des courbes elliptiques de la première classe* (Das. XI, 1846). Vgl. auch Serret-Harnack-Scheffers, II (Leipzig, 1907) S. 310—315.

3) Krohs, *Die Serret'schen Kurven sind die einzigen algebraischen vom Geschlechte Null, deren Koordinaten eindeutige doppelt-periodische Funktionen des Bogens der Kurve sind* (Dissert. Halle a. S., 1891).

die Gleichungen unzähliger Kurven mit der obigen Eigenschaft zu erhalten, noch des Verfahrens, durch welches Liouville die Tragweite der von jenem erhaltenen Schlußfolgerungen noch erweiterte[1]). Wir beschränken uns darauf, folgenden Satz wiederzugeben, der einen kleinen Teil jener Schlußfolgerungen zusammenfaßt: „Wenn man mit x, y die Koordinaten eines Kurvenpunktes bezeichnet, und man setzt

$$x + iy = Ce^{i\omega}\int \frac{(z-a)(z+a)^n}{(z-\alpha)^2(z+\alpha)^{n+1}}\,dz$$

oder

$$x + iy = Ce^{i\omega}\,\frac{(z+a)^{n+1}}{(z-\alpha)(z+\alpha)^n}\cdot \textit{Konst.},$$

wo C und ω beliebige Konstanten sind, a und α komplexe konjugierte Zahlen sind und n eine reelle Zahl, die mit jenen Konstanten durch die Gleichung $\frac{(a+\alpha)^2}{4a\alpha} = \frac{n}{n+1}$ verbunden ist, so erhält man die parametrische Darstellung einer rationalen Kurve, deren Bogen durch $C\int \frac{dz}{\sqrt{(z^2-a^2)(z^2-\alpha^2)}}$ ausgedrückt wird.“ Alle so entstehenden Kurven bilden das, was Serret erste Klasse der elliptischen Kurven nannte; sie sind Verallgemeinerungen der Lemniskate, welche Kurve man erhält, indem man $n = 1$ setzt. Serret selber machte die Bemerkung, daß es „pour ces courbes une mode de génération de suprème élégance“ gibt, „qui peut servir à definir les courbes elliptiques de la première classe, dont la théorie deviendra, dès lors entièrement indépendente des considérations analytiques, qui les ont fait découvrir.“ Unsere nun folgenden Auseinandersetzungen werden die Richtigkeit dieser Ansicht dartun und die geometrische Bedeutung der Serretschen Kurven erster Klasse außer Frage setzen.

„Gegeben sind ein fester Punkt O und eine feste Gerade r, die wir als durch O gehend annehmen können (Taf. XIV, Fig. 117); außerdem ist eine Strecke a und eine reelle positive Zahl n gegeben. Ein veränderliches Dreieck OPM hat eine Ecke in O und die beiden Seiten OP und OM von konstanter Länge und zwar $OP = a\sqrt{n}$, $PM = a\sqrt{n+1}$; sind nun die Winkel $POM = \alpha$, $PMO = \beta$, mit dem Winkel φ, den die Seite OM des beweglichen Dreiecks mit der festen Geraden r bildet, durch die Relation verknüpft:

$$\pm\varphi = n\alpha - (n+1)\beta, \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

so ist der geometrische Ort des Punktes M eine elliptische Kurve erster Klasse.“ Um dies zu beweisen, nehmen wir der Einfachheit halber an, daß $a = 1$; wird $OM = \varrho$ gesetzt, so ergibt das Dreieck OMP:

1) Liouvilles Journ. X, 1845, S. 351—363.

$$\cos\alpha = \frac{\varrho^2 - 1}{2\varrho\sqrt{n}}, \qquad \cos\beta = \frac{\varrho^2 + 1}{2\varrho\sqrt{n+1}}, \quad \ldots \quad (2)$$

oder aber

$$\left.\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{\triangle}{2\varrho\sqrt{n}}, \qquad \sin\beta = \frac{\triangle}{2\varrho\sqrt{n+1}}, \\ \triangle &= \sqrt{-\varrho^n + 2(2n+1)\varrho^2 - 1}; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2')$$

wo (s. o.)

daraus folgt dann

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{n}{n+1}} \quad \ldots \quad (3)$$

Nehmen wir O als Pol und r als Polarachse, so ergibt sich die Polargleichung des Ortes der Punkte M durch Elimination der Winkel α, β aus der Gleichung (1) und den Gleichungen (2) oder (2′). Die Elimination läßt sich ausführen, wenn n rational ist, und zeigt dann, daß die resultierende Kurve algebraisch wird.

Ist z. B. $n = 1$, so hat man der Reihe nach

$$\pm\varphi = \alpha - 2\beta, \quad \cos\varphi = \cos\beta\cdot\cos(\alpha-\beta) + \sin\beta\cdot\sin(\alpha-\beta),$$

$$\cos\alpha = \frac{\varrho^2-1}{2\varrho}, \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{-\varrho^4+6\varrho^2-1}}{2\varrho}; \qquad \cos\beta = \frac{\varrho^2+1}{2\sqrt{2}\varrho},$$

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{-\varrho^4+6\varrho^2-1}}{2\sqrt{2}\varrho}, \qquad \sin(\alpha-\beta) = \frac{\sqrt{-\varrho^4+6\varrho^2-1}}{2\sqrt{2}\varrho},$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \frac{3\varrho^2-1}{2\sqrt{2}\varrho^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{\varrho^4+4\varrho^2-1}{4\varrho^3};$$

zu kartesischen Koordinaten übergehend erhält man die Gleichung

$$(x^2+y^2)^2 - 4x(x^2+y^2) + 4(x^2+y^2) - 1 = 0,$$

welche eine Lemniskate darstellt, deren Mittelpunkt die Koordinaten 0,1 hat.

Kehren wir jetzt zu dem allgemeinen Falle zurück, um zu bemerken, daß aus der Gleichung (2′) durch Differenzieren und darauf folgende Anwendung von (2) sich ergibt:

$$\frac{d\alpha}{\cos\beta} = \frac{-2d\varrho}{\sqrt{n+1}\,\triangle}; \qquad \frac{d\beta}{\cos\alpha}\varphi = \frac{-2d\varrho}{\sqrt{n}\,\triangle} \quad \ldots \quad (4)$$

und diese beiden, kombiniert mit (1), führen zu der Gleichung

$$\pm d\varphi = \frac{\varrho^2-(2n+1)}{\triangle}\,\frac{d\varrho}{\varrho}, \quad \ldots \quad (5)$$

und weil im allgemeinen

$$ds^2 = d\varrho^2 + \varrho^2 d\varphi^2,$$

so ist im vorliegenden Falle

$$\pm ds = \frac{2\sqrt{n(n+1)}}{\triangle}\cdot d\varrho; \quad \ldots \quad (6)$$

Unter Benutzung von (4) können wir auch schreiben

$$\pm ds = \sqrt{n}\frac{d\alpha}{\cos\beta} = \sqrt{n+1}\frac{d\beta}{\cos\alpha} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Zweckmäßig setzt man nun $k = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$; Gleichung (3) wird dann $\sin\beta = k\sin\alpha$, und die Gleichung (7) liefert uns dann

$$\pm ds = \sqrt{n}\frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\alpha}}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

diese zeigt uns, daß der Kurvenbogen s des Ortes der Punkte M durch ein elliptisches Integral I. Gattung ausgedrückt wird; w. z. b. w.

Die voraufgehenden Formeln lassen auch einige Eigenschaften der betrachteten Kurven deutlich erkennen. Man hat nämlich

$$\text{Dreieck } OMP = \frac{1}{2}\sqrt{n}\sqrt{n+1}\cdot\sin(\alpha+\beta) = \frac{1}{4}\triangle;$$

$$\frac{1}{2}\int\varrho^2\cdot d\varphi = \frac{1}{4}\int\frac{4\varrho^3 - 4(2n+1)\varrho}{2\triangle}\cdot d\varrho = \frac{1}{4}\triangle + const.$$

Folglich: **Die Fläche des Kurvensektors, gerechnet von der Polarachse aus, ist gleich dem Inhalte des erzeugenden Dreiecks, wenn eine Ecke desselben im Endpunkte des Bogens jenes Sektors liegt.** Außerdem folgt aus (2) und (2′)

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\triangle}{2\sqrt{n(n+1)}}, \qquad \cos(\alpha+\beta) = \frac{\varrho^2 - (2n+1)}{2\sqrt{n(n+1)}},$$

oder wegen (6) und (7)

$$\sin(\alpha+\beta) = \pm\frac{ds}{d\varrho}, \qquad \cos(\alpha+\beta) = \pm\varrho\frac{d\varrho}{ds},$$

und dies zeigt, **daß die Neigung der Normalen gegen den Radiusvektor gleich dem Winkel $\alpha+\beta$ ist, oder gleich seinem Supplementwinkel.** Wenn man also, im ersten Falle, den Winkel $PMN = \sphericalangle POM$ macht, so wird MN die Kurvennormale in M sein. Andererseits ist MN die Tangente in M an den dem Dreiecke MOP umbeschriebenen Kreis; daher wird die Gerade, welche M mit dem Zentrum C dieses Kreises verbindet, Tangente in M an die fragliche Kurve sein. Im Falle, daß der Neigungswinkel der Normalen gegen den Radiusvektor $= \pi - (\alpha+\beta)$ wäre, müßte man das zu OMP in bezug auf M symmetrische Dreieck betrachten, um die vorigen Schlußfolgerungen zu erweitern, und gelangt so leicht zu dem Resultate: **Ist ein fester Punkt O gegeben und variiert das Dreieck OMP in der Weise, daß immer $OM = a\sqrt{n}$, $MP = a\sqrt{n+1}$, und daß außerdem die unendlich kleine Verschiebung MM' des Punktes M immer in der Richtung geschieht, die den Punkt M mit dem Mittelpunkte des dem Dreiecke umbeschriebenen Kreises verbindet, so erzeugt der Punkt M eine zur Zahl n gehörige elliptische Kurve I. Spezies.**

J. Liouville[1]) hat bemerkt, daß der Ort der Punkte M durch die folgenden Gleichungen dargestellt werden kann:

$$x = \frac{\cos 2n\varphi - 2\sqrt{n}\sin\varphi\cdot\cos(2n+1)\varphi}{1 - 4\sqrt{n}\sin\varphi\cdot\cos\varphi + 4n\sin^2\varphi}$$

$$y = \frac{\sin 2n\varphi - 2\sqrt{n}\sin\varphi\cdot\sin(2n+1)\varphi}{1 - 4\sqrt{n}\sin\varphi\cdot\cos\varphi + 4n\sin^2\varphi};$$

daraus kann man mit Allégret[2]) folgern, daß **die Kurve die Inverse einer speziellen Epizykloide ist.**

Aus dem Vorhergehenden kann man entnehmen, daß der Winkel ε zwischen der Kurvennormale und der Polarachse durch $\varepsilon = \varphi - (\alpha - \beta)$ gegeben wird. Demnach ist der Kontingenz-Winkel gegeben durch $d\varepsilon = d\varphi - (d\alpha + d\beta) = (n-1)d\alpha - n d\beta$, oder

$$d\varepsilon = \frac{3\varrho^3 - (2n+1)}{\triangle}\,\frac{d\varrho}{\varrho};$$

daraus folgt, daß der Krümmungsradius R gegeben ist durch

$$R = \frac{2\sqrt{n(n+1)}\cdot\varrho}{3\varrho^2 - (2n+1)};$$

die Wendepunkte der fraglichen Kurve liegen daher auf dem Kreise um O mit dem Radius $\sqrt{\frac{2n+1}{3}}$ [3]).

Achtzehntes Kapitel.

Algebraische Kurven, die vermittelst Lemniskatenbogen rektifizierbar sind. Die Sinusspiralen.

169. Da die Lemniskate durch spezielle elliptische Funktionen rektifizierbar ist, so ist die Untersuchung derjenigen Kurven, die durch Lemniskatenbogen rektifizierbar sind, nur ein spezieller Fall der im vorigen Kapitel behandelten. Dennoch lohnt es der Mühe, sich mit diesen besonders zu beschäftigen, um zu zeigen, wie Euler hierauf die Betrachtungen in Nr. **165** angewendet hat[4]). Es ist klar, daß die Gleichungen

$$dx = \frac{a^2\cdot dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}\cos\varphi, \qquad dy = \frac{a^2\cdot dz}{\sqrt{a^4 - z^4}}\sin\varphi$$

1) Journ. de Math. X, 1845, S. 295.

2) S. die S. 453 angef. Abh. in Ann. Ec. norm. sup., 2e Sér., II, 1873, S. 180.

3) Bezügl. weiterer Untersuchungen über die fraglichen Kurven s. L. Kiepert, *De curvis, quarum arcus integralibus ellipticis primi generis exprimitur* (Dissert. Berlin, 1870).

4) *De lineis curvis quarum rectificatio per datam quadraturam mensuratur* No. 7—13 (L. Euleri opera postuma I, Petropoli 1862).

eine der gesuchten Kurven darstellen, wofern nur $\varphi = \varphi(z)$ in geeigneter Weise gewählt wird. Um diese Wahl zu definieren, setzen wir

$$z^2 = a^2 \sin d\vartheta;$$

wir erhalten dann

$$\frac{2\,dx}{a} = \frac{\cos\varphi \cdot d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta}}, \qquad \frac{2\,dy}{a} = \frac{\sin\varphi \cdot d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta}};$$

nehmen wir außerdem an, daß $\varphi = n\vartheta$, so ergibt sich

$$x = \frac{a}{2}\int\frac{\cos n\vartheta \cdot d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta}}, \qquad y = \frac{a}{2}\int\frac{\sin n\vartheta \cdot d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta}}; \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Um die Integrierbarkeit dieser Formeln beurteilen zu können, setzen wir

$$\varphi(n) = \int\frac{\cos n\vartheta \cdot d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta}}, \qquad \psi(n) = \int\frac{\sin n\vartheta \cdot d\vartheta}{\sqrt{\sin\vartheta}};$$

integrieren wir nun teilweise, so erhalten wir folgende Reduktionsformeln:

$$\varphi(n) = \frac{4}{2n-1}\sqrt{\sin\vartheta}\cdot\cos(n-1)\vartheta + \frac{2n-3}{2n-1}\varphi(n-2),$$

$$\psi(n) = \frac{4}{2n-1}\sqrt{\sin\vartheta}\cdot\sin(n-1)\vartheta + \frac{2n-3}{2n-1}\psi(n-2),$$

die beweisen, daß, wenn die Integration für einen gewissen Wert $\bar{n}$ von n ausführbar ist, sie für alle Werte $\bar{n} - 2k$ es ist. Überdies kann die Untersuchung der Integrierbarkeits-Bedingung auch ausgeführt werden, indem man der Reihe nach aus (1) folgende Gleichungen ableitet:

$$\frac{2(x+iy)}{a} = \int\frac{e^{in\vartheta}\cdot d\vartheta}{\sqrt{\dfrac{e^{i\vartheta}-e^{-i\vartheta}}{2i}}} = \sqrt{2i}\int\frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)\vartheta}\cdot d\vartheta}{\sqrt{e^{2i\vartheta}-1}};$$

setzen wir nun

$$e^{i\vartheta} = t,$$

so können wir schreiben

$$\frac{2(x+iy)}{a} = \frac{\sqrt{2i}}{i}\int t^{\left(n-\frac{1}{2}\right)}\cdot(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot dt;$$

wendet man nun die Theorie der binomischen Differentiale an, so sieht man: damit die Integration ausführbar sei, muß n von der Form $2k + \frac{1}{2}$ sein. Demnach: **Wenn $n = 2k + \frac{1}{2}$, so stellen die Formeln (1) eine algebraische Kurve dar, die durch Lemniskatenbogen rektifizierbar ist.**

Die Rektifikation der Lemniskate hat jedoch noch in ganz anderer Weise zu neuen algebraischen Kurven geführt, zu denjenigen nämlich, mit denen wir jetzt unsere Leser bekannt machen wollen.

170. Erinnern wir uns der Definition der Eulerschen Integrale I. und II. Spezies

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\cdot dx,\qquad \Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}\cdot dx,$$

sowie der sie verknüpfenden Relation

$$B(p,q)=\frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

und setzen hierin $x=\sin^2\omega$, $p=\frac{m}{2}$, $q=\frac{n}{2}$, so erhalten wir die Identität

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{m-1}\omega\cdot\cos^{n-1}\omega\cdot d\omega=\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}.\quad\ldots\quad(2)$$

Unter der Voraussetzung, daß $m=n$, und wenn man $2\omega=\vartheta$ setzt, bekommt man

$$\int_0^\pi\sin^{m-1}\vartheta\cdot d\vartheta=2^{m-1}\frac{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma(m)};$$

und da man leicht einsieht, daß

$$\int_0^\pi\sin^{m-1}\vartheta\cdot d\vartheta=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m-1}\vartheta\cdot d\vartheta,$$

so schließt man, daß

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m-1}\vartheta\cdot d\vartheta=2^{m-2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma(m)}.\quad\ldots\ldots\quad(3)$$

Nachdem dieses vorausgeschickt, holen wir die Polargleichung der Lemniskate hervor

$$\varrho^2=\frac{(2a)^2}{2}\cos 2\omega;\quad\ldots\ldots\ldots\quad(4)$$

bezeichnet s den Bogen dieser Kurve, so haben wir

$$\left(\frac{ds}{d\omega}\right)^2=\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2=\frac{2a^2}{\cos 2\omega},\quad\text{und}\quad s=a\sqrt{2}\int(\cos 2\omega)^{-\frac{1}{2}}\cdot d\omega.$$

Der Gesamtumfang s_2 der Lemniskate ist das Vierfache vom Werte dieses Integrals, genommen zwischen den Grenzen $\omega=0$ und $\omega=\frac{\pi}{4}$; demnach ist

$$s_2=4a\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\omega)^{-\frac{1}{2}}\cdot d\omega,$$

oder wenn $2\omega=\vartheta$ gesetzt wird

$$s_2 = 2a\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\vartheta)^{-\frac{1}{2}} \cdot d\vartheta;$$

wenden wir nun die Gleichung (3) an, so ergibt sich

$$s_2 = a \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Dies liefert den Gesamtumfang der Lemniskate, ausgedrückt durch Eulersche Integrale I. Spezies. J. A. Serret, der diesen beachtenswerten Ausdruck gefunden, hat bemerkt, daß die Lemniskate zu einer ganzen Klasse von Kurven mit dieser Eigenschaft gehöre.[1]) Es sind diese — wenn n eine ganze positive Zahl ist — die Kurven mit der Polargleichung:

$$\varrho^n = \frac{(2a)^n}{2} \cos n\omega \,.\; ^{2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Setzen wir hierin $n = 1$, so erhalten wir den Kreis mit dem Durchmesser a, dessen Umfang $s_1 = \pi a$ ausgedrückt wird durch die der Gleichung (5) analoge:

$$s_1 = a \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} \cdot$$

Im allgemeinen Falle liefert Gleichung (6)

$$s = 2^{1-\frac{1}{n}} a \int (\cos n\omega)^{\frac{1}{n}-1} \cdot d\omega \,.$$

Den Gesamtumfang s_n der Kurve bekommt man, wenn man den Wert dieses Integrales, genommen zwischen den Grenzen $\omega = 0$ und $\omega = \frac{\pi}{2}$, mit $2n$ multipliziert; er ist daher

$$s_n = 2n \cdot 2^{1-\frac{1}{n}} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} (\cos n\omega)^{\frac{1}{n}-1} \cdot d\omega;$$

setzen wir nun $n\omega = \vartheta$, so wird er zu

$$s_n = 2^{2-\frac{1}{n}} \cdot a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\vartheta)^{\frac{1}{n}-1} \cdot d\vartheta,$$

---

1) *Note sur les intégrales eulériennes de seconde espèce* (Liouvilles Journ. VII, 1842).

2) Nach Nr. **155** besitzen sie n Symmetrieachsen. Es ist leicht einzusehen, daß ihre Ordnung $2n$ ist; wäre n negativ, so würde die Ordnung $-n$ sein; (vgl. S. 475).

und daher mit Benutzung von (3)

$$s_n = a \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

welche Gleichung vollständig analog zu (5) ist, und sich mit dieser indentifiziert, wenn $n = 2$.

Wir können noch hinzufügen, daß man verwandte Ausdrücke für die Fläche der Kurve (6) aufstellen kann.[1]) Da nämlich die Fläche eines Sektors gegeben ist durch

$$\frac{1}{2}\cdot 2^{\frac{2(n-1)}{n}} \cdot a^2 \int (\cos n\omega)^{2n} \cdot d\omega,$$

so ist die ganze von der Kurve umschlossene Fläche S_n gleich dem $2n$-fachen dieses Ausdruckes, genommen zwischen den Grenzen $\omega = 0$ und $\omega = \frac{\pi}{2n}$; also

$$S_n = n \cdot 2^{\frac{2(n-1)}{n}} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2n}} (\cos n\omega)^{\frac{2}{n}} \cdot d\omega;$$

setzen wir nun $n\omega = \vartheta$ und benutzen (3), so ergibt sich:

$$S_n = 2^{\frac{2(n-1)}{n}} \cdot a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\vartheta)^{\frac{2}{n}} \cdot d\vartheta = 2a^2 \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n} + 1\right)}.$$

Es ist aber

$$\Gamma\left(\frac{1}{n} + 1\right) = \frac{2}{n}\Gamma\left(\frac{2}{n}\right); \quad \Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{n}-1}} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}$$

und daher

$$S_n = 2^{\frac{2(n-2)}{n}} n\pi a^2 \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

welches eben der angekündigte Ausdruck ist. Für $n = 1$ bekommt man $S_1 = \frac{\pi a^2}{4}$, also die Fläche des Kreises mit dem Durchmesser a; für $n = 2$, $S_2 = 2a^2$, die Fläche der Lemniskate (vgl. Nr. **94**). — Die Gleichungen (7) und (8) zeigen, daß die durch die Gl. (6) dargestellten Kurven zur Darstellung der Eulerschen Integrale II. Spezies dienen können, sowohl durch ihre Fläche als auch durch ihren Umfang.

---

1) G. Loria, *Integrali euleriani e spirali sinusoidi* (Prager Ber., 1897).

Schon vor Serret wurden dieselben Kurven von Maclaurin[1]) betrachtet und untersucht; nach ihm wurden so viele schöne Eigenschaften an ihnen entdeckt, daß man es für angebracht hielt, sie mit einem besonderen Namen zu bezeichnen: den Vorzug gibt man allgemein dem Namen Sinusspiralen (spirales sinusoïdes), der von Hâton de la Goupillière erdacht wurde[2]) und den wir annehmen wollen, ohne über seine Trefflichkeit zu diskutieren; die Zahl n nennt man den Index der Kurve.[3])

Setzt man in der Gleichung (6)

$$\varrho = \frac{k^2}{\varrho_1}, \qquad \omega = \omega_1,$$

so erhält man

$$\varrho_1^{-n} = \frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{2a}\right)^{-n} \cos(-n)\,\omega_1;$$

Daraus folgt: **Die Inverse einer Sinusspirale ist eine zweite Sinusspirale.**

Wir wollen jetzt die hauptsächlichsten Sätze über die Sinusspiralen angeben, nachdem wir die Bemerkung voraufgeschickt haben, daß es von nun an nicht mehr wie im vorigen notwendig ist, anzunehmen, daß die Zahl n ganz und positiv sei; allerdings ist die entsprechende Kurve nur dann algebraisch, wenn n rational ist.[4])

---

1) *A treatise of fluxions* I (Edinburgh 1742) S. 330 und 351; *Traité des fluxions*, *trad. Pezenas* (Paris 1747) S. 264 u. 285. Maclaurin erhält daselbst diese Kurven, indem er die Transformation

$$\varrho' = \varrho^n, \quad \omega' = n\omega$$

auf den Kreis

$$\varrho' = \alpha^n \cos\omega'$$

anwendet; wendet man dieselbe Transformation auf einen Kreis in beliebiger Lage an, so erhält man eine Klasse allgemeiner Kurven, welche Allégret in einer öfter zitierten Abhandlung unter dem Namen *cyclogénides* erforscht hat, und die wir schon auf S. 446 als Kassinoiden mit n Brennpunkten kennen gelernt, und denen wir sogleich wieder begegnen werden.

2) *Note sur les courbes que représent l'équation* $\varrho^n = A \sin n\omega$ (Nouv. Ann. Mathém. 2. Ser. XV, 1876). Dort sowohl, als auch in den neueren *Notes bibliographiques* (Das. 3. Ser. XVII, 1898) desselben Geometers wird der Leser viele bibliographische Daten über die fraglichen Kurven finden. Wahrscheinlich hat Hâton de la Goupillière den Namen „spirale sinusoïde" vorgeschlagen, indem er eine von T. Olivier in seinem *Cours de géométrie descriptive* gegebene Bezeichnung in einem ganz anderen Sinne brauchte (Paris, 1853, II. Aufl. S. 293).

3) Ribaucour (*Etudes sur les élassoïdes* etc. Belg. Mém. XLIV, 4°, 1881) wandte dagegen den Namen Lamésche Spiralen an, um daran zu erinnern, daß dieser große Geometer schon 1836 (Liouvilles Journ. I, S. 86) über sie geschrieben hat; die Benennung Orthogénide rührt von Allégret her (o. a. *Mémoire sur la représentation des transcendentes par des arcs de courbes*, Ann. de l'Éc. norm. sup. 2e Ser. II, 1873, S. 167).

4) Dieser Kurvenklasse gehören mehrere schon bekannte Linien, d. h.: $n = 1$ Kreis; $n = -1$ Gerade; $n = 2$ eine Bernoullische Lemniskate; $n = -2$ gleich-

Wenn μ der Winkel der Kurventangente mit dem Radiusvektor ist, so hat man im allgemeinen $\operatorname{tg}\mu = \varrho : \frac{d\varrho}{d\omega}$, daher wegen Gl. (6)

$$\operatorname{tg}\mu = -\operatorname{ctg} n\omega, \quad \text{oder auch} \quad \mu = \frac{\pi}{2} + n\omega;$$

dies besagt: **Wenn bei einer Sinusspirale der Radiusvektor gleichförmig um den Pol rotiert, so dreht sich die Tangente gleichförmig um den Berührungspunkt.**[1]) Es ist natürlich gestattet in dem obigen Satze das Wort „Tangente“ durch „Normale“ zu ersetzen; daher entsteht die Vermutung, daß die Sinusspiralen die vom Grafen von Fagnano vergeblich gesuchten Kurven seien[2]), welche die Eigenschaft haben, „daß die Winkel, welche die von einem festen Punkte ausgehenden Sehnen mit der Achse bilden, in einem konstanten Verhältnisse stehen zu den Winkeln, welche die Normalen in den Endpunkten der Sehnen mit derselben Achse bilden.“ Daß diese Vermutung sich mit der Wirklichkeit deckt, kann man durch folgende kurze Rechnung zeigen.[3]) Nennen wir ϱ, ω die Koordinaten eines Punktes M der gesuchten Kurve, μ den Winkel der zugehörigen Tangente mit dem Radiusvektor im Berührungspunkte und k den Wert des konstanten Verhältnisses, so ergeben die Bedingungen des Problems (vgl. Fig. 118 auf Taf. XIV) die Gleichung

$$k\omega = \omega + \frac{\pi}{2} - \mu, \quad \text{oder} \quad (k-1)\omega = \frac{\pi}{2} - \mu;$$

daraus folgt

$$\operatorname{ctg}(k-1)\omega = \operatorname{tg}\mu = \varrho : \frac{d\varrho}{d\omega}.$$

Schreiben wir diese Gleichung wie folgt

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \operatorname{tg}(k-1)\omega \cdot d\omega,$$

so sind die Variabelen getrennt, und durch Integrieren ergibt sich

$$\log\varrho + \frac{1}{k-1}\log\cos(k-1)\omega = c,$$

oder auch

$$\varrho^{1-k} = c^{1-k}\cos(1-k)\omega.$$

---

seitige Hyperbel; $n = -\frac{1}{2}$ Parabel; $n = \frac{1}{2}$ Kardioide. Kurven, die allgemeiner sind als die Sinusspiralen, und die Polargleichungen haben

$$\varrho = \sin^n m\omega \quad \text{oder} \quad \varrho = \cos^n m\omega$$

kommen in der darstellenden Geometrie vor. M. s. F. J. (Gabriel Marie), *Exercises de géométrie déscriptive*, 3. Aufl. (Tours et Paris, 1893) S. 785.

1) Laquière, *Quelques propriétés d'une classe des courbes spirales* (Nouv. Ann. Math. 3e Ser. II, 1883), wo der Name spirales à inflexion proportionelle angewandt wird.

2) *Produzioni matematiche* II. (Pesaro, 1750) S. 375—412.

3) Vgl. den S. 469 zitierten Aufsatz des Verf.

Somit ist, da diese Gleichung von der Form (6) ist, bewiesen, daß die Kurven des Fagnano Sinusspiralen sind.

Wenn n eine positive ganze Zahl ist, so können unsere Kurven noch in anderer Weise definiert werden. Es seien $ae^{\frac{2ik\pi}{n}}$ $(k = 0, 1, 2 \ldots n-1)$ die n komplexen Zahlen, welche die Ecken A_k eines regelmäßigen Vielecks darstellen, $\varrho e^{i\omega}$ die einem Punkte M der Ebene entsprechende Zahl, dann ist

$$\overline{A_0 M}^2 \cdot \overline{A_1 M}^2 \ldots \ldots \overline{A_{n-1} M}^2 =$$
$$\prod_{k=0}^{k=n-1} \left(\varrho^2 - 2a\varrho\cos\left(\omega - \frac{2k\pi}{n}\right) + a^2\right) = \varrho^{2n} - 2a^n\varrho^n\cos n\omega + a^{2n};$$

daraus leitet sich ab, daß der Ort der Punkte M so beschaffen ist, daß

$$\overline{A_0 M} \cdot \overline{A_1 M} \ldots \ldots \overline{A_{n-1} M} = b^n$$

und als Polargleichung hat:

$$\varrho^{2n} - 2a^n\varrho^n\cos n\omega + a^{2n} = b^{2n}. \qquad (*)$$

Im speziellen hat man für $b = a$ die Gleichung

$$\varrho^n = 2a^n\cos n\omega,$$

welche im wesentlichen mit (6) zusammenfällt. Folglich: **Eine Sinusspirale mit ganzzahligem Index n ist eine spezielle Kassinoide mit n Brennpunkten** (vgl. Nr. **161**), **d. h. der Ort derjenigen Punkte der Ebene eines regulären n-Ecks, deren Abstände von den Ecken des Vielecks ein Produkt geben, gleich der n^{ten} Potenz des Radius des dem Vielecke umbeschriebenen Kreises**[1]).

171. Bezeichnen wir nun mit R den Krümmungsradius der Kurve (6) und mit ν den Winkel der Normalen mit dem Radiusvektor, so haben wir

$$R = \frac{2^{\frac{n-1}{n}} a}{n+1} (\cos n\omega)^{\frac{1-n}{n}}, \qquad \cos\nu = \cos n\omega \quad . \; . \; . \quad (9)$$

und daher

$$R\cos\nu = \frac{\varrho}{n+1}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10)$$

welche Gleichung folgenden Satz beweist: **Bei jeder Sinusspirale ist das Verhältnis der Projektion des Krümmungsradius auf den Radiusvektor zum Radiusvektor selbst ein konstantes.** Es sei $\varrho - \varrho'$ die genannte Projektion; da nun wegen (10) $\varrho - \varrho' = \frac{\varrho}{n+1}$ ist, so haben

---

1) Man kann bemerken, daß die Gleichung (*) des Textes für $b = \varrho$ wird:

$$2\varrho n\cos n\omega = a^n,$$

die eine Sinusspirale mit Index $-n$ darstellt; daraus folgt eine leicht in Worten ausdrückbare Definition dieser Kurven.

wir $\varrho' = \frac{n\varrho}{n+1}$, und die Gleichung (6) wird dann

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \varrho'^n = \frac{(2a)}{2} \cos n\omega, \quad \text{oder auch } \varrho'^n = \frac{1}{2}\left(\frac{2na}{n+1}\right)^n \cos n\omega.$$

Da diese Gleichung von derselben Form wie (6) ist, so sieht man: **Bei einer Sinusspirale ist der Ort der Projektionen der Krümmungsmittelpunkte auf die zugehörigen Radienvektoren eine andere Sinusspirale mit demselben Index und demselben Pol**[1]).

Die durch Gleichung (10) ausgedrückte Eigenschaft ist charakteristisch für die Sinusspirale sowie für eine andere Kurve, die man als Grenzfall derselben ansehen kann[2]). Wenn nämlich $\frac{\varrho}{R \cos \nu} = const.$ und bezeichnet man mit m den Wert dieser Konstanten und setzt für R und $\cos \nu$ ihre Werte ein, so erhält man die folgende Differentialgleichung

$$\varrho^2 - \varrho \frac{d^2\varrho}{d\omega^2} + 2\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2 = m\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2\right],$$

oder auch

$$\frac{\frac{1}{\varrho}\frac{d^2\varrho}{d\omega^2} - \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2}{1 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2} + m - 1 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (**)$$

Wenn $m + 1$, so werden wir diese Gleichung in folgende umgestalten

$$\frac{d}{d\omega} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\omega}\right) + m - 1 = 0,$$

daher wird bei geeigneter Wahl der Integrationskonstante

$$\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\omega}\right) + (m-1) = 0,$$

oder

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\omega} + \operatorname{tg}(m-1)\,\omega = 0.$$

Eine zweite Integration ergibt nun

$$\log \varrho = \frac{1}{m-1} \log \cos (m-1) + k,$$

wo k eine Konstante ist, oder auch

$$\varrho^{m-1} = k^{m-1} \cos (m-1)\,\omega.$$

---

1) Es gilt ferner der Satz: *Rollt eine Sinusspirale vom Index n auf einer Ribaucourschen Kurve* (m. s. II. Bd. Nr. 219) *vom Index* $2n-1$ *so beschreibt ihr Pol die geradlinige Direktrix der letzten* (H. Wieleitner, Arch. Math. Phys., 3. Ser. XI, 1906, S. 308).

2) Allégret, *Remarques sur une certaine famille de courbes planes* (Nouv. Ann. Math. 2e Ser. XI, 1872); M. du Châtenet, *Sur les courbes dans lesquelles la projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur est avec lui dans un rapport constant* (Das. 3e Ser. V, 1886).

Da diese Gleichung von der Form (6) ist, so stellt sie eine Sinusspirale dar. — In dem Falle $m = 1$, den wir ausgeschlossen haben, ist die Differentialgleichung des Problems

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d^2\varrho}{d\omega^2} - \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2 = 0,$$

welche integriert liefert:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\omega} = c,$$

oder

$$\frac{d\varrho}{d\omega} = c \cdot d\omega,$$

und durch Integrieren

$$\varrho = b e^{c\omega}.$$

Wir werden (im folg. Abschn.) sehen, daß diese eine logarithmische Spirale ist; diese teilt also mit der Sinusspirale die durch Gleichung (10) ausgedrückte Eigenschaft[1]).

Die Gleichung (10) führt noch zu einer weiteren Folgerung. Betrachten wir außer der durch (6) dargestellten Spirale eine andere ähnliche Kurve, welche jene im Punkte (ϱ, ω) berührt; bezeichnen wir mit n' den Index und mit R' den Krümmungsradius derselben, so haben wir

$$R' \cos v = \frac{\varrho}{n' + 1} \qquad \qquad (10')$$

aus (10) und (10′) folgt

$$\frac{1}{R} : \frac{1}{R'} = \frac{n+1}{n'+1}; \qquad \qquad (10'')$$

dies ist eine Gleichung, welche die bemerkenswerte Eigenschaft ausdrückt, die wir (Nr. **126**) bei den triangulär-symmetrischen Kurven kennen gelernt haben[2]). Nun ist dies Zusammentreffen kein zufälliges,

---

1) In der von der Societé mathématique de France am 3. März 1875 gehaltenen Sitzung machte Halphèn eine bis heute ungedruckte Mitteilung *Sur les courbes planes dont le rayon de courbure est proportionnel à la normale polaire.* (Bull. Soc. math. France, III, 1874—75, S. 182). Da nun die Differentialgleichung derartiger Kurven offenbar lautet:

$$\frac{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 - \varrho\frac{d^2\varrho}{d\omega^2} + 2\left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2} = k\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

und diese von Gl. (**) des Textes nicht wesentlich verschieden ist, so geht aus den ausgeführten Rechnungen hervor, daß sie Sinusspiralen sind oder im Ausnahmefall logarithmische Spiralen.

2) Betrachten wir z. B. die Sinusspiralen, welche den Werten $n = 1$ und $n = \frac{1}{2}$ des Index entsprechen und wenden wir auf diese die Formel (10″) an; so erhalten wir die Gleichung

und um den wahren Grund desselben einzusehen, setzen wir in (6) $n = -m$ und schreiben sie infolgedessen so

$$\varrho^m \cos m\omega = 2(2a)^m, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6')$$

wenn wir jetzt $\varrho e^{i\omega} = x + iy$ setzen, so wird

$$\varrho^m(\cos m\omega + i \sin m\omega) = (x + iy)^m$$

und

$$\varrho^m(\cos m\omega - i \sin m\omega) = (x - iy)^m$$

und demnach erhält (6′) folgendes Aussehen:

$$\left(\frac{x+iy}{2a}\right)^m + \left(\frac{x-iy}{2a}\right)^m = 4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

dies beweist: **Die Sinusspiralen sind triangulär-symmetrische Kurven in bezug auf ein Dreieck, von welchem zwei Ecken in den Kreispunkten der Ebene liegen**[1]. Bemerkenswert ist, daß die Gleichung der Sinusspiralen in der Form (11) von E. Beltrami erhalten wurde[2], als er jene Systeme ebener Kurven aufsuchte, die, wenn sie um einen gegebenen Winkel um einen Punkt ihrer Ebene gedreht werden, das ursprüngliche System unter einem konstanten, gleichfalls gegebenen Winkel schneiden. Es ist somit bewiesen, daß dieses Beltramische Problem von den Kurven, deren Haupteigenschaft wir gerade darlegen, gelöst wird. Die oben bewiesene innige Beziehung zwischen den Laméschen Kurven und den Sinusspiralen erlaubt sogleich die Ordnung und Klasse der letzteren von der Ordnung und Klasse der ersteren (vgl. Nr. **124**) abzuleiten. So erhält man den folgenden

Satz: **Ist der Index n einer Sinusspirale (6) positiv und gleich $\frac{p}{q}$, so ist die Ordnung der Kurve $2pq$ und die Klasse $p(p+q)$. Wenn aber $n = -\frac{p}{q}$ so ist die Ordnung gleich pq und die Klasse entweder $p(p-q)$ oder $2p(q-p)$, jenachdem $p \gtrless q$ ist.**

Von den Sinusspiralen möge noch außer der Polar- und kartesischen Gleichung die natürliche Gleichung angegeben werden[3]. Um

---

$$\frac{1}{R} : \frac{1}{R'} = \frac{4}{3}, \qquad \text{oder} \qquad R' = \frac{3}{4} R,$$

welche den folgenden Satz ausdrückt: **Der Krümmungsradius in einem beliebigen Punkte einer Kardioïde ist gleich $\frac{3}{4}$ des Radius des Kreises, welcher darin die Kurve berührt und durch den Pol geht.** (L. Sire, *Sur le rayon de courbure de la cardioïde,* Révue math. spéc.. XVIII, 1908).

1) Mit Benutzung dieser Bemerkung kann man aus einem Satze von Lamé, den wir auf S. 337 bewiesen haben, einen anderen über Sinusspiralen ableiten, welchen R. C. Archibald auf S. 19 seiner Inaugural-Dissertation *The cardioid and some its related curves* (Straßburg 1900) direkt bewiesen hat.

2) S. die Note *Intorno ad alcuni sistemi die curve piane* (Ann. Matem. IV, 1861; *Opere matematiche* I, 1902).

3) Cesàro-Kowalewski, *Natürliche Geometrie* S. 61.

diese zu finden, zetzen wir zur Abkürzung $\frac{(2a)^n}{2} = \alpha^n$; die Gl. (6) wird dann $\varrho^n = \alpha^n \cos n\omega$ und gibt

$$s = \alpha \int (\cos n\omega)^{\frac{1-n}{n}}, \quad R = \frac{\alpha}{n+1} (\cos n\omega)^{\frac{1-n}{n}}.$$

Durch Elimination von ω findet man alsdann

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{n+1}{\alpha} R\right)^{\frac{2n}{n+1}} - 1}};$$

wird nun der Kürze wegen $\frac{\alpha}{n+1} = b$ gesetzt, so können wir schließen: **Die natürliche Gleichung aller Sinusspiralen mit dem Index n hat folgende Gestalt:**

$$s = \frac{n+1}{n-1} \int \frac{dR}{\sqrt{\left(\frac{R}{b}\right)^{\frac{2n}{n+1}} - 1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

172. Es liegt außerhalb unserer Aufgabe, auch die mechanischen Eigenschaften der Sinusspiralen[1]), sowie ihr Auftreten in Fragen der Geodäsie[2]) und der Analysis[3]) darzulegen.

Es soll aber schließlich noch unsere Aufgabe sein, eine Klassifikation der Sinusspiralen vom topologischen Standpunkt aus aufzustellen[4]).

Wir wollen immer annehmen, daß der Index eine rationale Zahl sei, dessen absoluten Wert wir mit $\frac{p}{q}$ bezeichnen, wo p und q relativ prim sind. Stellen wir uns vor, daß ein vom Pol ausgehender und anfangs mit der Polarachse zusammenfallender Halbstrahl (beispielsweise im positiven Sinne) rotiere, so ist leicht einzusehen, daß man, um alle Punkte der Kurve einmal zu erhalten, jenen Halbstrahl q vollständige Umdrehungen machen lassen muß. Beachten wir ferner den auf S. 470 bewiesenen Satz, so haben wir uns zunächst nur mit

1) O. Bonnet, *Propriétés géometriques et mécaniques de quelques courbes* (Liouvilles Journ. IX, 1844); Hâton de la Goupillière, *Thèse d'Astronomie* (Paris 1857) und *Sur le minimum du potentiel de l'arc* (Ass. fr., Besançon 1893); de Saint-Germain, *Recueil d'exercises sur la mécanique rationnelle*, 2e éd. (Paris, 1889) S. 155—56.

2) A. Winckler, *Bemerkung über einige Formeln der Geodäsie* (Crelles Journ. L. 1855). Die daselbst (S. 34) auftretende Refraktionskurve ist eine Sinusspirale, da ihre Gleichung in Polarkoordinaten r, v folgende ist: $r = R\left[\frac{\sin(z + (k-1)v)}{\sin z}\right]^{\frac{1}{k-1}}$.

3) Borel, *Leçons sur les séries divergentes* (Paris 1901) S. 132.

4) Vgl. G. Loria, *Topologia delle curve di Lamé e delle spirali sinusoidi algebriche* (Atti Acc. Pontaniana, XXXIX, 1909).

den Kurven mit positivem Index zu befassen, da die Eigenschaften derer mit negativem Index sich durch Inversion aus denen der Kurven mit positivem ableiten lassen.

Da die Gl. (6), die wir der Einfachheit halber in der Form

$$\varrho^n = l^n \cos n\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6')$$

schreiben wollen, sich nicht ändert, wenn das Vorzeichen von ω wechselt, so folgt daraus: **Alle Sinusspiralen sind symmetrisch in bezug auf die Polarachse.**

Lassen wir die Polarachse sich um einen Winkel $\frac{2\pi}{n}$ drehen und nennen die neue Amplitude $\tilde{\omega}$, so ist $\omega = \tilde{\omega} + \frac{2\pi}{n}$, und die Gl. (6′) wird dann zu

$$\varrho^n = l^n \cos\left[n\left(\tilde{\omega} + \frac{2\pi}{n}\right)\right],$$

oder

$$\varrho^n = l^n \cos n\tilde{\omega}.$$

Da diese Gleichung in der Form identisch ist mit der Ausgangsgleichung, so erfreut sich auch die neue Polarachse der Eigenschaft, Symmetrieachse zu sein, woraus folgt: **Jede Sinusspirale mit dem Index $n = \pm \frac{p}{q}$ besitzt p Symmetrieachsen, bei denen die aufeinanderfolgenden den Winkel $\frac{2\pi \cdot p}{q}$ miteinander bilden.**

Für die Endpunkte dieser Achsen, und nur für sie allein, erreicht der Vektor den Wert l als Maximum oder Minimum, jenachdem n positiv oder negativ. Nimmt man hingegen $\omega = k\frac{\pi}{n}$, wo k eine ganze Zahl bedeutet, so wird der Vektor $\varrho = 0$; also gehen im allgemeinen p Zweige der Kurve durch den Pol.

Wir wollen nun die vom Pole verschiedenen Doppelpunkte der Kurve aufsuchen. Für einen solchen muß offenbar, wenn ω', ω'' die Winkelkoordinaten sind,

$$\varrho^n = l^n \cos n\omega' \qquad \varrho^n = l^n \cos n\omega''$$

sein, also $\cos n\omega' = \cos n\omega''$, also $n\omega' = \pm\, \omega'' + 2h\pi$, wo h eine ganze Zahl bedeutet, oder

$$\omega' - \omega'' = 2k\pi, \quad n\omega' = \pm\, n\omega'' + 2h\pi \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

wo k eine andere, noch zu bestimmende ganze Zahl bedeutet. Nehmen wir nun das Vorzeichen $+$, so werden die Gl. (13), da $n = \frac{p}{q}$, zu

$$\omega' - \omega'' = 2k\pi, \quad \omega' - \omega'' = \frac{2hq}{p}\pi$$

und diese zeigen, daß $\frac{k}{q} = \frac{h}{p}$ sein muß. Beachten wir nun, daß k und

h ganze Zahlen, p und q relativ prim sind, so sehen wir daß die kleinste Lösung dieser unbestimmten Gleichung ist $k=q, h=p$. Nun ist klar, daß den Werten ω'' und $\omega''+2q\pi$ des Polarwinkels ein Doppelpunkt nicht entspricht, weil, wie bemerkt, der erzeugende Punkt nach q Umläufen wieder seine alte schon durchlaufene Position einnimmt. Nehmen wir hingegen in (13) das — Zeichen, so werden sie zu

$$\omega'-\omega''=2k\pi, \quad \omega'+\omega''=\frac{2hq}{p}\pi, \text{ und geben}$$

$$\omega'=k\pi+\frac{hq}{p}\pi, \quad \omega''=-k\pi+\frac{hq}{p}\pi. \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Um reelle und verschiedene Doppelpunkte zu erhalten, muß man den ganzen Zahlen h und k solche Werte erteilen, daß die entsprechenden von ω' (od. ω'') zueinander inkongruent mod. $2q$ sind. Erteilen wir dem k die Werte $0, 1, 2, \ldots, q-1$, so werden dem h die Werte $0, 1, \ldots, p-1$, zu erteilen sein. Unter diesen Werten der Winkelkoordinate sind diejenigen auszuschließen, denen imaginäre Werte des Vektors ϱ zukommen.

Bedenken wir noch, daß zwei in einer Inversion sich entsprechende Punkte mit dem Pol in gerader Linie liegen, und wenn der eine Punkt ein Doppelpunkt ist, ihm auch in der invertierten Kurve ein Doppelpunkt entspricht, so sehen wir: **Die Winkel-Koordinate eines Doppelpunktes einer Sinusspirale, deren Index den absoluten Wert $\frac{p}{q}$ hat, ist von der Form $k\pi+\frac{hq}{p}\pi$.**

Da infolge der Gl. (14) für einen Doppelpunkt $n\omega'=\frac{p}{q}\omega'=\frac{kp}{q}\pi+h\pi$ ist, so wird für $q=2$ und $k=1$, $\varrho=0$; daher fallen die angenommenen Doppelpunkte in den Pol. Bemerken wir auch: **Die Sinusspiralen mit ganzzahligem Index ($q=1$) haben außer dem Pol keine Doppelpunkte.**

Um die verschiedenen möglichen Formen der Sinusspiralen zu bestimmen, beginnen wir mit der Betrachtung solcher mit positivem Index, indem wir drei arithmetische Formen, in denen der Index auftreten kann, unterscheiden.

a) $n=\frac{2h+1}{2k}$ (p ungerade, q gerade). Schreiben wir die Gl. (6′) in der folgenden Form

$$\varrho=l\sqrt[2h+1]{\left(\cos\frac{2h+1}{2k}\omega\right)^{2k}},$$

so sehen wir, daß jedem reellen Werte von ω, ein einziger bestimmter reeller Wert von ϱ entspricht. Für $\omega=0$, wird $\varrho=l$; lassen wir jetzt ω wachsen, so wird ϱ kleiner, bis es für $\omega=\frac{k\pi}{2h+1}$ zu 0 wird; lassen wir ω weiter wachsen, so nimmt ϱ in umgekehrter Reihenfolge

die alten Werte wieder an, bis es für $\omega = \frac{2k\pi}{2h+1}$ ein neues Maximum l erhält. Lassen wir ω in dieser Weise weiter wachsen bis zum Werte $4k\pi$, so erhalten wir die $\mathbf{2h+1}$ **Blätter**, aus denen die Kurve besteht. Sie hat im allgemeinen auch $(2h+1)$ Doppelpunkte, die auf den Halbstrahlen liegen, die mit der Polarachse Winkel von der Form $\alpha\pi + \frac{4\beta k\pi}{2h+1}$ bilden, ausgenommen der Fall $k=1$.

So hat z. B. die aus 5 teilweise übereinanderliegenden Blättern bestehende Kurve ($h = k = 2$) 5 Doppelpunkte auf den Geraden, die mit der Achse die Winkel $\frac{\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{5}$, π, $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$ bilden. Ist dagegen $h = k = 1$, so besteht die Kurve aus drei getrennten Blättern, ohne Doppelpunkte; sie ist eine Kurve 12ter Ordnung, welche von W. Roberts untersucht wurde[1]). Das einfachste Beispiel liefert uns die Kardioide $\varrho^{\frac{1}{2}} = a \cdot \cos\frac{\omega}{2}$, für die $h = 0$, $k = 1$.

b) $n = \frac{2h+1}{2k+1}$, (p und q beide ungerade). Schreiben wir die Gleichung in der Form

$$\varrho = l \sqrt[2h+1]{\left(\cos\frac{2h+1}{3k+1}\omega\right)^{2k+1}}$$

so entspricht wieder jedem reellen Werte von ω ein einziger reeller Wert von ϱ, der positiv ist, wenn ω einer Relation genügt, die von der Form ist

$$(4\alpha - 1)\frac{\pi}{2} < \frac{2h+1}{2k+1}\omega < (4\alpha + 1)\frac{\pi}{2} \quad \text{(wo } \alpha \text{ eine ganze Zahl)},$$

im anderen Falle negativ. Für $\omega = 0$ ist $\varrho = l$; lassen wir nun ω wachsen, so wird ϱ kleiner, bis es für $\omega = \frac{2k+1}{2h+1}\cdot\frac{\pi}{2}$ zu 0 wird. Lassen wir nun ω weiter wachsen, so wird ϱ negativ, und erreicht bei $\omega = \frac{2k+1}{2h+1}$ seinen kleinsten Wert $\varrho = -l$; dann wächst es wieder, um bei $\omega = \frac{2k+1}{2h+1}\frac{3\pi}{2}$ zu 0 zu werden, und erreicht wieder bei $\omega = \frac{2k+1}{2h+1}2\pi$ seinen größten Wert $\varrho = l$. Lassen wir nun ω noch weiter wachsen, so nimmt es dieselben Werte in derselben Ordnung wieder an, bis die $\mathbf{2h+1}$ **Blätter** der Kurve durchlaufen sind, und der Vektor in die Anfangslage zurückgekehrt ist. Die Doppelpunkte der Kurve befinden sich auf den Halbstrahlen, die mit der Polarachse Winkel von der Form $\alpha\pi + \frac{2k+1}{2h+1}2\beta\pi$ bilden. Z. B., wenn $h = 0$,

1) *Note sur la rectification de quelques courbes* (Liouvilles Journal, XII, 1847).

$k=1$, also $n=\frac{1}{3}$, haben wir eine Kurve, die aus einem einzigen Blatte besteht und die auf der Verlängerung der Polarachse einen Knoten hat (Taf. XIV, Fig. 121). Sie ist uns in Nr. **102** schon begegnet als Cayleys Sextik, und ist, nebenbei bemerkt, die Fußpunktkurve der Kardioide in bezug auf ihre Spitze als Pol. Für $h=1, k=2$ $\left(\text{also } n=\frac{3}{5}\right)$ haben wir eine aus drei Blättern bestehende Kurve; die Blätter schneiden sich zu je zweien in 6 Doppelpunkten die auf den Halbstrahlen mit $\omega=0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi \cdot \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ liegen (s. Fig. 123, Taf. XIV). Im Fall $h=1, k=0$, erhält man eine Kurve 6. Ordnung ohne Doppelpunkte außer dem Pol; sie wird öfters Kiepertsche Kurve genannt, nach dem Geometer der (jedoch nach W. Roberts) wichtige Untersuchungen über ihre Rektifikation angestellt hat[1]). Fig. 119 Taf. XIV zeigt uns ihre Gestalt.

c) $n=\frac{2h}{2k+1}$ (also p gerade, q ungerade). Wie vorhin schreiben wir auch hier die Kurvengleichung in der Form

$$\varrho = l \sqrt[2h]{\left(\cos\frac{2h}{2k+1}\omega\right)^{2k+1}}.$$

Jetzt entsprechen jedem Werte von ω, der $n\omega$ positiv macht, **zwei** entgegengesetzte Werte von ϱ; die Kurve ist demnach symmetrisch in bezug auf den Pol und daher hat jeder Zweig, der durch ihn hindurchgeht, daselbst einen Inflexionspunkt. Wir kennen schon das Auftreten eines solchen bei der Lemniskate, die das einfachste Beispiel dieser Kategorie ist. Im allgemeinen ist für $\omega=0$, $\varrho=\pm l$; läßt man ω wachsen, so nimmt der absolute Wert von ϱ ab, bis er für $\omega=\frac{2k+1}{2h}\frac{\pi}{2}$ gleich 0 wird; von da ab an wird ϱ für alle Werte von ω zwischen $\frac{(2k+1)\pi}{4h}$ und $\frac{3(2k+1)\pi}{4h}$ imaginär, wie es die Lemniskate $\varrho^2=l^2\cos 2\omega$ und das Beispiel $\varrho^4=l^4\cos 4\omega$ (Fig. 124, Taf. XIV) zeigt. In dem Intervalle $\frac{3(2k+1)\pi}{4h}\ldots\frac{(2k+1)\pi}{h}$ dagegen nimmt der Vektor den Wert 0 wieder auf und durchläuft in umgekehrter Reihenfolge die alten Werte bis zu $\pm l$. Lassen wir nun ω weiter wachsen, so erhalten wir der Reihe nach und im ganzen $2h$ **Blätter**, aus denen die Kurve zusammengesetzt ist. Falls sie Doppelpunkte hat, liegen diese auf den Halbstrahlen, die mit der Polarachse Winkel von der Form $\alpha\pi+\beta\frac{2k+1}{2h}\pi$ bilden. Als Beispiel diene die

1) M. s. die schon zitierte Diss. *De curvis, quarum arcus integralibus ellipticis primi generis exprimitur* (Berlin, 1870) und die Abh. *Über eine geometrische Anwendung der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen* (Crelles Journ., LXXIV, 1872); darin S. 311 eine hübsche Zeichnung der Kurve.

Kurve mit $n = \frac{2}{3}$, $\varrho^2 = \frac{a^2}{2}\cos^2\frac{2\omega}{3}$, die Fußpunktkurve der Lemniskate in bezug auf ihren Mittelpunkt (Fig. 122, Taf. XIV). Ist $n = \frac{4}{5}$ so haben wir 8 Doppelpunkte außer dem vielfachen Punkte im Pol, auf den Geraden, die mit der Achse Winkel von 45^0 bilden. U. s. w.

Um die Gestalten der Sinusspiralen mit negativem Index zu erhalten, wenden wir auf die bisherigen Resultate die Inversion mit dem Pol als Zentrum an. Es ergibt sich: Ist $n = -\frac{p}{q}$, so besteht die Kurve aus p Blättern, die auf dem Grundkreise in ebensovielen Punkten beginnen und sich ins Unendliche erstrecken. Die Radien zu jenen Punkten sind ebensoviele Symmetrieachsen der Kurve, die überdies symmetrisch in bezug auf den Anfang ist, falls p gerade. Alle reellen Punkte der Kurve liegen außerhalb des Grundkreises. Im Falle $n = -\frac{1}{3}$ erhalten wir $\varrho = \frac{16a}{\cos^3\frac{\omega}{3}}$, welches die Brennlinie einer Parabel für senkrecht zur Achse fallende Strahlen ist, der wir schon auf S. 90 begegnet sind; ihre Gestalt zeigt Fig. 120, Taf. XIV. Ist $n = -\frac{5}{4}$, so besteht die Kurve aus 5 hyperbelähnlichen Zweigen, die sich auf den Ecken eines regulären Fünfecks schneiden, den Grundkreis berühren und die Halbstrahlen mit $\omega = \frac{2\pi}{5}, \frac{4\pi}{5} \cdots \frac{10\pi}{5}$ zu Asymptoten haben.

Bemerkenswert sind noch alle Sinusspiralen, die durch eine Gleichung von der Form

$$\varrho = \frac{p}{2}\frac{1}{\cos^n\frac{\omega}{n}}$$

dargestellt werden, da sie zu der großen Familie der Sektrix-Kurven gehören[1]). Um diese wichtige Tatsache zu beweisen, beachten wir, daß, wenn μ der Winkel der Tangente im Punkte P (ϱ, ω) mit dem Radiusvektor ist,

$$\operatorname{tg}\mu = \varrho : \frac{d\varrho}{d\omega} = \operatorname{ctg}\frac{\omega}{n} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{n}\right)$$

ist, und daher

$$\mu = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{n}.$$

Fällen wir also vom Pole auf diese Tangente die Senkrechte OP_1, so ist

$$\sphericalangle P_1PO = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{n}, \quad \text{daher} \quad \sphericalangle P_1OP = \frac{\omega}{n};$$

1) Für den Fall $n = -\frac{1}{3}$ wurde diese Eigenschaft von F. Gauß bemerkt: *Über Kurven, welche die Eigenschaft haben, daß je zwei Tangenten aus einer gegebenen Geraden eine Strecke ausschneiden, welche zu dem von den Berührungspunkten begrenzten Bogen in einem gegebenen Verhältnisse stehen* (Progr. Bunzlau, 1890).

nun ist aber, wenn wir die Polarachse OA nennen, $\sphericalangle POA = \omega$, und deswegen

$$\sphericalangle P_1OP = \frac{1}{n} POA.$$

Wollen wir daher einen Winkel α in n gleiche Teile teilen, so legen wir ihn mit dem einen Schenkel auf OA; der andere Schenkel schneide die betrachtete Kurve in gewissen Punkten P; ziehen wir in einem derselben die Tangente und fällen auf sie das Lot OP_1, so ist P_1OP einer der gesuchten Winkel.

Neunzehntes Kapitel.

Die Lissajousschen Kurven.

173. Der mathematischen Untersuchung gewisser akustischer Phänome verdankt die Geometrie eine Klasse von Kurven, der wir das letzte Kapitel dieses Abschnitts widmen wollen[1]); es sind diejenigen Kurven, die man — nach dem Namen des französischen Physikers, der in Europa[2]) sie zuerst betrachtet hat[3]) — die Lissajousschen Kurven nennt. Wir definieren sie durch die beiden Gleichungen

$$x = a \sin(mt + \gamma), \quad y = b \sin(nt + \delta), \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die eine parametrische Darstellung der Kurve geben; a und b sind beliebige reelle Konstanten, γ und δ beliebige gegebene Winkel und m und n bekannte Zahlen. Diese kann man immer als positiv annehmen, weil, wenn sie es nicht wären, man als Parameter $-t$ statt t nehmen könnte, womit nur der positive Sinn auf einer oder beiden Koordinatachsen geändert würde. Wenn das Verhältnis $\frac{m}{n}$ irrational ist, so ist leicht einzusehen, daß die Kurve nicht algebraisch sein kann; ist es aber rational, so kann man immer die beiden Zahlen als ganz

---

1) Andere algebraische, mathematisch-physikalische Kurven finden sich in der Abhandlung von Euler: *Problème: Un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés; trouver les cas où la courbe décrite par ce corps sera algébrique* (Mém. Acad. Berlin XVI, 1760); die daselbst niedergelegten Resultate wurden von Legendre vollständig behandelt im II. B. seiner *Exercises de calcul intégral* (Paris, 1817).

2) In Amerika waren sie früher durch den Mathematiker und Astronom Nathaniel Bowditch in der Abh. *On the motion of a pendulum suspended from two points* (Mem. Americ. Acad., III, 1815, Part II, S. 413—436) erforscht worden. Vgl. J. Lovering, *Anticipation of the Lissajous curves* (Id. New Ser., VIII, 1881, S. 292—298) und F. Cajori, *A history of physics* (London, 1899) S. 285.

3) J. A. Lissajous, *Mémoire sur la position des noeuds dans les lames qui vibrent transversalement* (Ann. Chimie et Phys. 3e Sér., XXX, 1850).

und relativ prim annehmen, denn, wenn sie es nicht wären, so könnte man sie dahin bringen, indem man $\frac{\tau}{\Delta}$ als neuen Parameter nimmt, wo Δ das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner von m und n ist. Schließlich, wenn man die Bezeichnungen in geeigneter Weise wählt, kann man immer bewirken, daß $m \geqq n$ und $\delta = 0$ wird. Kurz und gut: Wir können eine Lissajoussche Kurve darstellen durch die Gleichungen

$$x = a \sin(mt + \gamma), \quad y = b \sin nt, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

wo die Zahlen m, n ganz, positiv, relativ prim sind, und die erste größer oder gleich der letzteren ist[1]).

Die Bestimmung der Singularitäten derartiger Kurven kann auf zwei verschiedene Arten ausgeführt werden.

I. Die elementarste ist eine einfache Anwendung des klassischen Verfahrens der Diskussion einer Kurve, die durch kartesische Koordinaten dargestellt ist[2]), welches Verfahren keine prinzipiellen Schwierigkeiten bietet, da die in Gleichung (2) auftretenden Kreisfunktionen so sehr bekannt sind; z. B. läuft die Bestimmung der Doppelpunkte darauf hinaus diejenigen Wertepaare t' und t'' aufzusuchen, welche ergeben

$$\sin(mt' + \gamma) = \sin(mt'' + \gamma), \quad \sin nt' = \sin nt''; \quad \text{usw.}$$

II. Die andere Methode ist, wenn auch nicht schwieriger, so doch kunstvoller[3]); bei dieser wird gesetzt

$$x = \frac{x_2}{x_3}, \quad y = \frac{x_1}{x_3}, \quad e^{it} = \frac{\lambda}{\mu}$$

und man erhält dann an Stelle von (2):

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{a}{2i} \frac{e^{i\gamma}\lambda^{2m} - e^{-i\gamma}\mu^{2m}}{\lambda^m \mu^m}, \qquad \frac{x_1}{x_3} = \frac{b}{2i} \frac{\lambda^{2n} - \mu^{2n}}{\lambda^n \mu^n}.$$

Bezeichnen wir nun mit ϱ einen Proportionalitätsfaktor, so können diese Gleichungen auch durch die drei folgenden ersetzt werden:

$$\left.\begin{aligned} \varrho x_1 &= b(\lambda^{2n} - \mu^{2n}) \\ \varrho x_2 &= a(e^{i\gamma}\lambda^{n+m}\mu^{n-m} - e^{-i\gamma}\lambda^{n-m}\mu^{n+m}) \\ \varrho x_3 &= 2i\lambda^n \mu^n \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

---

1) Vgl. V. Stouhal, *Analytische Darstellung der Lissajous'schen Figuren* (Prager Ber. 1907).

2) Himstedt, *Über Lissajoussche Curven* (Archiv Math. Phys. LXX, 1884).

3) W. Braun, *Die Singularitäten der Lissajous'schen Stimmgabelkurven* (Dissert. Erlangen, 1875); vergleiche den Auszug unter dem Titel *Ueber Lissajous' Curven* (Math. Ann. VIII, 1875).

Da somit die homogenen Koordinaten eines beliebigen Punktes der Lissajousschen Kurven durch binäre Formen von λ und μ vom Grade $2n$ ausgedrückt sind, so ist damit die Anwendung der Theorie der binären Formen auf diese Kurven ermöglicht. Vor allem zeigen uns die Gleichungen (3), **daß die Lissajousschen Kurven algebraisch und von der Ordnung $2n$ sind**; es muß jedoch bemerkt werden, daß es gewisse Werte des Winkels γ gibt, für welche man eine (doppelt gerechnete) Kurve von der Ordnung n erhält. Wenn m gerade ist, so sind diese singulären Werte $\frac{k\pi}{n}$ $(k = 1, 2 \ldots, 2n-1)$, während, wenn m ungerade ist, diese Werte sind $\frac{2k\pi}{n}$ $(k = 1, 2 \ldots, n-1)$. Im allgemeinen Falle besitzt die Kurve $(2n-1)(n-1)$ Doppelpunkte und unter diesen $2(n-m+1)$ Spitzen, von denen $2nm-(n+m)$ in endlicher Entfernung liegen; sie hat außerdem $2(m-1)$ Wendepunkte im Unendlichen und $2(m+n)$ im Endlichen, von denen $2(n-m)$ reell sind; schließlich hat sie $(2n+2m-1)(n+m-1) - 2(n+2m-1)$ Doppeltangenten, sie ist infolgedessen von der Klasse $2(n+m)$. Hat aber γ einen der oben angegebenen Werte, so hat die Kurve $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppelpunkte und unter diesen $n-m+1$ Spitzen, von welchen $\frac{(m-1)(n-1)}{2}$ in endlicher Entfernung liegen; außerdem hat sie $m-1$ Wendetangenten im Unendlichen und $n+m-3$ in endlicher Entfernung, von denen nur $n-m-1$ reell sind; die Zahl der Doppeltangenten beträgt $\frac{(n+m-2)(n+m-3)}{2} - (n+2m-4)$, und daher ist ihre Klasse $n+m-1$. — Mit dem Beweise dieser Sätze wollen wir uns nicht aufhalten, weil die Lissajousschen Kurven in der Geometrie eine weniger wichtige Stelle einnehmen[1]). Wir wollen nur noch bemerken: a) **Jede Lissajoussche Kurve kann erhalten werden, indem man eine Sinuslinie um einen Kreiszylinder wickelt**, so daß ihre Achse zum Basiskreise wird, **und die so entstandene Raumkurve orthogonal auf einen Achsenschnitt des Zylinders projiziert.** Die auf Taf. XIV, Fig. 125—128 beigefügten Zeichnungen lassen dies gut erkennen. b) Daß außer der Geraden, dem Kreise, der doppelt durchlaufenen Parabel, der Ellipse, der Lemniskate sowie mehreren Polyzomalkurven 4. Ordnung und an-

1) Die mechanische Zeichnung der Lissajousschen Kurven betreffend siehe J. C. W. Ellis, *A machine for tracing curves described by points of a vibrating string* (Proc. Philos. Soc. Cambridge II, 1870), und Dechevrens, *Le campylographe, machine à tracer des courbes* (C. R. CXXX, 1900), wo auch allgemeinere Kurven betrachtet und gezeichnet werden, u. a. solche, die ins Stereoskop gelegt, die im Texte folgende Erzeugungsweise prachtvoll illustrieren; vgl. *Intermédiaire* VIII, 1901, S. 187.

deren sich noch mindestens eine bemerkenswerte Kurve vierter Ordnung unter ihnen befindet[1]) die elementar rektifizierbar ist; es ist die durch folgende Gleichungen dargestellte:

$$x = 4\sqrt{2}\, b \sin(\vartheta + \alpha), \qquad y = \sin 2\vartheta.$$ [2])

1) E. Sang, *On a singular case of rectification in lines of fourth order* (Proc. R. Soc. Edinburgh VII, 1892).

2) Zum Schlusse dieses Abschnittes möge noch auf die Abhandlung von C. Weltzien verwiesen werden, *Zur Theorie derjenigen Kurven, deren Coordinaten sich rational und ganz durch zwei lineare Funktionen und zwei Quadratwurzeln aus ganzen Funktionen eines Parameters darstellen lassen* (Math. Ann. XXX, 1887). Die daselbst untersuchten Kurven sind, in homogenen Koordinaten, folgender parametrischen Darstellung fähig

$$\varrho\, x_k = (a_{k,0}\, t + a_{k,1}) \sqrt{E(t)} + (b_{k,0}\, t + b_{k,1}) \sqrt{F(t)}, \quad (k = 1, 2, 3);$$

wenn E und F Funktionen von der Ordnung $p + 1$ sind; ihre Ordnung ist $p + 3$, und ihr Geschlecht p.

Berichtigungen und Nachträge zum ersten Bande.

Zu S. 48 und 50: Die für die Ophiuride und die Trisektrix von Maclaurin angeführten Konstruktionen nebst ihren Analogien haben R. Heger (*Zur Konstruktion von Kurven 3. Ordnung*, Abh. der Ges. Isis, 1909) zu folgender Erzeugung geführt: „Ein Winkel AQP von konstanter Größe geht mit dem einen Schenkel durch den festen Punkt A und durchläuft mit seinem Scheitel Q eine feste Gerade g. Durch den festen Punkt O zieht man Parallele zu dem Schenkel AO und bestimmt deren Schnittpunkt P mit dem anderen Schenkel: der Ort von P ist eine rationale, zirkulare Kurve 3. Ordnung". Jede derartige Kurve $y(x^2+y^2)-dx^2+mxy+ny^2=0$ kann auf einfach unendlich viele Weisen durch obige Erzeugung entstehen. Die Gleitlinie g hat die Richtung der reellen Asymptote und der Punkt A liegt auf dem Kreise, der den Doppelpunkt O und den Punkt $(-m, -(d+n))$ zu Gegenpunkten hat. — Auch andere Erzeugungen rationaler Kurven 3. Ordnung finden sich in der Abh. von Heger.

S. 50, Z. 17—18 v. u.: Statt $2cx$ lies $4cx$, und statt $\frac{b}{2}$ lies b.

Zu S. 224: Fouret hat die Bemerkung gemacht (*Remarque historique concernant une propriété mécanique de la lemniscate,* Bull. Soc. math. France, XX, 1892), daß der erste, der jene Eigenschaft der Lemniskate angekündigt hat, Euler gewesen sei; siehe dessen *Mechanica* II (Petropolis, 1742) S. 166.

Zu S. 235: Zwischen fünf der in diesen beiden Abschnitten II und III betrachteten Kurven besteht eine sehr enge Beziehung, nämlich daß sie als Inversen von Kegelschnitten aufgefaßt werden können. Es sind diese: 1) die Kissoide (S. 36), 2) die Kardioide (S. 214), die die Inversen einer Parabel sind; 3) die gerade Strophoide (S. 59), 4) die Lemniskate (S. 214), die die Inversen einer gleichseitigen Hyperbel sind; 5) die Trisekante von Maclaurin (S. 84) als Inverse einer Hyperbel, deren Asymptoten miteinander einen Winkel von 120^0 bilden. Diesen Umstand hat F. Gütsche fruchtbar verwertet in seinen *Geometrischen Untersuchungen über inverse Kurven von Kegelschnitten* (Progr. Oberrealschule Breslau, 1907) um in einer einheitlichen geometrischen Weise die hervorragenden Eigenschaften dieser 5 Kurven darzutun und daraus elegante Konstruktionen für ihre Tangenten und Krümmungszentren zu gewinnen.

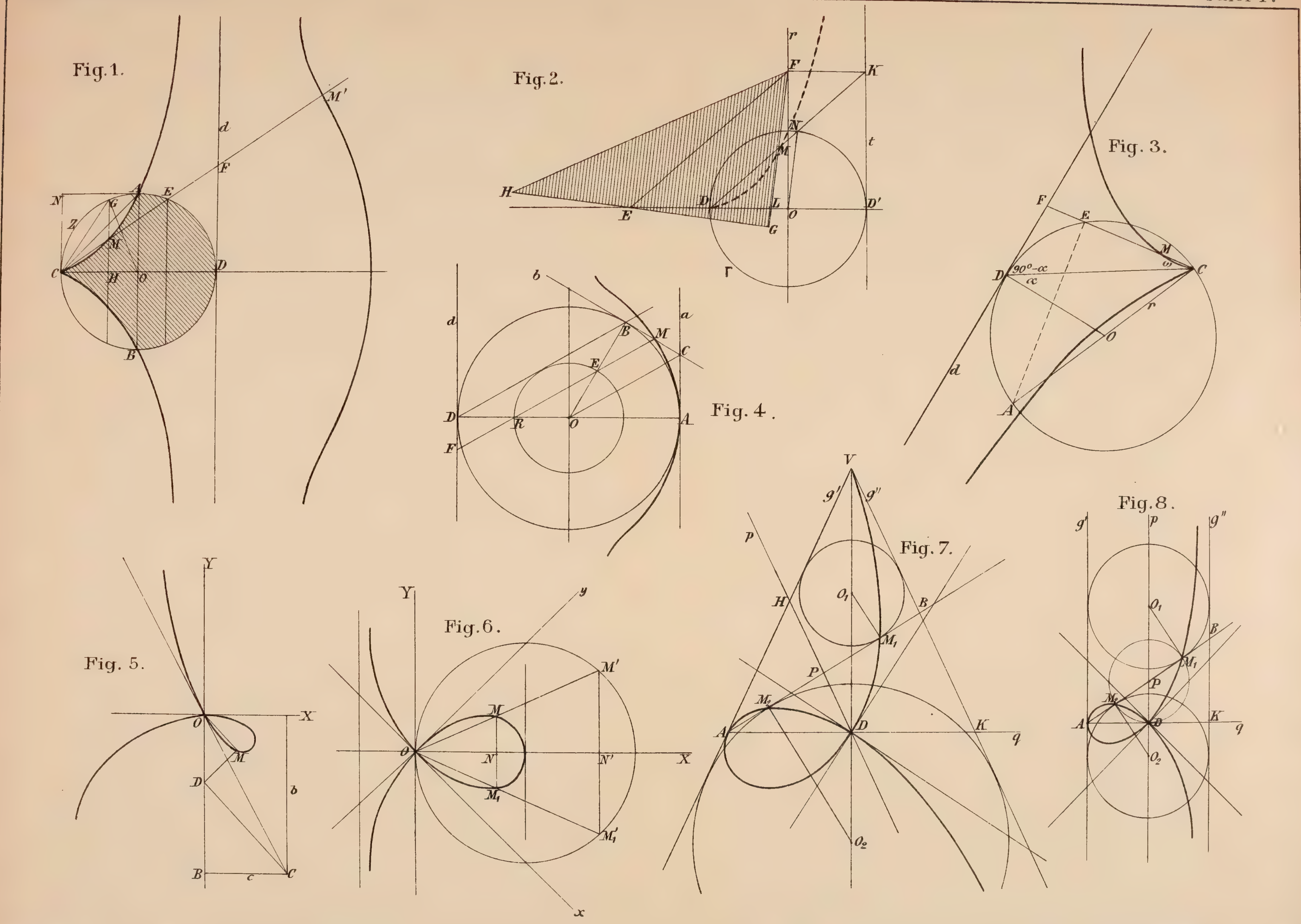
Zu S. 249: Eine Methode, um die Gleichung einer Quintik mit vier Spitzen und einem oder mehreren Knotenpunkten zu erhalten, wurde neuerdings von A. B. Basset (*On quintic curves with four cusps*; Rend. Circ. Matem. Palermo, XXVI, 1908) angegeben.

Zu S. 288: Auf verschiedene Kurven von einer ungeraden Ordnung oder Klasse traf R. Pyrkosch im Verlaufe gewisser Untersuchungen über *Das Büschel von Kurven 4ter Ordnung mit 3 festen Doppelpunkten und 4 festen einfachen Punkten* (Progr. Gymnasium Breslau, 1907). So erfüllen die Berührungspunkte der von einem Punkte an die Büschelkurven gehenden Tangenten einer Kurve 7ter Ordnung und 24ter Klasse mit 3 dreifachen Punkten; da ferner von irgend einem Punkte im allgemeinen 15 Wendetangenten an die Kurven des Büschels gehen. so ist die Enveloppe dieser Tangenten 15ter Klasse. Die Enveloppe der Doppeltangenten ist 4ter Klasse. Die Kurve, die von den Wendepunkten der Kurven des Büschels erfüllt wird, ist von der 15ten Ordnung mit 3 siebenfachen Punkten; usw.

S. 303, Z. 5 v. o.: Statt f_{m-2} lies f_{m-2}^2.

Nachweis für die Tafeln des ersten Bandes.

Das vollständige Namen- und Sachregister folgt am Ende des zweiten Bandes.



Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin
Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig-Stötteritz.

Fig. 9.

Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 15.

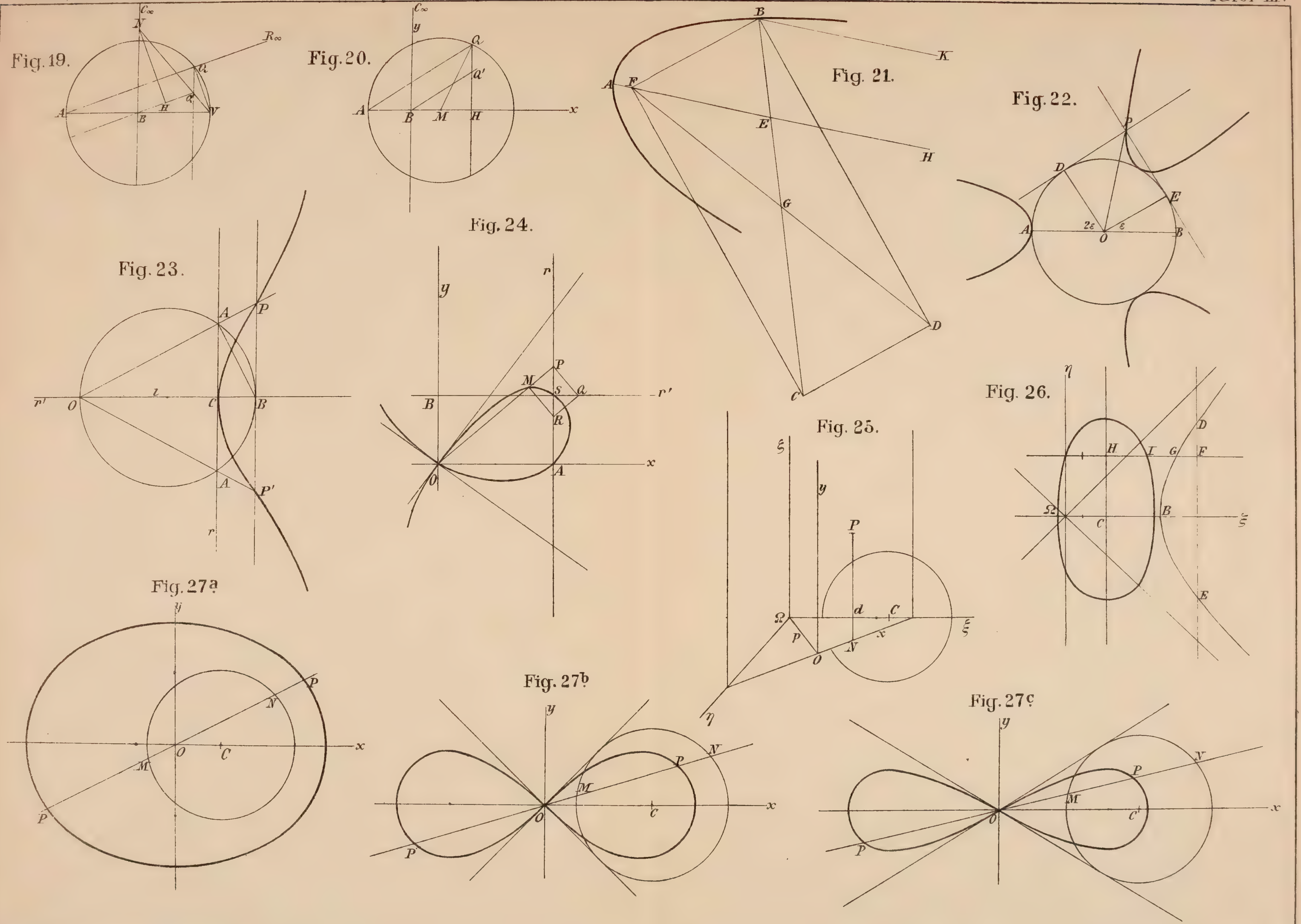
Fig. 16.

Fig. 17.

Fig. 18.

Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin

Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig-Stötteritz.



Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin

Lith. u Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig Stötteritz.

Fig. 28ª

Fig. 28ᵇ

Fig. 28ᶜ

Fig. 29ª

Fig. 29ᵇ

Fig. 29ᶜ

Fig. 30.

Fig. 31.

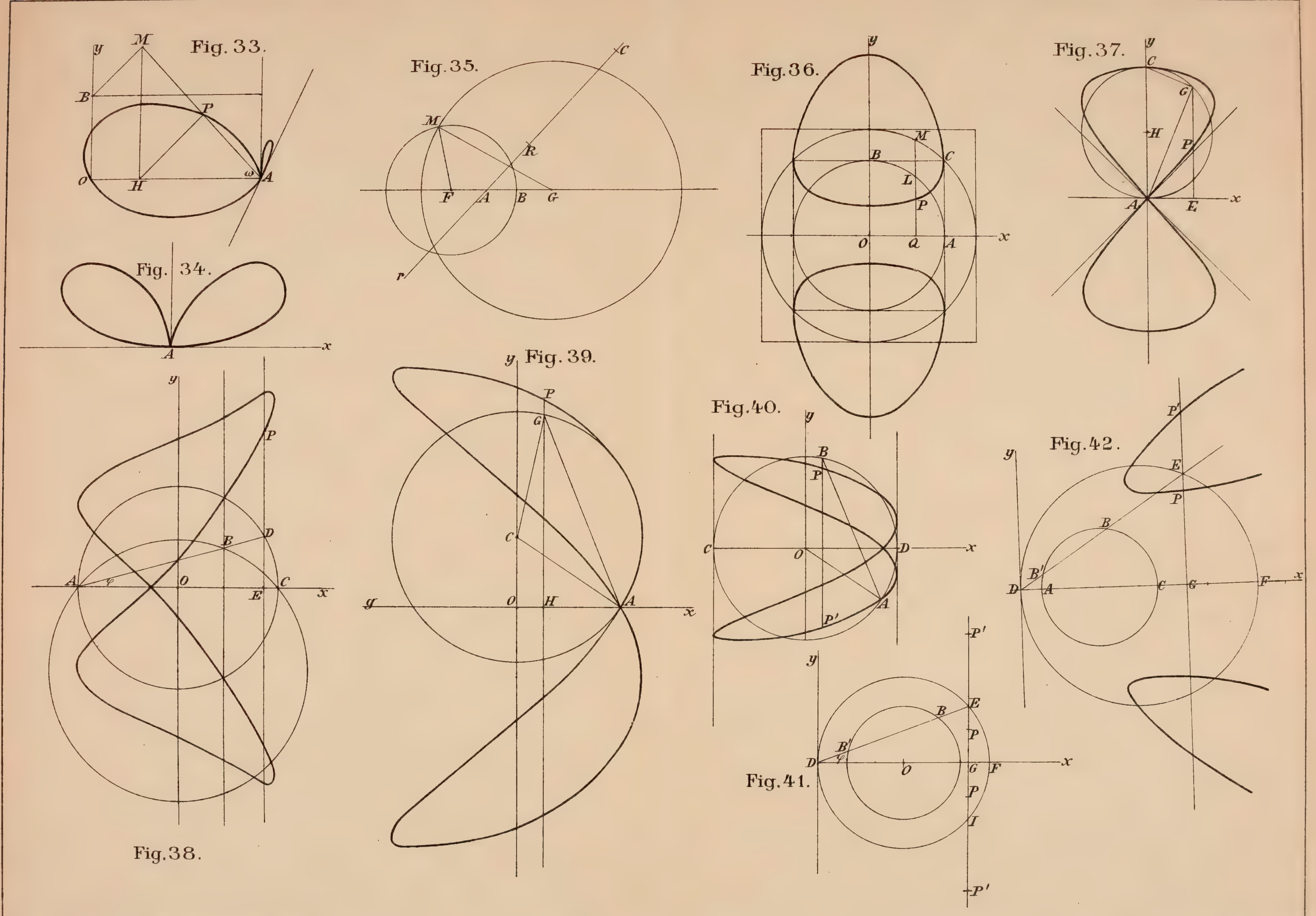
Fig. 32ª

Fig. 32ᵇ

Fig. 30.

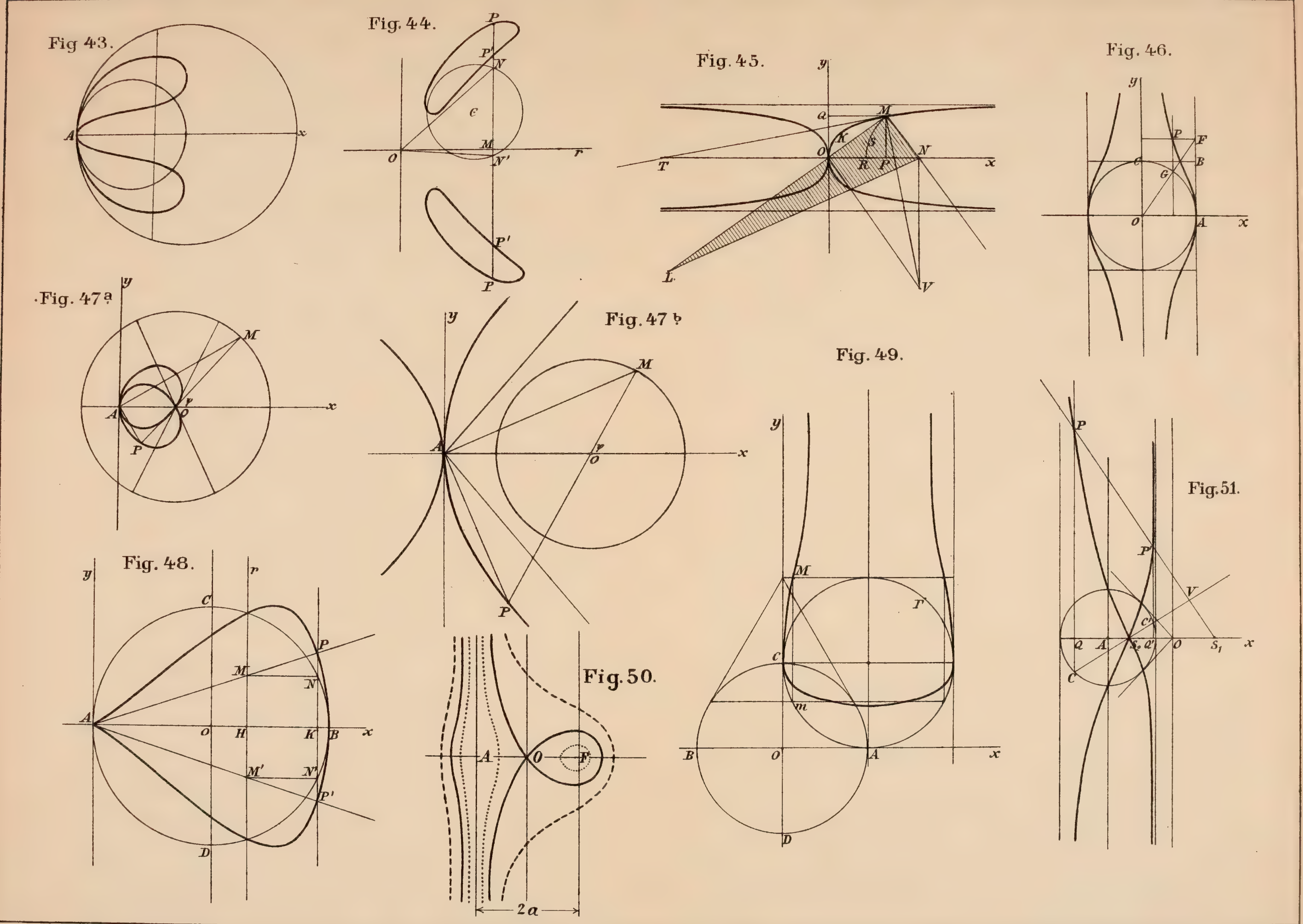
Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin

Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig-Stötteritz.



Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin.

Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig-Stötteritz.



Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin.
Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig-Stötteritz.

Fig. 52ª

Fig. 52ᵇ.

Fig. 52ᶜ

Fig. 53.

Fig. 54.

Fig. 55.

Fig. 56.

Fig. 56ª

Fig. 57ª

Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin

Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig-Stötteritz.

Fig. 57b

Fig. 58.

Fig. 57c

Fig. 59.

Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin

Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig-Stötteritz.

Fig. 60.

Fig. 63.

Fig. 64.

Fig. 61.

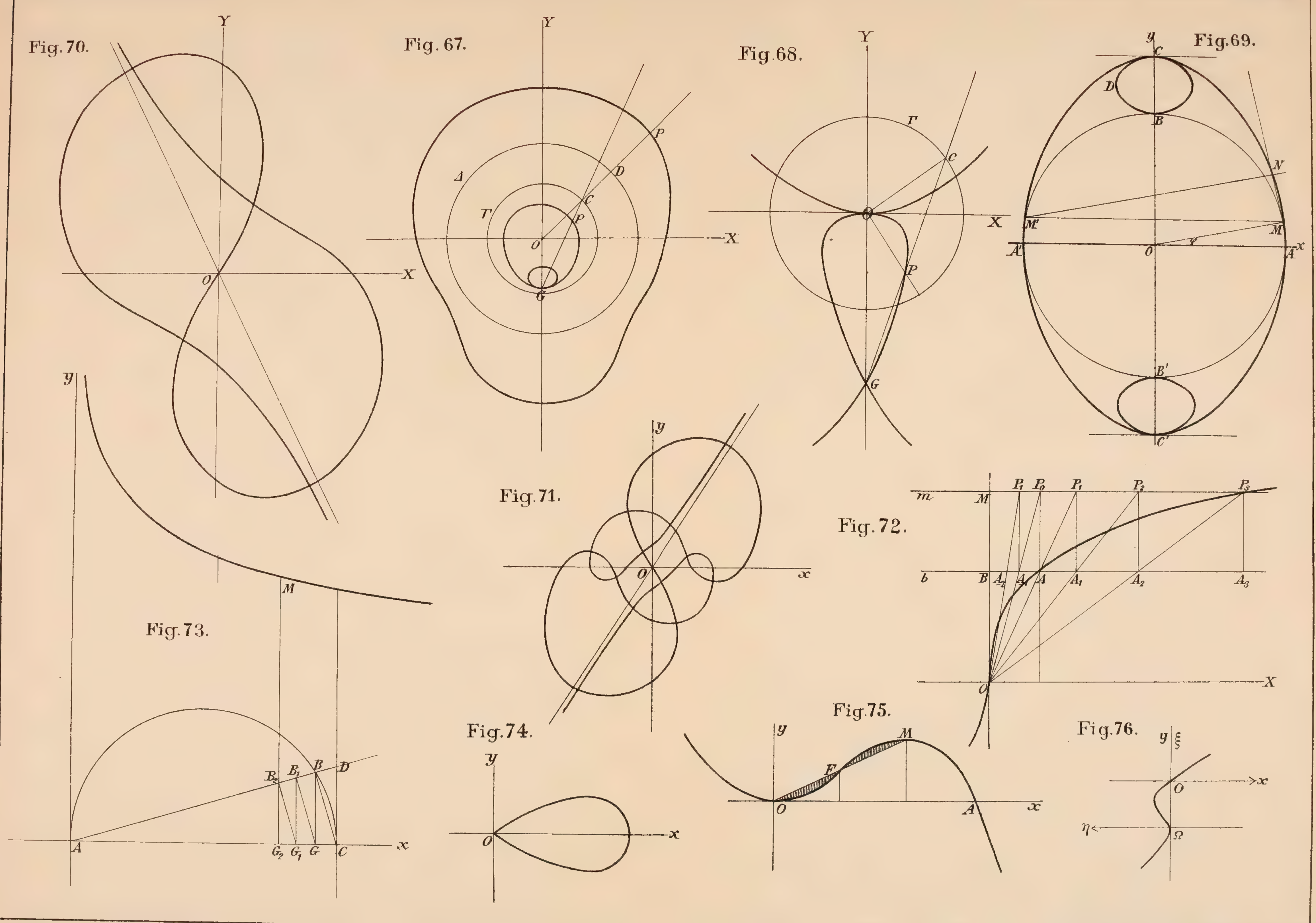
Fig. 65.

Fig. 62.

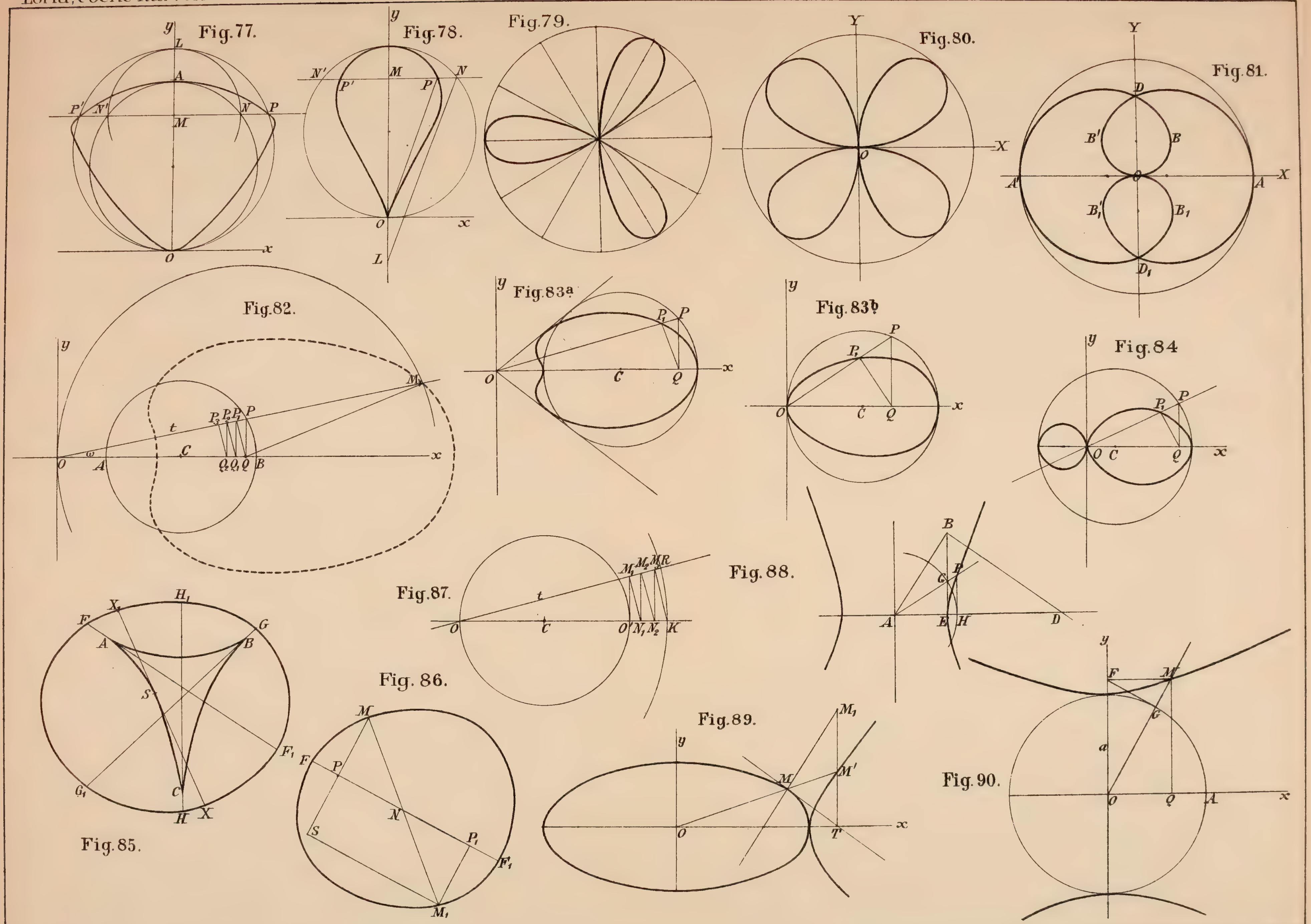
Fig. 66.

Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin

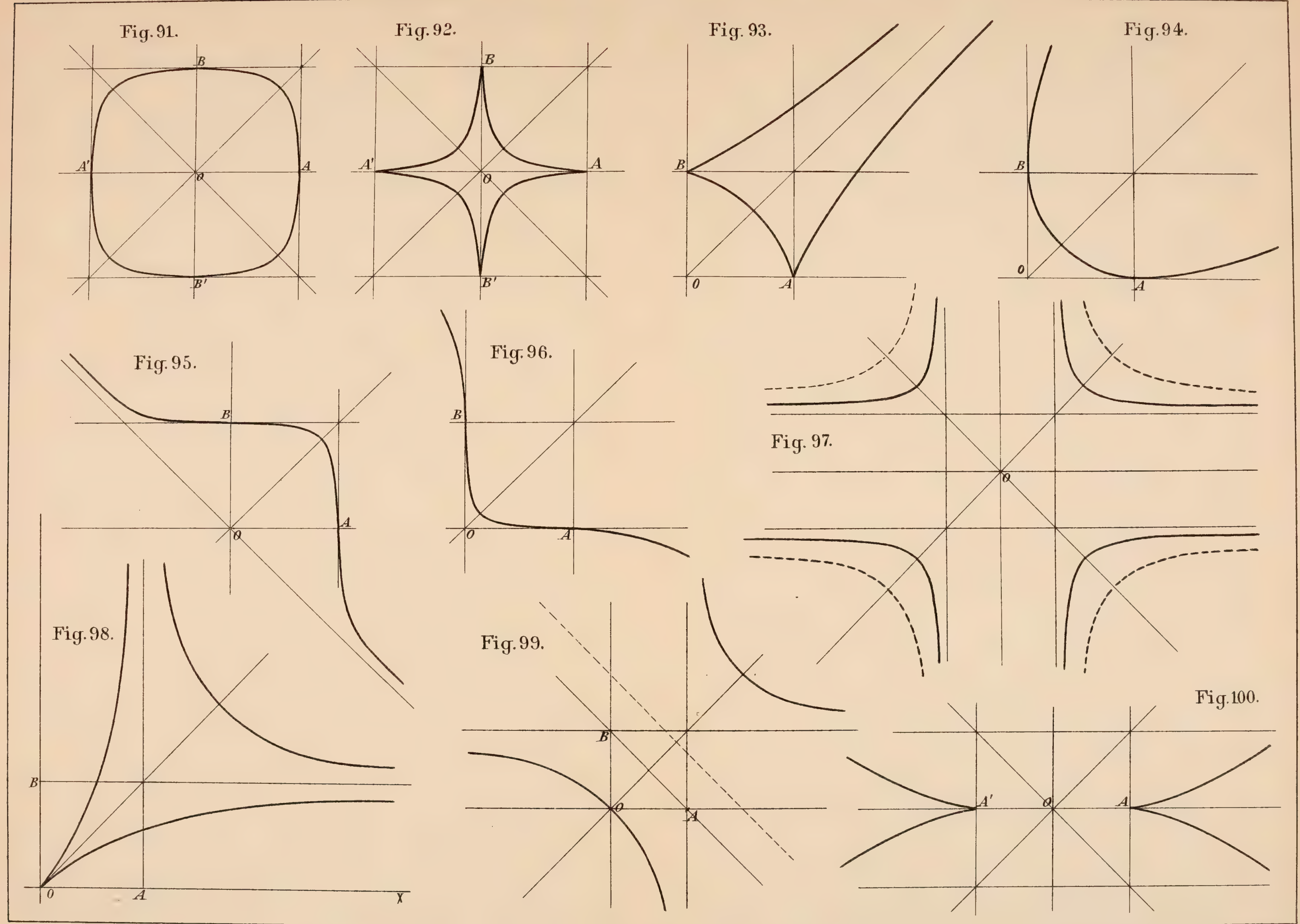
Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig-Stötteritz.



Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin
Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig-Stötteritz.



Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin.
Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig - Stötteritz.



Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin
Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig-Stötteritz.

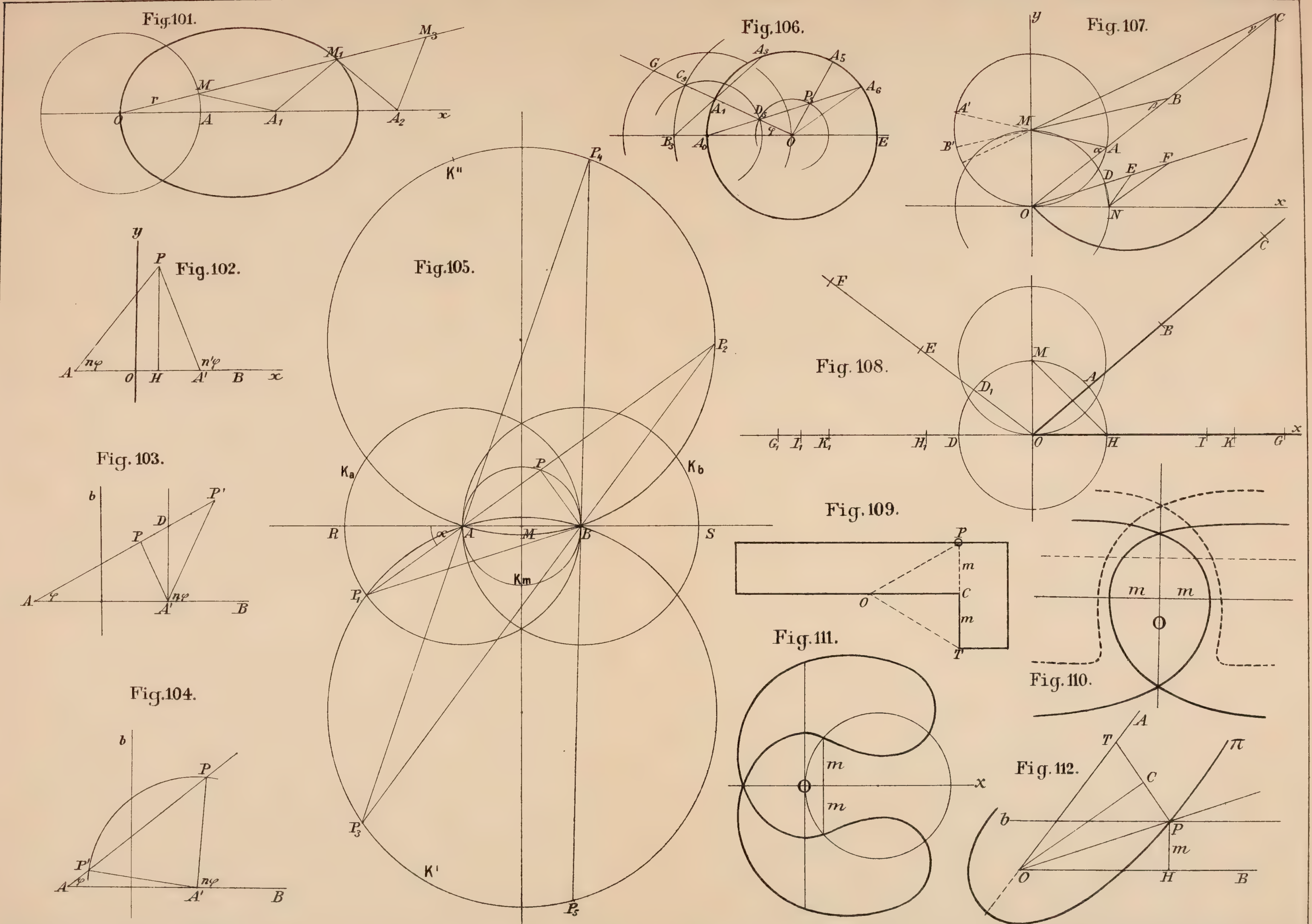


Fig. 101.
Fig. 102.
Fig. 103.
Fig. 104.
Fig. 105.
Fig. 106.
Fig. 107.
Fig. 108.
Fig. 109.
Fig. 110.
Fig. 111.
Fig. 112.

Fig. 113.

Fig. 114.

Fig. 115.

Fig. 116.

Fig. 117.

Fig. 118.

Fig. 119.

Fig. 123!

Fig. 122.

Fig. 125.

Fig. 126.

Fig. 121.

Fig. 120.

Fig. 124.

Fig. 127.

Fig. 128.

Verlag v. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin

Lith. u. Druck v. Eschebach & Schaefer, Leipzig-Stotteritz.

Grundlehren der Mathematik. Für Studierende und Lehrer. In 2 Teilen. Mit vielen Textfiguren. gr. 8. In Leinw. geb.

I. Teil: Die Grundlehren der Arithmetik und Algebra. Bearbeitet von E. Netto und C. Färber 2 Bände. [In Vorbereitung.]

II. Teil: Die Grundlehren der Geometrie. Bearbeitet von W. Frz. Meyer und H. Thieme. 2 Bände.

1. Band: Die Elemente der Geometrie. Von Professor Dr. Hermann Thieme, Direktor des Realgymnasiums zu Bromberg. Mit 323 Textfiguren. [XII u. 394 S.] 1909. n. *M.* 9.—
2. Band: Von W. Frz. Meyer in Königsberg. [In Vorbereitung.]

Gundelfinger, Geh. Hofrat Dr. **Siegmund,** vorm. Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der Kegelschnitte, herausgegeben von Geh. Hofrat Dr. Friedr. Dingeldey, Professor ebendaselbst. Mit Figuren im Text und einem Anhange, enthaltend Aufgaben und weitere Ausführungen. [VIII u. 434 S.] gr. 8. 1895. Geh. n. *M.* 12.—

Heffter, Dr. **L.,** Professor an der Universität Kiel, u. Dr. **C. Koehler,** Professor an der Univ. Heidelberg, Lehrbuch der analytischen Geometrie. In 2 Bänden.

I. Band. Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. Mit 136 Figuren im Text. [XVI u 526 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. *M.* 14.—
II. — Geometrie im Bündel und im Raume. [In Vorbereitung.]

Hesse, Dr. **O.,** weil. Professor am Kgl. Polytechnikum zu München, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. 4. Auflage, revidiert und ergänzt von Dr. S. Gundelfinger, Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt. [VIII u. 251 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M.* 6.—

Klein, Geheimer Regierungsrat Dr. **F.,** Professor an der Universität Göttingen, autographierte Vorlesungshefte. 4. Geh.

Höhere Geometrie. Ausgearbeitet von Fr. Schilling. Unveränderter Abdruck 1907.
Heft 1, [VI u. 566 S] (W.-S. 1892/93) } zusammen n. *M* 15.—
Heft 2, [IV u. 388 S.] (S.-S 1893) }
Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Prinzipien. Ausgearbeitet von Conrad Müller. (S.-S. 1901.) Neuer Abdruck 1907. [VIII u. 484 S.] n. *M* 10.—

Kötter, Dr. **E.,** Professor an der Technischen Hochschule zu Aachen, die Entwicklung der synthetischen Geometrie. In 2 Teilen. Teil I: Die Entwicklung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt (1847). A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. V, 2. [XXVIII u. 486 S.] gr. 8. 1901. Geh. n. *M.* 18.80. Erschien auch in 2 Lieferungen: 1. Lieferung: (128 S.) 1898. n. *M* 4.40. 2. Lieferung: (XXVIII u. S. 129—414.) 1901. n. *M.* 14.40.

v. Lilienthal, R., Professor an der Universität Münster i. W., Vorlesungen über Differentialgeometrie. In 2 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band. Kurventheorie. Mit 26 Figuren. [VI u. 368 S.] 1908. n. *M.* 12.—
II. Band. [Erscheint Ostern 1910.]

———— Grundlagen einer Krümmungslehre der Kurvenscharen. [VII u. 114 S.] gr. 8. 1896. Geh. n. M. 5.—

Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theoreme, Literatur). Von Dr. Ernst Pascal, Professor an der Universität Neapel. Deutsche Ausgabe von A. Schepp in Wiesbaden. In 2 Teilen. 2., neubearbeitete Auflage. gr. 8.

I. Teil: Die Analysis. Unter Mitwirkung von E. Pascal sowie Ph. Furtwängler, A. Guldberg, H. Hahn, E. Jahnke, H. Jung, A. Loewy, H. E. Timerding hrsg. von Dr. P. Epstein, Professor an der Universität Straßburg i. E. [ca. 800 S.] In Leinwand geb. ca. n. *M.* 12.— [Erscheint im Frühjahr 1910.]

II. — Die Geometrie. Unter Mitwirkung von E. Pascal sowie L. Berzolari, R. Bonola, E. Ciani, M. Dehn, Fr. Dingeldey, E. Enriques, G. Giraud, H. Grassmann, G. Guareschi, L. Heffter, W. Jacobsthal, H. Liebmann, J. Mollerup, J. Neuberg, U. Perazzo, O. Staude, E. Steinitz, H. Wieleitner und K. Zindler hrsg. von Dr. H. E. Timerding, Professor an der Technischen Hochschule zu Braunschweig. [ca. 900 S.] In Leinwand geb. ca. n. *M.* 14.— [Erscheint Ostern 1910.]

Staude, Dr. **Otto,** Professor an der Universität Rostock, analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene. Ein Handbuch zu den Vorlesungen und Übungen über analytische Geometrie. Mit 387 Textfiguren. [VIII u. 447 S.] gr. 8. 1905. In Leinw. geb. n. *M.* 14.—

——— analytische Geometrie des Punktepaares, des Kegelschnittes und der Fläche zweiter Ordnung. In 2 Bänden. gr. 8. In Leinw. geb.

I. Band. [X u. 548 S.] 1910.
II. — [In Vorbereitung.]

——— die Fokaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. Ein neues Kapitel zu den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes. Mit Textfiguren. [VIII u. 186 S.] gr. 8. 1896. Geh. n. *M* 7.—

Study, Dr. **E.,** Professor an der Universität Bonn, Vorlesungen über ausgewählte Gegenstände der Geometrie. ca. 5 Bände von je 10—12 Bogen. gr. 8. In Leinwand geb. [In Vorbereitung.]

Sturm, Geh. Reg.-Rat Dr. **R.,** Professor an der Universität Breslau, die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. In 4 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band. Die Verwandtschaften zwischen Gebilden erster Stufe. [XII u. 415 S.] 1908. n. *M.* 16.—
II. — Die eindeutigen linearen Verwandtschaften zwischen Gebilden zweiter Stufe. [VIII u. 346 S.] 1908. n. *M* 16.—
III. — Die eindeutigen linearen Verwandtschaften zwischen Gebilden dritter Stufe. [VIII u. 574 S.] 1909. n. *M.* 20.—
IV. — Die nichtlinearen und die mehrdeutigen Verwandtschaften zweiter und dritter Stufe. [X u. 486 S.] 1909. n. *M* 20.—

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker, unter Mitwirkung von Fr. Auerbach, O. Knopf, H. Liebmann, E. Wölffing u. a. herausgegeben von Felix Auerbach. Mit einem Bildnis Lord Kelvins. I. Jahrgang 1909/10. [XLIV u 450 S.] 8. 1909. In Leinwand geb. n. *M.* 6.—

Vahlen, Dr. **K. Th.,** Professor an der Universität Greifswald, abstrakte Geometrie. Untersuchungen über die Grundlagen der Euklidischen und Nichteuklidischen Geometrie. Mit zahlreichen Figuren. [XII u. 302 S.] gr. 8. 1905. In Leinwand geb. n. *M* 12.—

Vogt, Dr. **W.,** Privatdozent an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe, synthetische Theorie der Cliffordschen Parallelen und der linearen Linienörter des elliptischen Raumes. [VIII u. 58 S.] gr. 8. 1909. Geh. n. *M* 2.40.

Volk, K. G., Professor an der Oberrealschule mit realgymnasialer Abteilung zu Freiburg i. Br., die Elemente der neueren Geometrie unter besonderer Berücksichtigung des geometrischen Bewegungsprinzips. Für die oberen Klassen höherer Lehranstalten und zum Selbststudium. Mit 93 zum großen Teil zweifarbigen Figuren im Text. [VIII u. 77 S.] gr. 8. 1907. Steif geh. n. *M* 2.—, in Leinw. geb. n. *M* 2.20.

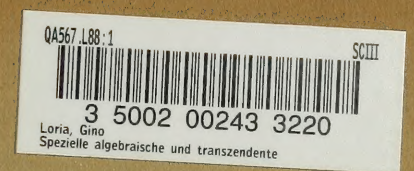
Weber, Dr. **H.,** u. Dr. **J. Wellstein,** Professoren an der Universität Straßburg i. E., Encyklopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. In 3 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band: Elementare Algebra und Analysis. Bearbeitet von H. Weber. 2. Auflage. Mit 38 Textfiguren. [XVIII u. 539 S.] 1906. n. *M* 9.60.
II. — Elemente der Geometrie. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal. 2. Auflage. Mit 251 Textfiguren. [XII u. 596 S.] 1907. n. *M* 12.—
III. — Angewandte Elementar-Mathematik. Bearbeitet von H. Weber, J. Wellstein und R. H. Weber (Rostock). Mit 358 Textfiguren. [XIII u. 666 S.] 1907. n. *M* 14.—

Wilczynski, E. J., A. M., Ph. D., Research Associate of the Carnegie Institution of Washington, Professor at the University of Illinois, projective differential geometry of curves and ruled surfaces. [VIII u. 298 S.] gr. 8. 1906. In Leinw. geb. n. *M* 10.—

Date Due

MAY 29 '50			
8/10/99			
2 of 2			
10/15/12			

DATE DUE	BORROWER'S NAME
3/27/39	Math 107 (1)
MAR 19	Mathematics 106-07
MAY 29 '50	M. J. Buist

